

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТОЙ ТРАЕКТОРИИ ДВУМЕРНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С НЕВЫПУКЛЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Л. П. Петрова, И. Н. Прядко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Аннотация. Рассматривается автономная система на плоскости, имеющая ограничение на её решения в виде замкнутого, но не обязательно выпуклого множества. Изучается вопрос о влиянии стационарных точек на существование и орбитальную устойчивость замкнутых траекторий. Приводится ряд примеров, демонстрирующих это влияние. Предлагается один из возможных вариантов достаточных условий, накладываемых на правую часть системы и геометрию ограничивающего множества, обеспечивающих существование хотя бы одной замкнутой траектории, локально орбитально устойчивой изнутри.

Ключевые слова: замкнутая траектория, орбитальная устойчивость, нормальный конус.

ON THE CONDITIONS FOR THE EXISTENCE AND STABILITY OF A CLOSED TRAJECTORY OF A TWO-DIMENSIONAL AUTONOMOUS SYSTEM WITH A NON-CONVEX CONSTRAINT

L. P. Petrova, I. N. Pryadko

Abstract. An autonomous system on the plane is considered, which has a restriction on its solutions in the form of a closed, but not necessarily convex set. The question of the influence of stationary points on the existence and orbital stability of closed trajectories is studied. A number of examples are given to demonstrate this influence. One of the possible variants of sufficient conditions imposed on the right-hand side of a system and the geometry of the bounding set is proposed, ensuring the existence of at least one closed trajectory that is locally orbitally stable from the inside.

Keywords: closed trajectory, orbital stability, normal cone.

Будем рассматривать $Q \subset \mathbb{R}^2$ — связное замкнутое множество, имеющее ε -окрестность $Q^\varepsilon := \left\{ y : \min_{x \in Q} \|y - x\| \leq \varepsilon \right\}$ (число $\varepsilon > 0$), удовлетворяющее условию

1) для каждой точки $y \in Q^\varepsilon$ можно единственным образом указать ближайшую к ней точку из Q , называемую *проекцией* y на Q и обозначаемую $P_Q(y)$.

Здесь под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма пространства $\mathbb{R}^2$.

Будем пользоваться обозначениями, предложенными, например, в [1]: $N_Q(x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \forall (\delta > 0) \exists (\sigma > 0) \forall (z \in Q \setminus \{x\}, \|z - x\| < \sigma) \left[\left\langle \frac{z - x}{\|z - x\|}, y \right\rangle \leq \delta \right] \right\}$ и $N_Q(x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : x = \right.$

$P_Q\left(x + \frac{\varepsilon}{\|y\| + 1}y\right)\}$ — два эквивалентных определения нормального конуса, построенного к множеству Q в точке x ; $T_Q(x) := (N_Q(x))^* = \{z \in \mathbb{R}^2 : \forall(y \in N_Q(x))[\langle y, z \rangle \leq 0]\}$ — сопряжённый к $N_Q(x)$ конус, называемый касательным конусом, построенным к множеству Q в точке x .

Для вектора $y \in \mathbb{R}^2$ введём обозначения его проекций $\nu_x y := P_{N_Q(x)}(y)$, $\tau_x y := P_{T_Q(x)}(y)$ на взаимно сопряженные конусы $N_Q(x)$ и $T_Q(x)$ соответственно. Наконец, через $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|a - x\| < r\}$ обозначим открытый круг с центром в точке a радиуса r , а через $B[a, r]$ — замыкание $B(a, r)$.

Рассмотрим вопрос существования и устойчивости замкнутой траектории системы

$$\dot{x} = \tau_x f(x), \quad (1)$$

решениями которой назовём абсолютно непрерывные функции со значениями в множестве Q , удовлетворяющие (1) почти всюду на $[0, \infty)$.

Приведём несколько определений, на которые будем опираться в дальнейшем.

Определение. *Траекторией системы* (1) будем называть множество точек $\theta_\varphi \in \mathbb{R}^2$, состоящее из значений какого-либо решения φ этой системы.

Определение. *Замкнутой траекторией* будем называть траекторию, отвечающую какому-нибудь решению φ системы (1), для которого можно указать число $T > 0$ такое, что $\varphi(0) = \varphi(T)$ и $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ при всех $0 \leq t_1 < t_2 < T$.

Введём обозначение расстояния от точки a до замкнутого множества B в $\mathbb{R}^2$ следующим образом $\|a - B\| = \min\{\|a - y\| : y \in B\}$.

