УДК 517.988+517.927.4

О ФОРМУЛЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЯ ГРАДИЕНТНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ*

Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов

Вологодский государственный университет

Поступила в редакцию 27.11.2023 г.

Аннотация. В статье доказана формула для вычисления вращения (степени отображения) градиента гладкой положительно однородной функции на единичной сфере евклидового пространства R^n, $n \geqslant 2$. В доказанной формуле вращение градиентного векторного поля выражено через эйлерову характеристику замыкания множества точек сферы, где положительно однородная функция отрицательна. Суть доказательства состоит в том, что вычисление вращения градиентного векторного поля сводится к вычислению вращений касательной составляющей градиентного векторного поля на границах связных компонент указанного множества. Используя свойства вращения конечномерных векторных полей и теорему Пуанкаре-Хопфа, доказано, что вращение касательной составляющей на границе каждой связной компоненты равно эйлеровой характеристике замыкания данной связной компоненты. Схему доказательства можно применить для вычисления вращения неградиентных векторных полей. В работе также приведены некоторые следствия из доказанной формулы. В частности, приведены уточнения формулы при $n = 3, 4$ и в тех случаях, когда множество нулей функции имеет определенную структуру или функция представлена произведением более простых функций. Кроме того, приведено приложение к вопросу существования периодического решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с выделенной главной нелинейной частью, являющейся градиентом гладкой положительно однородной функции. Сформулирован и доказан критерий существования периодического решения через эйлерову характеристику замыкания множества точек сферы, где положительно однородная функция отрицательна.

Ключевые слова: положительно однородная функция, градиент функции, векторное поле, вращение векторного поля, эйлерова характеристика, периодическое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

ON THE FORMULA FOR CALCULATION OF THE MAPPING DEGREE OF A GRADIENT VECTOR FIELD

E. Mukhamadiev, A. N. Naimov

Abstract. In this paper we prove the formula for calculating the Mapping Degree (topological degree) of the gradient of smooth positively homogeneous function on the unit sphere of the Euclidean space R^n, $n \geqslant 2$. In the proven formula, the rotation of the gradient vector field expressed in terms of the Euler characteristic of the closure of the set of points of the sphere, where the positively homogeneous function is negative. The essence of the proof is that the calculation of the Mapping Degree of a gradient vector field reduces to calculating the Mapping Degree of the tangent component of the gradient vector field on the boundaries of the connected components of the specified set. Using the Mapping Degree properties of finite-dimensional vector fields and the Poincare-Hopf theorem, it is proved that the Mapping Degree of the tangent component on the boundary of each connected component is equal to Euler characteristic of the closure of a given connected component. The proof scheme can be

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00032, https://rscf.ru/project/23-21-00032/

used to calculate the Mapping Degree of non-gradient vector fields. The paper also presents some corollaries from the proven formula. In particular, refinements of the formula are given for $n = 3, 4$ and in cases where when the set of zeros of a function has a certain structure or the function is represented by a product of simpler functions. In addition, an application is given to the question of the existence of a periodic solution to a system of non-linear ordinary differential equations. The system of ordinary differential equations of the first order is considered with a distinguished main non-linear part, which is the gradient of a smooth positively homogeneous function. Criterion for the existence of a periodic solution is formulated and proved in terms of the Euler characteristic of the closure of the set points of the sphere where the positively homogeneous function is negative.

Keywords: positively homogeneous function, gradient of a function, vector field, Mapping Degree of a vector field (topological degree), Euler characteristic, periodic solution of a system of ordinary differential equations.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье доказана формула для вычисления вращения $\gamma(\nabla v, S^{n-1})$ градиента ∇v (другими словами, степени отображения $x \mapsto \nabla v(x)/|\nabla v(x)|$) гладкой положительно однородной функции $v \in C^1(\mathrm{R}^n \backslash \{0\}; \mathrm{R}^1)$ на единичной сфере $S^{n-1} = \{x \in \mathrm{R}^n : |x| = 1\}$ евклидового пространства R^n, $n \geqslant 2$. Предполагается, что $\nabla v(x) \neq 0$ $\forall x \in S^{n-1}$. Функцию $v(x)$ называем положительно однородной, если при некотором $m > 0$ выполняется тождество $v(\lambda x) \equiv \lambda^m v(x)$ $\forall \lambda > 0$.

