

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ТИПА ЛАНЖЕВЕНА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

М. С. Сорока, О. Ю. Петросян

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 11.01.2024 г.

Аннотация. В работе исследуется периодическая краевая задача для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве. Предполагается, что нелинейная часть уравнения представляет из себя отображение, подчиняющееся условиям типа Каратеодори. Для доказательства существования решения задачи используется теория дробного математического анализа, свойства функции Миттаг–Леффлера, а также теория мер некомпактности и уплотняющих операторов. Далее вводится в рассмотрение разрешающий оператор в пространстве непрерывных функций. После чего поставленная задача сводится к задаче существования неподвижных точек разрешающего оператора. Для доказательства существования неподвижных точек используется обобщенная теорема типа Б. Н. Садовского.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение типа Ланжевена, дробная производная, уплотняющий оператор, мера некомпактности, неподвижная точка, функция Миттаг–Леффлера.

ON THE PERIODIC PROBLEM FOR A CLASS OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS OF LANGEVIN TYPE IN BANACH SPACES

M. S. Soroka, O. Yu. Petrosyan

Abstract. In this paper investigates a periodic boundary value problem for a class of fractional order differential equations of Langevin type in a Banach space. It is assumed that the nonlinear part of the equation is a map that obeys conditions of the Carateodori type. To prove the existence of a solution to the problem, the theory of fractional mathematical analysis, the properties of the Mittag–Leffler function, the theory measures of non-compactness and condensing operators. A resolving operator in the space of continuous functions is introduced into consideration. After that, the task is reduced to the problem of the existence of fixed points of a resolving operator. A generalized theorem by B.N. Sadovsky type is used to prove the existence of fixed points.

Keywords: Langevin type differential equation, fractional derivative, condensing operator, measures of non-compactness, fixed point, Mittag-Leffler function.

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении последних десятилетий одним из наиболее популярных и актуальных отраслей математики является теория дробного интегро–дифференцирования. Увеличение интереса к данной тематике обусловлено достаточно точным описанием задач науки и техники

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22–71–10008.

© Сорока М. С., Петросян О. Ю., 2024

в терминах дифференциальных уравнений и включений с дробными производными. Большое количество физических, экономически, биологических и инженерных задач, связанных с протеканиями процессов в динамических системах, приводят к необходимости исследований дифференциальных уравнений и включений дробного порядка с различными граничными условиями (см. монографии [1], [2], статью [3]). В последние годы исследование целого комплекса задач, связанных с уравнениями и включениями дробного порядка, очень интенсивно ведется в России и за рубежом (см. статьи [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]).

Большой интерес представляют дифференциальные уравнения дробного порядка типа Ланжевена (см., например, статьи [11], [12], [13], [14], [15], [16] и ссылки в них). Уравнения такого типа обобщают уравнения движения в различного рода средах, например вязкоупругих или в средах, где сила сопротивления выражается с помощью дробной производной. Еще одним, наверно, самым известным частным случаем уравнения Ланжевена является формальная запись второго закона Ньютона.

В настоящей статье исследуется разрешимость в сепарабельном банаховом пространстве E краевой задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена

$${}^C D_0^\beta ({}^C D_0^\alpha + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

с периодическим граничным условием

$$x(0) = x(T) = 0. \quad (2)$$

Здесь ${}^C D_0^\alpha$ и ${}^C D_0^\beta$ – дробные производные Капуто порядков $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$, число $\lambda > 0$, $f: [0, T] \times E \rightarrow E$ – нелинейное отображение типа Каратеодори.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Дробный анализ

Приведем необходимые базовые сведения из дробного анализа (см. монографии [1], [2]).

Определение 1. Дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ функции $g: [0, T] \rightarrow E$ называется функция $I_0^\alpha g$ следующего вида:

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Отметим, что для гамма-функции Эйлера имеет место свойство (см. [2]):

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = 0, \text{ для } \alpha = 0, -1, -2, \dots \quad (3)$$

Определение 2. Дробной производной Капуто порядка $\alpha > 0$ функции $g \in C^n([0, T])$ называется функция ${}^C D_0^\alpha g$ следующего вида:

$${}^C D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} g^{(n)}(s) ds, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Лемма 1. Пусть $g \in C^n([0, T]; E)$ и $\alpha > 0$, тогда

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha g)(t) = g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Важное значение в дробном анализе имеет функция Миттаг–Леффлера.