Определение. Замкнутую траекторию θ_φ системы (1) будем называть *асимптотически орбитально устойчивой*, если найдётся $\delta > 0$ такое, что для произвольного $x_0 \in Q$, $\|x_0 - \theta_\varphi\| \leq \delta$ выполнено $\lim_{t \rightarrow \infty} (\|\psi(t) - \theta_\varphi\|) = 0$ для решения ψ системы (1) с начальным значением $\psi(0) = x_0$.

Определение. Замкнутую траекторию θ_φ системы (1) будем называть *усиленно орбитально устойчивой*, если найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x_0 \in Q$, $\|x_0 - \theta_\varphi\| \leq \delta$ и решений ψ задача (1) с $\psi(0) = x_0$ найдётся такое $t_* \in [0, \infty)$, что $\psi(t) \in \theta_\varphi$ для всех $t \geq t_*$.

Определение. Замкнутую траекторию θ_φ системы (1) будем называть *асимптотически орбитально устойчивой в целом*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} (\|\psi(t) - \theta_\varphi\|) = 0$ для любого решения ψ системы (1).

Определение. Замкнутую траекторию θ_φ системы (1) будем называть *усиленно орбитально устойчивой в целом*, если для любого решения ψ системы (1) найдётся такое $t_* \in [0, \infty)$, что $\psi(t) \in \theta_\varphi$ для всех $t \geq t_*$.

Если условие одного из этих определений выполняется только для начальных значений решений из области $\Delta_2(\varphi)$ — части плоскости, расположенной снаружи траектории θ_φ , то говорят об орбитальной устойчивости θ_φ *извне*. Аналогично, при выполнении условия только для начальных значений решений из области $\Delta_1(\varphi)$ — части плоскости, расположенной внутри траектории θ_φ , то говорят об орбитальной устойчивости θ_φ *изнутри*.

В статье О. А. Лобановой и Б. Н. Садовского [2] доказана теорема о существовании и усиленной орбитальной устойчивости единственной замкнутой траектории системы (1) для выпуклого множества Q при выполнении следующих условий.

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ удовлетворяет условию Липшица;} \quad (2)$$

$$Q \neq \mathbb{R}^2, \text{ внутренность } Q \text{ не пуста (int } Q \neq \emptyset) \text{ и } 0 \in \text{int } Q; \quad (3)$$

$$f(x) \notin N_Q(x) \text{ при } x \neq 0; \quad (4)$$

существует симметричная положительно определённая матрица B и скалярная функция $\mu : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ такие, что $\langle Bx, f(x) \rangle > \mu(\|x\|)$ для всех $x \in Q \setminus \{0\}$;

(5)

существует число $\nu_0 > 0$ такое, что $\langle f(x), Cx \rangle \geq \nu_0 \|x\|^2$ для всех $x \in Q$,

(6)

где $Cx := (-x_2; x_1)$ — поворот вектора против часовой стрелки на 90° .

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (2), (4) и $|\langle f(x), Cx \rangle| \geq \nu_0 \|x\|^2$ скалярное произведение $\langle f(x), Cx \rangle$ имеет на множестве $Q \setminus \{0\}$ значения одного знака. Поэтому без ограничения общности в [2] рассматривают ограничение (6), а для случая $\langle f(x), Cx \rangle < 0$ заменой переменных $y = Dx := (x_1; -x_2)$ задача сводится к предыдущей (подробней см. [2] и [3]).

Заметим, что из условия (4) вытекает, что $f(x) \neq 0$ на $x \in Q \setminus \{0\}$.

Условие (5) означает следующее: при движении по траектории решения (1) без выхода на границу Q квадратичная форма $\langle Bx, x \rangle$ строго возрастает, так как в этом случае

$$\langle Bx(t), x(t) \rangle' = 2\langle Bx(t), x'(t) \rangle = 2\langle Bx(t), f(x(t)) \rangle > \mu(\|x(t)\|) > 0.$$

Условия (2), (5), (6) выполнены, например, если $f(x) = Ax$ и матрица A имеет комплексные собственные значения с положительной вещественной частью. Действительно, (2) выполнено с $L = \|A\|$, так как $\|f(x) - f(\bar{x})\| = \|Ax - A\bar{x}\| = \|A(x - \bar{x})\| \leq \|A\| \cdot \|x - \bar{x}\|$. Если A имеет комплексные собственные значения $\alpha \pm \beta i$, то она подобна матрице $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, для которой ввиду

того, что $\left\langle Ex, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 - \beta x_1 x_2 + \alpha x_2^2 = \alpha \|x\|^2$, можно взять $B = E$ (единичная матрица), а $\mu(\|x\|) = \alpha \|x\|^2 > 0$. Существует невырожденная матрица S такая, что $A = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot S$.