Вычисление вращения векторных полей представляет интерес в приложении методов нелинейного функционального анализа в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Например, в работах [1], [2], [3], применяя методы вычисления вращения векторных полей, исследовано существование периодических и ограниченных решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [3] анонсирована формула

$$\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 1 - \chi(\overline{\Omega}_-(v)), \tag{1}$$

где $\chi(\overline{\Omega}_-(v))$ – эйлерова характеристика замыкания множества

$$\Omega_-(v) = \{x \in S^{n-1} : v(x) < 0\},$$

при этом $\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = 0$, если $\Omega_-(v) = \varnothing$. В работах [4], [5], используя формулу (1), доказаны теоремы о существовании периодических и ограниченных решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с главной градиентной положительно однородной нелинейностью.

В работе [6, с. 3-4] дано пояснение, как формулы вида (1) можно получить непосредственным применением теории Морса. В настоящей работе формула (1) доказана другим способом. Суть предложенного доказательства состоит в том, что вычисление $\gamma(\nabla v, S^{n-1})$ сводится к вычислению вращений касательной составляющей

$$\nabla v(x) - \langle \nabla v(x), x \rangle \frac{x}{|x|^2}, \quad x \in S^{n-1},$$

на границах связных компонент множества $\Omega_-(v)$, где $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ – скалярное произведение в R^n. Далее, используя свойства вращения конечномерных векторных полей [2, гл. 1-4] и теорему Пуанкаре-Хопфа [7, с. 223], [8, с. 328], доказано, что вращение касательной составляющей на границе каждой связной компоненты равно эйлеровой характеристике замыкания данной связной компоненты. Схему доказательства можно применить для вычисления вращения неградиентных векторных полей (см., например, [9]). В работе также приведены некоторые следствия из доказанной формулы и приложение к вопросу существования периодического решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с выделенной главной нелинейной частью, являющейся градиентом гладкой положительно однородной функции. Сформулирован и доказан критерий существования периодического решения через эйлерову характеристику замыкания множества точек сферы, где положительно однородная функция отрицательна.

В силу известных свойств вращения векторных полей [2, с. 14, 16] для $\gamma(\nabla v, S^{n-1})$ справедливы следующие утверждения: 1) если $\Omega_-(v) = \varnothing$, то $\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 1$; 2) если $\Omega_-(v) = S^{n-1}$, то $\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = (-1)^n$. Формулу (1) можно рассматривать как обобщение этих двух утверждений.

Следующая теорема составляет основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть градиент ∇v положительно однородной функции $v \in C^1(\mathrm{R}^n\backslash\{0\}; \mathrm{R}^1)$ не обращается в ноль на S^{n-1}. Тогда для вращения $\gamma(\nabla v, S^{n-1})$ градиентного векторного поля ∇v на S^{n-1} верна формула (1).*

В работе [9] формула (1) выведена из общей формулы при дополнительном предположении, что векторное поле $\nabla v(x) - \langle \nabla v(x), x\rangle x$ может обращаться в ноль лишь в конечном числе точек.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Способы определения и свойства вращения векторных полей систематически изложены в монографии [2, гл. 1-4]. В этом параграфе приведем определение и свойства вращения конечномерных векторных полей, которые используются при доказательстве формулы (1). А также перечислим необходимые свойства эйлеровой характеристики [10, с. 35-36, 410].

Конечномерным векторным полем называют всякое непрерывное отображение $P : M \mapsto E$, где E – конечномерное вещественное векторное пространство и $M \subset E$. Если векторное поле P задано и не обращается в ноль на границе ∂D ограниченной области $D \subset E$, то определяется целочисленная характеристика $\gamma(P,\partial D)$ – вращение векторного поля P на ∂D [2, с. 16-19, 28]. Данная характеристика определяется разными эквивалентными способами, приводящими к одному и тому же значению. Например, по способу Нагумо [2, с. 28] для определения $\gamma(P,\partial D)$ векторное поле P непрерывно продолжается внутри области D гладким отображением $Q : \overline{D} \mapsto E$, $Q|_{\partial D} = P$ так, что Q может обращаться в ноль лишь в конечном числе точек, и в этих точках невырождена матрица первых производных Q'. Такое отображение Q всегда можно построить. Если Q нигде не обращается в ноль, то полагают $\gamma(P,\partial D) = 0$, иначе $\gamma(P,\partial D)$ определяется формулой

$$\gamma(P,\partial D) = \sum_{Q(x)=0} sign(detQ'(x)).$$

Таким способом определяемое значение $\gamma(P,\partial D)$ не зависит от выбора Q.