Определение 3. Функция вида

$$E_{\alpha, \gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \gamma)}, \quad \alpha > 0, \gamma \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C},$$

называется функцией Миттаг–Леффлера.

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения и утверждение (см. [1]):

$$E_{\alpha, \gamma}(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + t E_{\alpha, \gamma+\alpha}(t), \quad (4)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(\lambda t^\alpha)) = t^{\gamma-n-1} E_{\alpha, \gamma-n}(\lambda t^\alpha), \quad (5)$$

$$\int_0^z t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(\lambda t^\alpha) dt = z^\gamma E_{\alpha, \gamma+1}(\lambda z^\alpha). \quad (6)$$

Применяя формулы (6) и (4), можно получить следующее равенство (см. [16])

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) ds = \frac{1}{\lambda} (E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha) - 1). \quad (7)$$

Лемма 2. (См. [17]) Для функции $f \in L^\infty([0, T]; E)$ и $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$, справедливо равенство

$$\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda(t-s)^\alpha) f(s) ds\right)'_t = \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} E_{\alpha, \beta-1}(\lambda(t-s)^\alpha) f(s) ds.$$

1.2. Меры некомпактности и уплотняющие отображения

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство и $Pb(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \emptyset \text{ и ограничено}\}$.

Определение 4. (См. [18]). Пусть $(\mathcal{A}, \geq)$ — частично-упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (далее — мнк) в $\mathcal{E}$, если для каждого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$, выполняется:

$$\beta(\overline{\text{co}} \Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\text{co}} \Omega$ — замыкание выпуклой оболочки Ω .

Мера некомпактности β называется:

- (а) *монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$, из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
- (б) *несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:

- (е) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$;
- (ф) *правильной (регулярной)*, если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω .

Примером вещественной меры некомпактности в пространстве $\mathcal{E}$, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является *мера некомпактности Хаусдорфа*:

$$\chi_{\mathcal{E}}(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

Отметим, что мнк Хаусдорфа удовлетворяет также свойству полуоднородности:

$$\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega),$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in P(\mathcal{E})$.

Определение 5. (См. [19].) Пусть X замкнутое подмножество $\mathcal{E}$, β — мнк в $\mathcal{E}$. Отображение $f : X \rightarrow \mathcal{E}$ называется уплотняющим относительно мнк β (или β -уплотняющим), если для каждого $\Omega \in Pb(X)$, не являющегося относительно компактным, выполняется:

$$\beta(f(\Omega)) \not\geq \beta(\Omega).$$

Теорема 1. (См. [19]). Пусть $\mathcal{M}$ — ограниченное выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$ и $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ — непрерывное, β -уплотняющее отображение, где β — несингулярная мнк в $\mathcal{E}$. Тогда множество неподвижных точек $\text{Fix } f = \{x : x = f(x)\}$ суть непустое множество.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения дробного порядка $0 < \alpha < 1$:

$${}^C D_0^\alpha x(t) = \lambda x(t) + z(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$x(0) = c_1, \quad (9)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $z : [0, T] \rightarrow E$.

Определение 6. (См. [1]) Решением задачи (8)-(9) является функция $x \in C([0, T]; E)$, удовлетворяющая равенству

$$x(t) = c_1 E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) z(s) ds. \quad (10)$$

Приведенное в определении решение является единственным (см. [1]).

Лемма 3. Пусть $f \in C([0, T]; E)$ и

$$1 - E_{\alpha, 1}(\lambda T^\alpha) \neq 0. \quad (11)$$

Тогда краевая задача (1), (2):

$${}^C D_0^\beta ({}^C D_0^\alpha + \lambda)x(t) = f(t), \quad t \in [0, T],$$

$$x(0) = x(T) = 0$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \int_0^T G(t, s) (I_0^\beta f)(s) ds,$$

где функция Грина $G(t, s)$ имеет следующий вид

$$G(t, s) = \begin{cases} (E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha) - 1)(1 - E_{\alpha, 1}(\lambda T^\alpha))^{-1}(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda(T-s)^\alpha) + \\ + (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-s)^\alpha), & 0 \leq s \leq t < T, \\ (E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha) - 1)(1 - E_{\alpha, 1}(\lambda T^\alpha))^{-1}(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda(T-s)^\alpha). & 0 \leq t < s < T. \end{cases}$$

Доказательство. Отметим следующие известные факты (см. [1], п. 2.1). Для функции $f \in L^p([0, T]; E)$, $p > 1$, при $0 < \beta < \frac{1}{p}$ дробный интеграл $I_0^\beta f \in L^q([0, T]; E)$ с $q > p$, а при $\beta > \frac{1}{p}$ функция $I_0^\beta f$ оказывается непрерывной (даже гёльдеровской). Поэтому можно утверждать, что $I_0^\beta f \in C([0, T]; E)$.