Тогда в качестве симметричной положительно определённой матрицы можно взять $B = S^T \cdot S$, а $\mu(\|x\|) = \frac{\alpha \|x\|^2}{\|S^{-1}\|^2} > 0$, так как $\left\langle S^T \cdot S \cdot x, S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} S \cdot x \right\rangle = \left\langle (S^{-1})^T S^T \cdot Sx, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} S \cdot x \right\rangle = \left\langle Sx, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} Sx \right\rangle = \alpha \|Sx\|^2 \geq \frac{\alpha \|x\|^2}{\|S^{-1}\|^2}$. Условие (4) накладывает дополнительное ограничение на матрицу A , регулирующее соотношение проекций вектора Ax на x и Cx в соответствии с геометрией множества Q .

Пример 1. На картинках ниже изображены траектории системы (1) с функцией $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 - 2 \\ 4 + 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и одинаковыми начальными условиями. В первом случае Q — полуплоскость под прямой $y = 5$, во втором Q ограничена сверху прямой $y = 5$ и справа прямой $x = 10$. Для первого случая условие (4) не выполнено, так как граничная точка $(12.5, 5)$ является стационарной ($f(12.5, 5) = (0, 54) \in N_Q(12.5, 5) = \{(0, a) : a \geq 0\}$), и замкнутая траектория отсутствует. Во втором случае вертикальная прямая отсекает эту стационарную точку, но на ней тоже появляется своя стационарная точка $(10, -50)$, тем не менее замкнутая траектория существует, она выделена утолщённой линией. В следующем примере, оставляя Q с начальными условиями, как в первом случае, переместим стационарную точку с помощью коэффициентов матрицы правой части $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 - 2 \\ 4 + 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Стационарная точка пе-

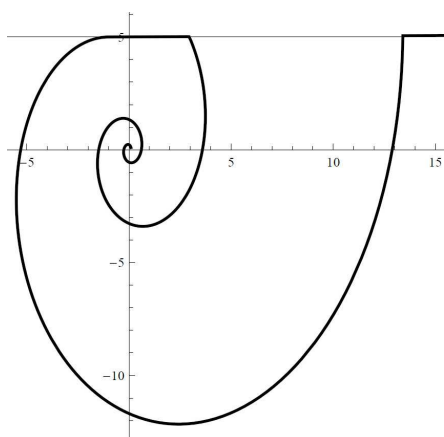


Рис. 1.

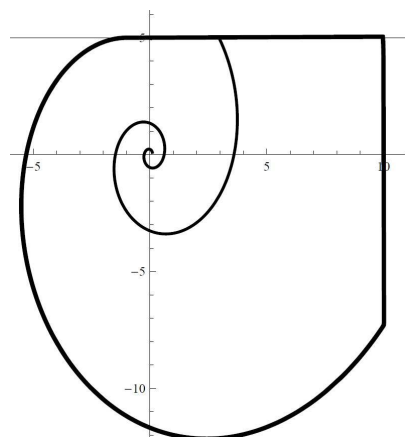


Рис. 2.

реместилась существенно вправо с координатами $(20, 5)$, не мешая образованию замкнутой траектории.

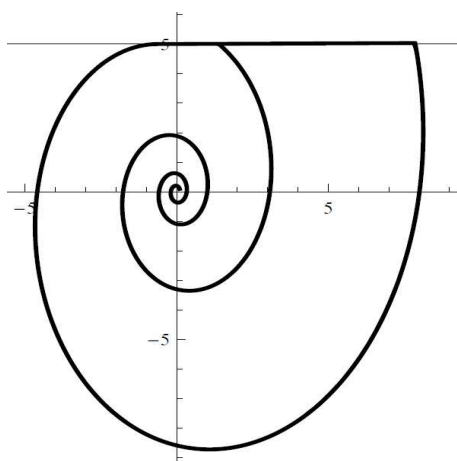


Рис. 3.

Эти примеры показывают, что стационарная точка мешает образованию замкнутой траектории далеко не всегда, а лишь в определённых условиях, когда находится в «зоне её формирования». В двух последних случаях легко видеть, что Q можно уменьшить так, чтобы замкнутая траектория не изменилась, а условие (4) выполнялось.

Для невыпуклых множеств выполнение условия (4) к тому же накладывает слишком большое ограничение на разнообразие множеств.

В следующем примере можно видеть аналогичное влияние стационарной точки на существование замкнутой траектории в невыпуклом множестве.

Пример 2. Множество Q расположено левее и ниже ветви гиперболы. Первая картинка соответствует системе $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \tau_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ с функцией $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.6x - 2y \\ 4x + 0.6y \end{pmatrix}$ и начальным условиям $x = 0.1, y = 0.1$. Стационарная точка с приближительными координатами $(3.1779, 0.3146)$, первая из которых удовлетворяет уравнению $\left(0.6x - \frac{2}{x}\right)x^2 = 4x + \frac{0.6}{x}$, попала в «зону формирования» замкнутой траектории.