Перечислим необходимые свойства вращения конечномерных векторных полей и эйлеровой характеристики.

1°. Если $P(x) = x - x_0$, $x \in \overline{D}$, где D – ограниченная область и точка $x_0 \in D$ фиксирована, то $\gamma(P,\partial D) = 1$.

2°. Если векторное поле $P : \overline{D} \mapsto \mathrm{R}^n$ невырождено на множестве $\overline{D} \backslash \cup_{i=1}^{l} D_i$, где области D_i, $i = \overline{1,l}$ попарно не пересекаются и лежат внутри ограниченной области D, то имеет место формула

$$\gamma(P,\partial D) = \gamma(P,\partial D_1) + \ldots + \gamma(P,\partial D_l).$$

3°. Векторные поля $P_1, P_2 : \overline{D} \mapsto \mathrm{R}^n$, гомотопные на границе ограниченной области $D \subset \mathrm{R}^n$, имеют одинаковое вращение $\gamma(P_1,\partial D) = \gamma(P_2,\partial D)$. Два векторных поля P_1, P_2 называют гомотопными на ∂D (или просто гомотопными, когда область D фиксирована), если существует однопараметрическое семейство векторных полей (деформация) – непрерывное отображение $P : \overline{D} \times [0,1] \mapsto \mathrm{R}^n$, удовлетворяющее условиям $P(x,\lambda) \neq 0$ $\forall x \in \partial D$, $\lambda \in [0,1]$ и $P(x,0) \equiv P_1(x)$, $P(x,1) \equiv P_2(x)$.

4°. Если векторные поля $P_i : \overline{D_i} \mapsto \mathrm{R}^n$, $i = 1,2$ невырождены на границе своих областей определения и $P_1(\partial D_1) \subset \partial D_2$, то для вращения суперпозиции P_2P_1 векторных полей P_1 и P_2 справедлива формула

$$\gamma(P_2P_1,\partial D_1) = \gamma(P_1,\partial D_1)\gamma(P_2,\partial D_2).$$

5°. Если векторные поля $P_i : \overline{D_i} \mapsto \mathrm{R}^{n_i}$, $i = 1,2$ невырождены на границе своих областей определения, то вращение векторного поля $P = (P_1,P_2) : \overline{D_1 \times D_2} \mapsto \mathrm{R}^{n_1+n_2}$ на границе области $D_1 \times D_2$ можно находить формулой

$$\gamma(P,\partial(D_1 \times D_2)) = \gamma(P_1,\partial D_1)\gamma(P_2,\partial D_2).$$

6°. Эйлеровы характеристики множеств A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, если они определены, связаны между собой формулой $\chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B)$.

7°. Эйлерова характеристика $\chi(B^n)$ единичного шара $B^n = \{y \in \mathrm{R}^n : |y| \leqslant 1\}$ равна 1.

8°. Для эйлеровой характеристики $\chi(S^{n-1})$ единичной сферы S^{n-1} верна формула $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$.

9°. Если множества A и B гомотопически эквивалентны и определены их эйлеровы характеристики, то $\chi(A) = \chi(B)$.

10°. Если ограниченная область $D \subset \mathrm{R}^n$ имеет гладкую границу ∂D и векторное поле $P : \overline{D} \mapsto \mathrm{R}^n$ в каждой точке $x \in \partial D$ направлено наружу $\langle P(x), n(x)\rangle > 0$, где $n(x)$ – вектор внешней нормали, то $\gamma(P,\partial D) = \chi(\overline{D})$ (теорема Пуанкаре-Хопфа для ограниченной области с гладкой границей).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть функция $v \in C^1(\mathrm{R}^n\backslash\{0\};\mathrm{R}^1)$ положительно однородна пордяка $m > 0$, т.е. $v(\lambda x) \equiv \lambda^m v(x)$ $\forall\lambda > 0$, и $\nabla v(x) \neq 0$ $\forall x \in S^{n-1}$. Для функции v и ее градиента ∇v верна формула Эйлера $\langle\nabla v(x), x\rangle = mv(x)$.