Действуя оператором дробного интегрирования I_0^β к обеим частям уравнения (1) и применяя лемму 1, мы имеем

$${}^C D_0^\alpha x(t) = \lambda x(t) + (I_0^\beta f)(t) + c_0. \quad (12)$$

Тогда по формуле (10) получаем следующий вид решения для задачи (12), (9)

$$x(t) = c_1 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s) ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) c_0 ds.$$

Применим формулу (7) к последнему слагаемому, тогда

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1) c_0 + c_1 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s) ds.$$

Откуда получаем

$$x(0) = c_1,$$

$$x(T) = \frac{1}{\lambda} (E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1) c_0 + c_1 E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s) ds.$$

Теперь, используя условие (2) придем к системе

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ \frac{1}{\lambda} (E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1) c_0 + c_1 E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s) ds = 0. \end{cases}$$

Решив которую, получим

$$c_1 = 0,$$

$$c_0 = \lambda (1 - E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha))^{-1} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s) ds.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу для решения, мы получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1) (1 - E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha))^{-1} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s) ds + \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s) ds = \int_0^T G(t,s) (I_0^\beta f)(s) ds. \end{aligned}$$

□

Будем полагать, что отображение $f : [0, T] \times E \rightarrow E$ из задачи (1) – (2) удовлетворяет следующим условиям:

- (f1) для всех $\varsigma \in E$ функция $f(\cdot, \varsigma) : [0, T] \rightarrow E$ измерима;
- (f2) для п.в. $t \in [0, T]$ оператор $f(t, \cdot) : E \rightarrow E$ – непрерывен;
- (f3) существует функция $\omega \in L_+^\infty([0, T])$ такая, что для любого $\varsigma \in E$ выполняется

$$\|f(t, \varsigma)\|_E \leq \omega(t) (1 + \|\varsigma\|_E);$$

(f4) существует функция $\mu \in L_+^\infty([0, T])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$, выполняется

$$\chi(f(t, \Omega)) \leq \mu(t) \chi(\Omega),$$

для п.в. $t \in [0, T]$, где χ – мнк Хаусдорфа в E .

Рассмотрим оператор Γ , заданный следующим образом:

$$\begin{aligned}\Gamma(x)(t) &= (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1)(1 - E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha))^{-1} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s, x(s)) ds + \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)(I_0^\beta f)(s, x(s)) ds = \int_0^T G(t,s)(I_0^\beta f)(s, x(s)) ds.\end{aligned}$$

Из определения функции Грина следует, что для любого $t \in [0, T]$ и $0 < \alpha < 1$: $G(\cdot, s) \in L^p([0, T])$, $p > 1$, и функция Грина теряет непрерывность только в точке $s = T$, поэтому $\Gamma : C([0, T]; E) \rightarrow C([0, T]; E)$.

Ясно, что функция $x \in C([0, T]; E)$ является решением задачи (1) – (2) тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой оператора Γ . Поэтому, нашей задачей является показать, что Γ имеет неподвижную точку.

Для доказательства существования неподвижных точек оператора Γ введем в рассмотрение оператор $S : L^\infty([0, T]; E) \rightarrow C([0, T]; E)$ вида

$$S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) f(s) ds.$$

Лемма 4. (См. [17]) Для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0, T]; E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0, T]$, слабая сходимость $\eta_n \rightarrow \eta_0$ в $L^1([0, T]; E)$ влечет сходимость $S(\eta_n) \rightarrow S(\eta_0)$ в $C([0, T]; E)$.

Лемма 5. (См. [17]) Пусть $\Omega \subset C([0, T]; E)$ – непустое ограниченное множество, $\Omega(t)$ – относительно компактное подмножество E для каждого $t \in [0, T]$, тогда

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) f(s, x(s)) ds : x \in \Omega \right\}$$

является равностепенно непрерывным множеством.