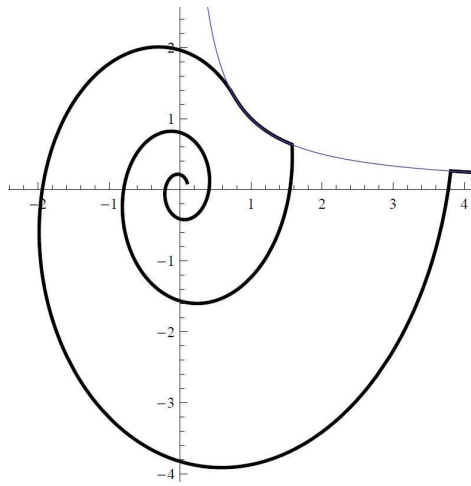


Рис. 4.

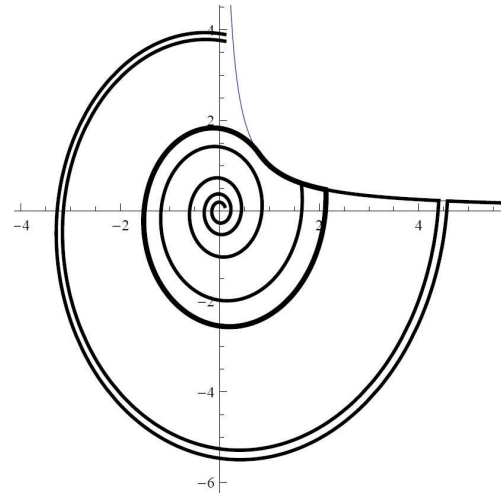


Рис. 5.

Вторая картинка соответствует функции $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3x - 2y \\ 4x + 0.3y \end{pmatrix}$ и начальным условиям:

a) $x = 0.1, y = 0.1$; b) $x = 0.1, y = 3.75$; c) $x = 1, y = 1$; d) $x = 0.1, y = 3.9$.

Первую координату стационарной точки для этого случая можно найти из уравнения $\left(0.3x - \frac{2}{x}\right)x^2 = 4x + \frac{0.3}{x}$. Её приближённое значение $(4.4777, 0.2233)$. На графике утолщённой линией выделена замкнутая траектория, которая, как видно из рисунка, усиленно орбитально устойчива изнутри и локально усиленно орбитально устойчива снаружи. Локальность усиленной орбитальной устойчивости здесь свидетельствует о том, что у системы (1) может существовать несколько замкнутых траекторий. Кроме того, напрашивается мысль о существовании неустойчивых замкнутых траекторий. Если построить систему так, чтобы её замкнутая траектория содержала стационарные точки, то резонно предположить, что она не будет устойчива хотя бы с одной стороны.

Пример 3.

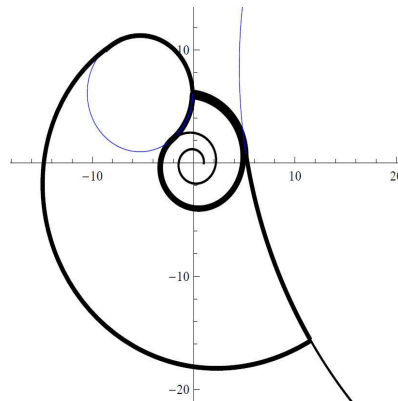


Рис. 6.

Здесь Q представляет собой всю плоскость $\mathbb{R}^2$ с вырезанными в ней двумя окружностями (дугой на рисунке изображена часть окружности большего радиуса). На рисунке 6 утолщёнными линиями изображены две замкнутые траектории системы (1) с функцией $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 8y \\ 8x + y \end{pmatrix}$. Из-за нарушения единственности решения в Q задачи Коши, они имеют общий участок тра-

екторий. Меньшая замкнутая траектория усиленно орбитально устойчива изнутри и неустойчива снаружи, вторая замкнутая траектория неустойчива как изнутри, так и снаружи, сказанное подтверждают две траектории системы, изображённые тонкими линиями.

Дальнейшие рассуждения имеют цель выявить локальные области невыпуклого множества Q («зоны формирования замкнутых траекторий»), в которых при определённых достаточных условиях можно гарантировать присутствие замкнутых траекторий.