Если $\Omega_-(v) = S^{n-1}$, то $\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = 1 + (-1)^{n-1}$ (согласно свойству 8°). С другой стороны, $\langle\nabla v(x), x\rangle = mv(x) < 0$ $\forall x \in S^{n-1}$, следовательно, векторное поле ∇v линейно гомотопно векторному полю $(-x)$, т. е. $(1 - \lambda)\nabla v(x) + \lambda(-x) \neq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}$, $\lambda \in [0,1]$. Отсюда согласно свойству 3° имеем $\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = (-1)^n$, и формула (1) верна. В случае $\Omega_-(v) = \varnothing$ имеем $\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = 0$, и векторное поле ∇v линейно гомотопно векторному полю x, значит, $\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 1$ и верна формула (1).

В последующем можно считать, что множество $\Omega_-(v)$ не пусто и не совпадает с S^{n-1}. В данном случае множество $\Omega_-(v)$ состоит из конечного числа связных компонент с гладкой границей. Граница каждой связной компоненты является $(n-2)$-мерным ориентируемым гладким многообразием без края и в каждой граничной точке x вектор $\nabla v(x)$ ортогонален x и сонаправлен с вектором внешней нормали.

Множество $\overline{\Omega}_-(v)$ представляя в виде объединения связных компонент $\overline{\Omega}_-(v) = \overline{\Omega}_-^1 \cup \ldots \cup \overline{\Omega}_-^{p_-(v)}$, согласно свойству 6°, имеем:

$$\chi\left(\overline{\Omega}_-(v)\right) = \chi\left(\overline{\Omega}_-^1\right) + \ldots + \chi\left(\overline{\Omega}_-^{p_-(v)}\right). \tag{2}$$

Для того, чтобы вычислить $\gamma(\nabla v, S^{n-1})$, продолжим векторное поле ∇v внутри сферы S^{n-1} формулой

$$Q(x) = \begin{cases} (2|x| - 1)\nabla v(x) + 2(1 - |x|)x, & |x| \geqslant 0{,}5, \\ x, & |x| < 0{,}5. \end{cases}$$

Равенство $Q(x) = 0$ возможно лишь при $x = 0$ или при $|x| > 0{,}5$, $x/|x| \in \Omega_-(v)$. Поэтому согласно свойству 2° имеем:

$$\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = \gamma(Q, \partial B_{0,5}) + \gamma(Q, \partial D_-(v)),$$

где $B_{0,5} = \{x \in \mathrm{R}^n : |x| < 0{,}5\}$, $\quad D_-(v) = \{x \in \mathrm{R}^n : 0{,}5 < |x| < 1, x/|x| \in \Omega_-(v)\}$,

$$\gamma(Q, \partial B_{0,5}) = 1, \qquad \gamma(Q, \partial D_-(v)) = \sum_{j=1}^{p_-(v)} \gamma(Q, \partial D_-^j(v)),$$

$$D_-^j(v) = \{x \in D_-(v) : x/|x| \in \Omega_-^j(v)\}.$$

Следовательно,

$$\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 1 + \sum_{j=1}^{p_-(v)} \gamma(Q, \partial D_-^j(v)).$$

Отсюда и из равенства (2) вытекает формула (1), если для приозвольной связной компоненты $\Omega = \Omega_-^j(v)$ множества $\Omega_-(v)$ и области $D = D_-^j(v)$, определяемой множеством $\Omega_-^j(v)$, докажем формулу

$$\gamma(Q, \partial D) = -\chi(\overline{\Omega}). \tag{3}$$

Векторное поле ∇v разложим по касательной и нормальной составляющих:

$$\nabla v(x) = \left(\nabla v(x) - \frac{mv(x)}{|x|^2} x\right) + \frac{mv(x)}{|x|^2} x.$$

По этому разложению векторное поле Q на $\overline{D}$ представим в виде

$$Q(x) = (2|x| - 1)\left(\nabla v(x) - \frac{mv(x)}{|x|^2} x\right) + \left((2|x| - 1)\frac{mv(x)}{|x|^2} + 2(1 - |x|)\right) x, \quad x \in \overline{D}.$$