Для доказательства того, что оператор Γ уплотняющий, рассмотрим конус

$$\mathbb{R}_+^2 = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_1 \geq 0, \zeta_2 \geq 0\}$$

с естественным частичным порядком и введем в пространстве $C([0, T]; E)$ следующую векторную меру некомпактности

$$\nu : Pb(C([0, T]; E)) \rightarrow \mathbb{R}_+^2,$$

определенную как

$$\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), mod_C(\Omega)),$$

где $\varphi(\Omega)$ есть модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0, T]} \chi(\{y(t) : y \in \Omega\}),$$

а вторая компонента – модуль равностепенной непрерывности

$$mod_C(\Omega) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \max_{y \in \Omega} \|y(t_1) - y(t_2)\|, \quad |t_1 - t_2| \leq \delta$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (f1)–(f4), (11), предположим, что дополнительно выполняется условие

$$\eta := \frac{2T^\beta \|\mu\|_\infty}{\lambda \Gamma(\beta + 1)} (E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1) < 1, \quad (13)$$

где $\mu(\cdot)$ – функция из условия (F4). Тогда оператор Γ является ν -уплотняющим.

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([0, T]; E)$ – непустое ограниченное множество такое, что

$$\nu(\Gamma(\Omega)) \geq \nu(\Omega). \quad (14)$$

Покажем, что Ω – относительно компактно.

Из (14), следует, что

$$\varphi(\Gamma(\Omega)) \geq \varphi(\Omega). \quad (15)$$

Используя свойство (f4) и определение дробной производной, получаем

$$\begin{aligned} \chi \left((I_0^\beta f)(s, x(s)) : x \in \Omega \right) &\leq \chi \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s (s - \tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau : x \in \Omega \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s (s - \tau)^{\beta-1} \|\mu\|_\infty \chi_E(\Omega(\tau)) d\tau \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) \int_0^s (s - \tau)^{\beta-1} d\tau = \\ &= \frac{s^\beta}{\Gamma(\beta)\beta} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) \leq \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega). \end{aligned}$$

Применяя последнее неравенство, условие (g1) и равенство (7) получим

$$\begin{aligned} &\chi(\Gamma(\Omega)(t)) \leq \\ &\leq \chi \left(\left\{ (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1)(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1)^{-1} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T - s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s, x(s)) ds : x \in \Omega \right\} \right) + \\ &\quad + \chi \left(\left\{ \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t - s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s, x(s)) ds : x \in \Omega \right\} \right) \leq \\ &\leq (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1)(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1)^{-1} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T - s)^\alpha) \chi \left(\left\{ (I_0^\beta f)(s, x(s)) : x \in \Omega \right\} \right) ds + \\ &\quad + \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t - s)^\alpha) \chi \left(\left\{ (I_0^\beta f)(s, x(s)) : x \in \Omega \right\} \right) ds \leq \\ &\leq \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1)(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1)^{-1} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T - s)^\alpha) ds + \\ &\quad + \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t - s)^\alpha) ds \leq \\ &\leq \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1)(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1)^{-1} (E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1) + \\ &\quad + \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t - s)^\alpha) ds \leq \\ &\leq \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) \frac{1}{\lambda} (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1) + \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) \frac{1}{\lambda} (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) \frac{1}{\lambda} (E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1) = \eta \varphi(\Omega).$$

Из последней оценки мы имеем

$$\sup_{t \in [0, T]} \chi(\Gamma(\Omega)(t)) \leq \eta \varphi(\Omega),$$

или, что тоже самое

$$\varphi(\Gamma(\Omega)) \leq \eta \varphi(\Omega).$$

Условия (13) и (15) вместе с последним влекут за собой равенство

$$\varphi(\Omega) = 0.$$

Теперь покажем, что

$$\text{mod}_C(\Gamma(\Omega)) = 0.$$

Неравенство (14) влечет за собой следующее

$$\text{mod}_C(\Gamma(\Omega)) \geq \text{mod}_C(\Omega). \quad (16)$$

Из леммы 5 известно, что множество функций

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s, x(s)) ds : x \in \Omega \right\}$$

является равностепенно непрерывным, поэтому благодаря неравенству (16) мы получаем равенство $\text{mod}_C(\Omega) = 0$.

Таким образом, мы имеем $\nu(\Omega) = (0,0)$, что доказывает относительную компактность множества Ω . $\square$

Теперь мы можем перейти к доказательству главного утверждения.