Прежде всего потребуем, чтобы оператор проектирования на множестве Q^ε удовлетворял условию Липшица. Это обеспечит выполнение условий теоремы существования решения задачи $\dot{x} = \tau_x f(x)$, $x(0) = x_0 \in Q$, доказательство которой можно найти в статье [1]. В этой статье на Q^ε кроме условия 1) накладывалось ещё одно условие

2) если $x = P_Q(y)$ для внутренней точки $y \in Q^\varepsilon \setminus Q$, то $x = P_Q(x + \delta(y - x))$ для всех значений $\delta \in [0, \varepsilon/\|y - x\|]$.

Однако следует отметить, что в двумерном случае условие 2) следует из условия 1), как показывает следующее утверждение.

Утверждение 1. Для $Q \subset \mathbb{R}^2$ из выполнения условия 1) в Q^ε следует выполнение условия 2).

Доказательство. В [1] показана непрерывность оператора проектирования на Q^ε , которая следует из выполнения условия 1).

Предположим, что условие 2) нарушено, тогда найдутся $x \in Q$ и $y \in Q^\varepsilon$ с $0 < \|y - x\| < \varepsilon$ и $\bar{y} := x + \delta_0(y - x)$ с $\delta_0 \in (1, \varepsilon/\|y - x\|)$ такие, что x является проекцией на Q вектора y и, следовательно, всех векторов $(x + \delta(y - x))$ с $\delta \in [0, 1]$, но $x \neq P_Q(\bar{y}) = \bar{x}$.

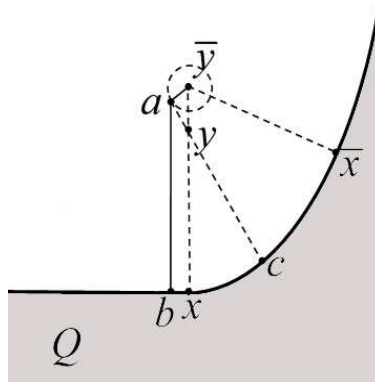


Рис. 7.

Обозначим через P_1 открытую полуплоскость, образованную прямой, проходящей через точки x и y , не содержащую $\bar{x}$. Выберем окрестность $B[\bar{y}, \sigma] \subset Q^\varepsilon \setminus Q$ так, чтобы проекции всех её точек на Q находились в полуплоскости P_2 , содержащей $\bar{x}$ и ограниченной прямой, проходящей через y и касающейся $B[\bar{y}, \sigma]$ в $a \in P_1$. Точку $b \in \partial Q \cap P_1$ выберем произвольно так, чтобы $[a, b] \subset Q^\varepsilon \setminus Q$. Тогда проекции точек из $(a, b]$ в силу условия 1) не могут находиться на части границы Q , расположенной между точками x и c . Следовательно, на ломаной $\bar{y}ab$ оператор проектирования терпит разрыв. Получили противоречие, которое доказывает справедливость выполнения условия 2).

От функции f , стоящей в правой части системы (1) потребуем выполнения условий (2), а от множества Q выполнения (3), сделав принадлежность нуля $\text{int } Q$ необязательным. Обеспечим центробежную составляющую, отличную от нуля, следующим условием

$$\left\langle f(x), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle > 0 \text{ для всех } x \in Q \setminus \{0\}. \quad (7)$$

Позаботимся также о достаточном значении вращательного компонента с помощью ограничения:

если $0 \notin Q$, то существует число $\nu > 0$ такое, что

$$\left| \left\langle f(x), \frac{Cx}{\|x\|} \right\rangle \right| \geq \nu \text{ для всех } x \in Q,$$

а если $0 \in Q$, то существует окрестность нулевой точки

$$B[0, r] \text{ и число } \nu > 0 \text{ такие, что } \left| \left\langle f(x), \frac{Cx}{\|x\|} \right\rangle \right| \geq \nu \|x\| \text{ для}$$

$$x \in B[0, r] \setminus \{0\} \text{ и } \left| \left\langle f(x), \frac{Cx}{\|x\|} \right\rangle \right| \geq \nu \text{ для } x \in Q \setminus B[0, r]. \quad (8)$$

Так как в силу (2), (7) и (8) непрерывная функция $f(x)$ не может равняться нулю для $x \neq 0$ и быть одного направления с x , скалярное произведение $\left\langle f(x), \frac{Cx}{\|x\|} \right\rangle$ не меняет на $Q \setminus \{0\}$ своего знака, будем считать в дальнейшем, что неравенства в (8) выполнены без знака модуля. А в случае их выполнения со знаком неравенств " $\leq$ " так же, как в [2], заменой переменных сведём задачу к рассматриваемой. Заметим, что условия (7) и (8) более слабые по сравнению с (5) и (6), поэтому не противоречат (2), (3).