В таком представлении легко проверить, что семейство векторных полей

$$\widetilde{Q}(x,\lambda) = ((1-\lambda)(2|x| - 1) + \lambda)\left(\nabla v(x) - \frac{mv(x)}{|x|^2} x\right) +$$

$$+ \left((2|x| - 1)\left((1-\lambda)\frac{mv(x)}{|x|^2} - \lambda\right) + 2(1 - |x|)\right) x, \quad x \in \overline{D}, \quad \lambda \in [0,1],$$

не вырождается на границе области D, т.е. $\widetilde{Q}(x,\lambda) \neq 0$ $\forall x \in \partial D$, $\lambda \in [0,1]$. Следовательно, векторное поле Q гомотопно векторному полю

$$Q_1(x) = \left(\nabla v(x) - \frac{mv(x)}{|x|^2} x\right) + (3 - 4|x|)x, \quad x \in \overline{D},$$

и согласно свойству 3° имеем $\gamma(Q, \partial D) = \gamma(Q_1, \partial D)$. Таким образом, доказываемая формула (3) равносильна формуле

$$\gamma(Q_1, \partial D) = -\chi(\overline{\Omega}). \tag{4}$$

В последующем, без ограничения общности, можно считать, что

$$\overline{\Omega} \subset \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} : x_n > 0\}. \tag{5}$$

Действительно, функцию $v(x)$ можно преобразовать в функцию $v_1(x) = v(\varphi(x/|x|, 1))|x|^m$, удовлетворяющую условию (5), с помощью семейства диффеоморфизмов $\varphi(\cdot, t) : S^{n-1} \mapsto$

S^{n-1}, $t \in [0,1]$, $\varphi(y,0) = y$, стягивающих множество $\Omega_-(\varphi(\cdot,t))$ к точке $e^n = (0,\ldots,0,1)^\top$. При таком преобразовании, согласно свойству 3°, сохраняется вращение $\gamma(\nabla\varphi(\cdot,t),S^{n-1})$ и сохраняется эйлерова характеристика $\chi(\overline{\Omega}_-(\varphi(\cdot,t))$ согласно свойству 9°. Поэтому если формула (1) верна для v_1, то она верна и для v.

Учитывая (5), легко проверить, что векторное поле Q_1 линейно гомотопно векторному полю

$$Q_2(x) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) - \frac{mv(x)}{|x|^2}x_1,\ldots,\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}(x) - \frac{mv(x)}{|x|^2}x_{n-1}, 3-4|x|\right), \quad x \in \overline{D},$$

а векторное поле Q_2 линейно гомотопно векторному полю

$$Q_3(x) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(0{,}75|x|^{-1}x\right),\ldots,\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\left(0{,}75|x|^{-1}x\right), 3-4|x|\right), \quad x \in \overline{D},$$

т. е. $(1-\lambda)Q_i(x) + \lambda Q_{i+1}(x)$, $\forall x \in \partial D$, $\lambda \in [0,1]$, $i = 1,2$. Отсюда, согласно свойству 3° имеем

$$\gamma(Q_1,\partial D) = \gamma(Q_3,\partial D). \tag{6}$$

Область D преобразуем в цилиндр, применяя отображение $G : \mathrm{R}^n\backslash\{0\} \mapsto \mathrm{R}^n\backslash\{0\}$, определяемое формулой

$$G(x) = \left(0{,}75|x|^{-1}x_1,\ldots,0{,}75|x|^{-1}x_{n-1},|x|\right).$$

При таком отображении имеем: $G(D) = D_0$ и $G(\partial D) = \partial D_0$, где $D_0 = \Omega_0 \times [0{,}5;1]$,

$$\Omega_0 = \left\{s \in \mathrm{R}^{n-1}: \quad 0{,}75^{-1}\left(s,\left(0{,}75^2 - |s|^2\right)^{1/2}\right) \in \Omega\right\}.$$

Можно проверить, что $detG'(x) > 0$ при $x \in \overline{D}$.