Теорема 3. При выполнении условий (f1) – (f4), (11). Если

$$l = \frac{2T^\beta k}{\lambda \Gamma(\beta+1)} (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1) < 1, \quad (17)$$

где $k = \max \{ \|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty \}$, функции α, μ из условий (f3) и (f4) соответственно. Тогда задача (1)–(2) имеет решение.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $x \in C([0, T]; E)$, применяя свойство (f3) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|(I_0^\beta f)(s, x(s))\|_E &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left\| \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\|_E \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} \omega(\tau) (1 + \|x(\tau)\|_E) d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_C) \int_0^s (s-\tau)^{\beta-1} ds \leq \frac{s^\beta}{\Gamma(\beta)\beta} \|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_C) \leq \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_C). \end{aligned}$$

Тогда для всех $t \in [0, T]$ получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t)\|_E &\leq \\ \|(E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1)(1 - E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha))^{-1} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s, x(s)) ds\|_E &+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) (I_0^\beta f)(s, x(s)) ds \right\|_E \leq \\
 & \leq (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1)(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1)^{-1} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha) \|(I_0^\beta f)(s, x(s))\|_E ds + \\
 & + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) \|(I_0^\beta f)(s, x(s))\|_E ds \leq \\
 & \leq \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_C) (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1)(E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1)^{-1} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha) ds + \\
 & + \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_C) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) ds \leq \\
 & \leq \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_C) \frac{1}{\lambda} (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1) + \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_C) \frac{1}{\lambda} (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) - 1) \leq \\
 & \leq \frac{2T^\beta k}{\lambda \Gamma(\beta+1)} (E_{\alpha,1}(\lambda T^\alpha) - 1) (1 + \|x\|_C) = l(1 + \|x\|_C).
 \end{aligned}$$

Если мы возьмем

$$R \geq \frac{l}{1-l},$$

то неравенство $\|x\|_{C([0,T];E)} \leq R$ влечет, что $\|\Gamma x\|_{C([0,T];E)} \leq R$, следовательно оператор Γ преобразует замкнутый шар $B_R(0) \subset C([0,T];E)$ в себя. Заметим, что неравенство (17) влечет за собой выполнение условия (13), поэтому оператор Γ – уплотняющий относительно мнк ν и по теореме 1 он имеет неподвижную точку, которая является решением задачи (1)–(2). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego : Academic Press, 1999. — 340 p.
3. Mainardi, F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation / F. Mainardi, S. Rionero, T. Ruggeri // Waves and Stability in Continuous Media. World Scientific. Singapore. — 1994. — P. 246–251.
4. On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory. — 2017. — V. 18, № 1. — P. 269–292.
5. Appell, J. Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives / J. Appell, B. Lopez, K. Sadarangani // J. Nonlinear Var. Anal. — 2018. — V. 2. — P. 25–33.
6. Benedetti, I. On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions / I. Benedetti, V. Obukhovskii, V. Taddei // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — V. 20. — P. 1424–1446.
7. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays / T. D. Ke, V. Obukhovskii, N.-C. Wong, J.-C. Yao // Applicable Analysis. — 2013. — V. 92, № 1. — P. 115–137.
8. Gomoyunov, M. I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems. Progress in Fractional / M. I. Gomoyunov // Differentiation and Applications. — 2019. — V. 5. — P. 143–155.

9. On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional-Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao // *Mathematics*. — 2019. — V. 7, № 12. — P. 5–19.
10. Belmekki, M. Existence of Periodic Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation / M. Belmekki, J. J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez // *Boundary Value Problems*. — 2009. — V. 11. — P. 1–18.
11. Existence theory for fractional-order neutral boundary value problems / B. Ahmad, S. K. Ntouyas, A. Alsaedi, M. Alnahdi // *Fractional differential calculus*. — 2018. — V. 8, № 1. — P. 111–126.
12. Ntouyas, S. K. Existence Theorems for Mixed Riemann–Liouville and Caputo Fractional Differential Equations and Inclusions with Nonlocal Fractional Integro-Differential Boundary Conditions / S. K. Ntouyas, A. Alsaedi, B. Ahmad // *Fractal Fract.* — 2019. — V. 3, № 2. — P. 21–40.
13. Salem, A. Fractional Langevin Equations with Nonlocal Integral Boundary Conditions / A. Salem, F. Alzahrani, L. Almaghamisi // *Mathematics*. — 2019. — V. 7, № 5. — P. 402–412.
14. Salem, A. Fractional Langevin equations with multi-point and non-local integral boundary conditions / A. Salem, M. Alnegga, H. M. Srivastava // *Cogent Mathematics & Statistics*. — 2020. — V. 7, № 1.
15. Wang, G. Boundary value problem of a nonlinear Langevin equation with two different fractional orders and impulses / G. Wang, L. Zhang, G. Song // *Fixed Point Theory and Applications*. — 2012. — № 2012:200.
16. Петросян, Г. Г. О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве / Г. Г. Петросян // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. — 2022. — Т. 32, № 3. — С. 415–432.
17. Kamenskii, M. I. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space / M. I. Kamenskii, G. G. Petrosyan, C.-F. Wen // *J. Nonlinear Var. Anal.* — 2021. — V. 5, № 1. — P. 155–177.
18. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 2001. — 239 p.
19. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др. — Новосибирск : Наука, 1986. — 266 с.