От множества Q потребуем, чтобы любая окрестность любой его граничной точки имела непустое пересечение с $\text{Int } Q$.

Перед тем, как сформулировать следующие условия, установим несколько фактов.

Утверждение 2. Пусть $x_{\min}$ — такая точка локального минимума нормы на ∂Q , что для всех $x \in \partial Q \cap B(x_{\min}, r)$ выполнено $[\sigma \cdot x, x) \in \text{int } Q$ с некоторыми значениями $r > 0$ и $0 \leq \sigma < 1$. Тогда нормальный конус $N_Q(x_{\min})$ совпадает с лучом, натянутым на $x_{\min}$, и $f(x_{\min})$ расположено строго между $N_Q(x_{\min})$ и $\tau_x f(x_{\min})$ в том смысле, что при вращении крайнего правого вектора (не нулевой длины) из $N_Q(x_{\min})$ против часовой стрелки до направления вектора $\tau_x f(x_{\min})$ он обязательно пройдёт через вектор $f(x_{\min})$, при этом $f(x_{\min}) \neq \tau_x f(x_{\min})$ и $f(x_{\min}) \notin N_Q(x_{\min})$.

Доказательство. Сначала докажем, что $N_Q(x_{\min})$ совпадает с лучом, натянутым на $x_{\min}$. Поскольку на $x_{\min}$ достигается локальный минимум нормы, то существует окрестность $B(x_{\min}, \delta)$ с $0 < \delta <$

$< \min\{r, (1 - \delta)\}$, в которой все элементы из ∂Q имеют норму больше, чем $\|x_{\min}\|$. Тогда $B(x_{\min}, \delta) \cap B(0, \|x_{\min}\|) \subset \text{Int } Q$. Нетрудно видеть, что в этом случае определению нормального конуса $N_Q(x_{\min})$ могут удовлетворять только векторы, одинаково направленные с $x_{\min}$. Из-за непрерывности оператора проектирования на Q^ε любая граничная точка является проекцией некоторого ненулевого вектора из $Q^\varepsilon \setminus Q$. Поэтому $N_Q(x_{\min})$ больше множества $\{0\}$.

Теперь расположение $f(x_{\min})$ строго между $N_Q(x_{\min})$ и $\tau_x f(x_{\min})$ следует непосредственно из ограничений (7) и (8), так как $Cx_{\min}$ лежит на грани касательного конуса $T_Q(x_{\min})$ и совпадает по направлению с $\tau_x f(x_{\min})$.

Прежде, чем показать, что расположение $f(x)$ между $N_Q(x_{\min})$ и $\tau_x f(x_{\min})$ сохраняется для граничных точек в некоторой окрестности $(x_{\min})$, определим операторы $\tilde{N}_Q$ и $\tilde{T}_Q$ следующим образом: $\tilde{N}_Q(x) := N_Q(x_{\min}) \cap B[0, 1]$, $\tilde{T}_Q(x) := T_Q(x_{\min}) \cap B[0, 1]$ и докажем их полунепрерывность.

Утверждение 3. $\tilde{N}_Q$ полунепрерывен сверху, а $\tilde{T}_Q$ полунепрерывен снизу на Q .

Доказательство. Предположим, последовательность $x_n \in Q$ сходится к x , который принадлежит Q в силу замкнутости этого множества. И пусть последовательности $y_n \in \tilde{N}_Q(x_n)$

выбрана произвольно. Без ограничения общности можно считать, что $y_n \rightarrow y$ (т.к. $y_n \in B[0, 1]$) и $\|y\| \leq 1$. По одному из определений нормального конуса $x_n = P_Q \left(x_n + \frac{\varepsilon}{\|y_n\| + 1} y_n \right)$. Из непрерывности оператора проектирования на множество Q в Q^ε следует $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_Q \left(x_n + \frac{\varepsilon}{\|y_n\| + 1} y_n \right) = P_Q \left(x + \frac{\varepsilon}{\|y\| + 1} y \right)$, что равносильно $y \in N_Q(x)$. С учётом $\|y\| \leq 1$ получаем $y \in \tilde{N}_Q(x)$. Мы показали замкнутость графика оператора $\tilde{N}_Q$, из чего следует его полунепрерывность сверху (см. [4]). Предположим, что $\tilde{T}_Q$ не является полунепрерывным снизу, тогда найдутся число $\delta > 0$, точка $x \in Q$, последовательность $(x_n) \subset Q$, $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ и последовательность $(y_n) \subset \tilde{T}_Q(x)$ такие, что $y_n \notin \tilde{T}_Q^\delta(x_n)$ и, следовательно, $\left(\frac{y_n}{\|y_n\|} \right) \notin \tilde{T}_Q^\delta(x_n)$, поэтому можно считать, что $\|y_n\| = 1$. Заметим, что δ меньше единицы, так как ноль содержится в любом конусе, а норма всех y_n не превышает единицу. Существуют $u_n \in N_Q(x_n)$, $\|u_n\| = 1$ такие, что $\langle u_n, y_n \rangle > \delta$. Без ограничения общности можно считать, что $y_n \rightarrow y$ и $u_n \rightarrow u$. Поскольку график оператора $\tilde{N}_Q$ замкнут, то $u \in \tilde{N}_Q(x) \subset N_Q(x)$ и при переходе в неравенстве к пределу имеем $\langle u, y \rangle \geq \delta > 0$, что противоречит замкнутости множества $\tilde{T}_Q(x)$.