Векторное поле Q_3 отображением G преобразовывается в векторное поле

$$Q_0(s,h) = Q_3G^{-1}(s,h) = (\Phi_0(s),\Phi_1(h)), \quad (s,h) \in \overline{D}_0,$$

где $\Phi_1(h) = 3 - 4h$, $h \in [0{,}5;1]$,

$$\Phi_0(s) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(X(s)),\ldots,\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}(X(s))\right), \quad s \in \overline{\Omega}_0,$$

где $X(s) = \left(s,\left(0{,}75^2 - |s|^2\right)^{1/2}\right)$. Согласно свойству 4° получаем

$$\gamma(Q_3,\partial D) = \gamma(Q_0,\partial D_0). \tag{7}$$

Далее, согласно свойству 5° находим

$$\gamma(Q_0,\partial D_0) = \gamma(\Phi_0,\partial\Omega_0)\gamma(\Phi_1,\partial[0{,}5;1]) = -\gamma(\Phi_0,\partial\Omega_0). \tag{8}$$

Множества $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega}_0$ диффеоморфны, поэтому согласно свойству 9°

$$\chi(\overline{\Omega}_0) = \chi(\overline{\Omega}). \tag{9}$$

Вычислим $\gamma(\Phi_0,\partial\Omega_0)$ сравнивая векторное поле Φ_0 с градиентом функции $v_0(s) = v\left(X(s)\right)$, $s \in \overline{\Omega}_0$, где $X(s) = \left(s,\left(0{,}75^2 - |s|^2\right)^{1/2}\right)$. Данная функция внутри области Ω_0 отрицательна, а на границе $\partial\Omega_0$ обращается в ноль. Проверим, что

$$\langle\Phi_0(s),\nabla v_0(s)\rangle = |\nabla v(X(s))|^2 > 0 \quad \forall s \in \partial\Omega_0. \tag{10}$$

Если $s \in \partial\Omega_0$, то $0{,}75^{-1}X(s) \in \partial\Omega$, $v\left(X(s)\right) = 0$ и по формуле Эйлера

$$\left\langle \nabla v\left(X(s)\right), X(s)\right\rangle = mv\left(X(s)\right) = 0.$$

Умножаяя последнее равенство на $\partial v/\partial x_n$, получим

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(X(s))\sum_{k=1}^{n-1} s_k \frac{\partial v}{\partial x_k}(X(s)) = -\left(\frac{\partial v}{\partial x_n}(X(s))\right)^2 \left(0{,}75^2 - |s|^2\right)^{1/2}.$$

Учитывая это, находим

$$\langle \Phi_0(s), \nabla v_0(s)\rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial v}{\partial x_k}(X(s))\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}(X(s)) - \right.$$

$$\left. - s_k \left(0{,}75^2 - |s|^2\right)^{-1/2} \frac{\partial v}{\partial x_n}(X(s))\right) = |\nabla v(X(s))|^2 > 0.$$

Из (10) следует, что градиент ∇v_0 функции v_0 в каждой точке $s \in \partial\Omega_0$ не обращается в ноль и сонаправлен с вектором внешней нормали. Согласно теореме Пуанкаре-Хопфа (свойству 10°) имеет место равенство

$$\gamma(\nabla v_0, \partial\Omega_0) = \chi(\overline{\Omega}_0). \tag{11}$$

Кроме того, из (10) следует, что векторные поля Φ_0 и ∇v_0 линейно гомотопны, следовательно, по свойству 3°

$$\gamma(\Phi_0, \partial\Omega_0) = \gamma(\nabla v_0, \partial\Omega_0). \tag{12}$$

Из цепочки равенств (6)-(9), (11) и (12) вытекает формула (4).

Теорема 1 доказана.

4. СЛЕДСТВИЯ И ПРИЛОЖЕНИЕ

Из формулы (1) и теоремы Хопфа о гомотопических классах векторных полей на сфере [2, с. 22] вытекает

Следствие 1. *Невырожденные градиентные векторные поля* $\nabla v_1, \nabla v_2 : S^{n-1} \mapsto \mathrm{R}^n$ *гомотопны тогда и только тогда, когда* $\chi(\overline{\Omega}_-(v_1)) = \chi(\overline{\Omega}_-(v_2))$.