REFERENCES

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. [Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo poriyadka i nekotorye ih prilozheniya]. Minsk, 1987, 688 p.
2. Podlubny I. Fractional Differential Equations. Podlubny. San Diego: Academic Press, 1999, 340 p.
3. Mainardi F., Rionero S., Ruggeri T. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation. *Waves and Stability in Continuous Media*. World Scientific. Singapore, 1994, pp. 246–251.
4. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces. *Fixed Point Theory*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 269–292.
5. Appell J., Lopez B., Sadarangani K. Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives. *J. Nonlinear Var. Anal.*, 2018, vol. 2, pp. 25–33.
6. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On generalized boundary value problems for a class

of fractional differential inclusions. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, vol. 20, pp. 1424–1446.

7. Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.-C., Yao J.-C. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays. *Applicable Analysis*, 2013, vol. 92, no. 1, pp. 115–137.

8. Gomoyunov M.I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems. *Progress in Fractional. Differentiation and Applications*, 2019, vol. 5, pp. 143–155.

9. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C. On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional–Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 12, pp. 5–19.

10. Belmekki M., Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R. Existence of Periodic Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation. *Boundary Value Problems*, 2009, vol. 11, pp. 1–18.

11. Ahmad B., Ntouyas S.K., Alsaedi A., Alnahdi M. Existence theory for fractional-order neutral boundary value problems. *Fractional differential calculus*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 111–126.

12. Ntouyas S.K., Alsaedi A., Ahmad B. Existence Theorems for Mixed Riemann–Liouville and Caputo Fractional Differential Equations and Inclusions with Nonlocal Fractional Integro-Differential Boundary Conditions. *Fractal Fract.*, 2019, vol. 3, no. 2, pp. 21–40.

13. Salem A., Alzahrani F., Almaghamisi L. Fractional Langevin Equations with Nonlocal Integral Boundary Conditions. *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 5, pp. 402–412.

14. Salem A., Alnegga M., Srivastava H.M. Fractional Langevin equations with multi-point and non-local integral boundary conditions. *Cogent Mathematics & Statistics*, 2020, vol. 7, no. 1.

15. Wang G., Zhang L., Song G. Boundary value problem of a nonlinear Langevin equation with two different fractional orders and impulses. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012, no. 2012:200.

16. Petrosyan G.G. On the boundary value problem for a class of fractional differential equations of Langevin type in Banach space. [Petrosyan G.G. O kraevoj zadache dlya klassa differencial'nyh uravnenij drobnogo poryadka tipa Lanzhevena v banahovom prostranstve]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki — Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2022, vol. 32, no. 3, pp. 415–432.

17. Kamenskii M.I., Petrosyan G.G., Wen C.-F. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space. *J. Nonlinear Var. Anal.*, 2021, vol. 5, no. 1, pp. 155–177.

18. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 2001, 239 p.

19. Akhmerov R.R., Kamensky M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovsky B.N. Measures of noncompactness and condensing operators. [Akhmerov R.R., Kamensky M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovsky B.N. Mery nekompaktnosti i uplotnyayushchie operatory]. Novosibirsk: Nauka, 1986, 266 p.

Сорока Мария Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

Soroka Maria, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

*Петросян Оксана Юрьевна, младший научный сотрудник, научно-исследовательская лаборатория нелинейного анализа и теории краевых задач, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: korolevamatematika@mail.ru*

*Petrosyan Oksana, junior researcher, Scientific Research Laboratory of Nonlinear Analysis and Theory of Boundary Value Problems, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: korolevamatematika@mail.ru*