Определение. Угловой α -окрестностью замкнутого конуса K будем называть множество векторов ${}^\alpha K = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \min_{x \in K} \{\angle xy\} \leq \alpha \right\}$.

Очевидно, что ${}^\alpha \tilde{N}_Q(x) = {}^\alpha N_Q(x)$ и ${}^\alpha \tilde{T}_Q(x) = {}^\alpha T_Q(x)$

Утверждение 4. Существует окрестность $B[x_{\min}, \sigma]$ определённой ранее точки $x_{\min}$ такая, что расположение $f(x)$ между $N_Q(x_{\min})$ и $\tau_x f(x_{\min})$ (необязательно строгое) сохраняется для всех точек множества $B[x_{\min}, \sigma] \cap \partial Q$.

Доказательство. Действительно, существуют следующие непересекающиеся окрестности: $U_1 = B[f(x_{\min}), \delta]$, $U_2 = {}^\alpha(Cx_{\min})$ и $U_3 = {}^\alpha \tilde{N}_Q(x_{\min})$. В силу непрерывности функции f и полунепрерывности отображений сверху $\tilde{N}_Q$, снизу $\tilde{T}_Q$ найдётся такое значение σ , что для всех $x \in U = B[x_{\min}, \sigma] \cap \partial Q$ выполнено $f(x) \in U_1$, $\tilde{N}_Q(x_{\min}) \subset U_3$ и $Cx_{\min} \in \tilde{T}_Q(x_{\min}) \subset {}^\alpha \tilde{T}_Q(x)$. Для $x \in U$ значение функции $f(x)$ расположено между $N_Q(x)$ и $Cx_{\min}$ так же, как и одна из граней конуса $T_Q(x)$. Можно сделать вывод, что либо $f(x) \in T_Q(x)$, и поэтому $f(x) = \tau_x f(x)$, либо находится строго между $N_Q(x)$ и $\tau_x f(x)$.

Теперь перечисление достаточных условий для существования замкнутой траектории системы (1) можно завершить следующими требованиями.

Пусть существует кольцо $K[0, r, R] = B[0, R] \setminus B(0, r)$ с $R > r \geq 0$ и $\partial B(0, r) \subset \text{int } Q$, обладающее тем свойством, что в нём содержится один кусок или некоторое конечное число связных кусков ∂Q , не содержащих стационарных точек, но имеющих по одной точке локального минимума. Потребуем также, чтобы $\left[\frac{ry}{\|y\|}, y \right) \subset$

$\subset \text{int } Q$ для каждого элемента $y \in \partial Q \cap K[0, r, R]$. Для связных частей $\partial Q \cap K[0, r, R]$, расположенных вправо от точек локального минимума (т.е. тех, через которые проходит вектор $\frac{R}{\|x_{\min}\|} x_{\min}$, вращаясь по часовой стрелке) сохраняется расположение $f(x)$ между $N_Q(x)$ и $\tau_x f(x)$. И наконец, определив

$$m := \min \left\{ \left\langle f(x), \frac{Cx}{\|x\|} \right\rangle : x \in Q \text{ и } r \leq \|x\| \leq R \right\} \text{ и}$$

$$M := \max \left\{ \left\langle f(x), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle : x \in Q \text{ и } r \leq \|x\| \leq R \right\},$$

потребуем выполнения неравенства $\frac{R-r}{M} \geq \frac{2\pi R}{m}$. Смысл этого неравенства заключается в требовании, чтобы наименьшее время, за которое траектория решения (1) может покинуть кольцо, удаляясь от нуля в радиальном направлении, было больше максимально возможного времени, за которое траектория может совершить полный оборот по кольцу вокруг нуля.

Перечисленные условия позволяют надеяться, что решение системы (1), выпущенное из минимальной по норме точки локального минимума ∂Q в кольце $K[0, r, R]$, обладает замкнутой траекторией, причём локально усиленно орбитально устойчивой изнутри.

Пример 4. Для первой системы из примера 2 не существует кольца, удовлетворяющего перечисленным требованиям, так как соотношение радиальной и круговой составляющей функции f в ней таково, что для выполнения неравенства $\frac{R-r}{M} \geq \frac{2\pi R}{m}$ в кольцо вместе с точкой локального минимума ∂Q должна попасть и стационарная точка тоже. Для второй же системы в качестве кольца можно взять, например, $K[0, 0, 3]$.

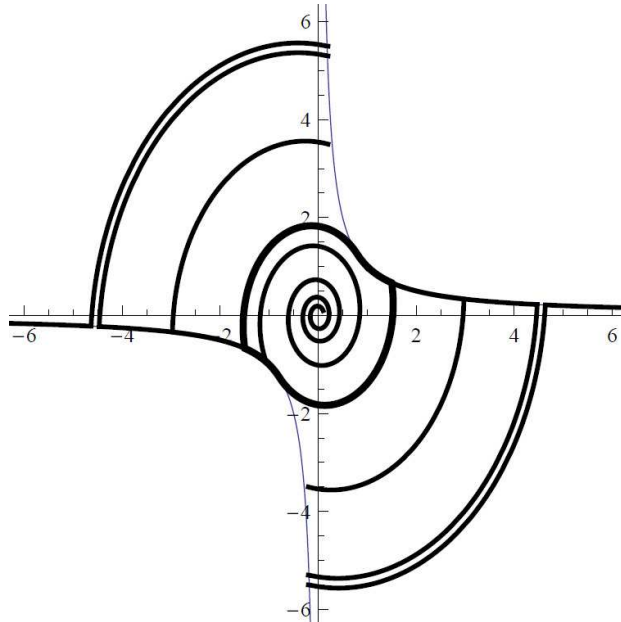


Рис. 8.

Если ∂Q состоит из двух ветвей гиперболы (Рис. 8), и Q расположено между ними, то для $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3x - 2y \\ 4x + 0.3y \end{pmatrix}$ в правой части системы (1) кольцо $K[0, 0, 3]$ содержит две точки локального минимума нормы на ∂Q и удовлетворяет всем требованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петрова, Л. П. О системах дифференциальных уравнений с ограничениями в виде не обязательно выпуклых множеств / Л. П. Петрова, И. Н. Прядко // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 10. — С. 1316–1323.
2. Лобанова, О. А. О двумерных динамических системах с ограничением / О. А. Лобанова, Б. Н. Садовский // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 4. — С. 449–456.
3. Systems with Non-Smooth Inputs / J. Appell, T. H. Nguyen, L. Petrova, I. Pryadko. — DeGruyter, Berlin, 2021.

4. Филиппов, А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 224 с.

REFERENCES

1. Petrova L.P., Pryadko I.N. On systems of differential equations with restrictions in the form of not necessarily convex sets. [Petrova L.P., Pryadko I.N. O sistemah differencial'nyh uravnenij s ogranicheniyami v vide ne obyazatel'no vypuklyh mnozhestv]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 10, pp. 1316–1323.
2. Lobanova O.A., Sadovsky B.N. On two-dimensional dynamic systems with a constraint. [Lobanova O.A., Sadovskij B.N. O dvumernyh dinamicheskikh sistemah s ogranicheniem]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 4, pp. 449–456.
3. Appell J., Nguyen T. H., Petrova L., Pryadko I. Systems with Non-Smooth Inputs, DeGruyter, Berlin 2021.
4. Filippov A.F. Differential equations with discontinuous right-hand side. [Filippov A.F. Differencial'nye uravneniya s razryvnoj pravoj chast'yu]. Moscow: Nauka, 1985, 224 p.

Петрова Любовь Петровна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный университет, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, Воронеж, Россия
E-mail: lpp1950@mail.ru
Тел.: +7(473)2208771

Petrova Lyubov Petrovna, candidate of physics and mathematics sciences, Associate Professor, Voronezh State University, Faculty of Mathematics, Department of Functional Analysis and Operator Equations, Voronezh, Russia
E-mail: lpp1950@mail.ru
Tel.: +7(473)2208771

Прядко Ирина Николаевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, Воронежский государственный университет, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, Воронеж, Россия
E-mail: irap@list.ru
Тел.: +7(473)2208771

Pryadko Irina Nikolaevna, candidate of physics and mathematics sciences, Associate Professor, Voronezh State University, Faculty of Mathematics, Department of Functional Analysis and Operator Equations, Voronezh, Russia
E-mail: irap@list.ru
Tel.: +7(473)2208771