В формуле (1) вместо v подставим $(-v)$:

$$\gamma(-\nabla v, S^{n-1}) = 1 - \chi(\overline{\Omega}_-(-v)),$$

$$(-1)^n \gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 1 - \chi(\overline{\Omega}_+(v)), \tag{13}$$

где $\Omega_+(v) = \{x \in S^{n-1} : v(x) > 0\}$. Согласно свойству 6°

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v)) + \chi(\overline{\Omega}_+(v)) = \chi(S^{n-1}) + \chi(\Omega_0(v)),$$

где $\Omega_0(v) = \{x \in S^{n-1} : v(x) = 0\}$ и $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$. Из (1) и (13) выводим следующие равенства:

$$\chi(\overline{\Omega}_+(v)) = 1 - (-1)^n\left(1 - \chi(\overline{\Omega}_-(v))\right) = 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n \chi(\overline{\Omega}_-(v)), \tag{14}$$

$$(1 + (-1)^n)\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 2 - \chi(\overline{\Omega}_-(v)) - \chi(\overline{\Omega}_+(v)) = 1 + (-1)^n - \chi(\Omega_0(v)),$$

$$(1 - (-1)^n)\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = \chi(\overline{\Omega}_+(v)) - \chi(\overline{\Omega}_-(v)).$$

Отсюда вытекает

Следствие 2. *Если n – четно, то*

$$\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 1 - 0{,}5\chi(\Omega_0(v)), \qquad \chi(\overline{\Omega}_+(v)) = \chi(\overline{\Omega}_-(v)) = 0{,}5\chi(\Omega_0(v)),$$

а если n – нечетно, то

$$2\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = \chi(\overline{\Omega}_+(v)) - \chi(\overline{\Omega}_-(v)), \qquad \chi(\Omega_0(v)) = 0, \qquad \chi(\overline{\Omega}_+(v)) + \chi(\overline{\Omega}_-(v)) = 2.$$

В книге [8, с. 366] доказано, что для произвольного $(n+1)$-мерного компактного гладкого многообразия L с краем ∂L имеет место формула $\chi(\partial L) = (1 + (-1)^n)\chi(L)$.

Рассмотрим случай, когда множество $\Omega_0(v)$ состоит из $p_0(v)$ связных компонент, каждая из которых диффеоморфна сфере S^{n-2}. Например, при $n = 3$ имеет место только такой случай. В этом случае произвольная связная компонента $\overline{\Omega}^j_-(v)$ множества $\overline{\Omega}_-(v)$, ограничиваемая k_j связными компонентами множества $\Omega_0(v)$, получается из сферы S^{n-1} удалением k_j множеств, гомеоморфных внутренности шара B^{n-1}. Поэтому согласно свойствам 6° и 9° имеем

$$\chi(\overline{\Omega}^j_-(v)) = \chi(S^{n-1}) - k_j\chi(B^{n-1}) + k_j\chi(S^{n-2}).$$

Суммируя эйлеровы характеристики всех связных компонент множества $\overline{\Omega}_-(v)$ получим

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = p_-(v)\chi(S^{n-1}) - p_0(v)\chi(B^{n-1}) + p_0(v)\chi(S^{n-2}),$$

где $p_-(v)$ – число связных компонент множества $\Omega_-(v)$. Легко проверить, что $p_-(v) + p_+(v) = p_0(v) + 1$, здесь $p_+(v)$ – число связных компонент множества $\Omega_+(v)$.. Таким образом, используя формулу (1), получаем

Следствие 3. *Если множество $\Omega_0(v)$ состоит из $p_0(v)$ связных компонент, каждая из которых диффеоморфна сфере S^{n-2}, то верна формула*

$$\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = \begin{cases} 1 - p_0(v), & \text{если } n \text{ – четно,} \\ p_+(v) - p_-(v), & \text{если } n \text{ – нечетно.} \end{cases}$$

При $n = 4$ множество $\Omega_0(v)$ состоит из $p_0(v)$ двумерных ориентируемых гладких многообразий без края. Каждое такое многообразие, как известно [10], диффеоморфно сфере с ручками. Зная набор количества ручек $r_1, \ldots, r_{p_0(v)}$ связных компонент, находим

$$\chi(\Omega_0(v)) = 2(1 - r_1) + \ldots + 2(1 - r_{p_0(v)}).$$

Учитывая следствие 2, выводим

Следствие 4. *При $n = 4$ верна формула*

$$\gamma(\nabla v, S^3) = 1 - p_0(v) + r_1 + \ldots + r_{p_0(v)},$$

где $r_1, \ldots, r_{p_0(v)}$ – набор количества ручек связных компонент множества $\Omega_0(v)$.

Проверим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть функции $v_1, v_2 \in C^1(\mathrm{R}^n\backslash\{0\}; \mathrm{R}^1)$ положительно однородны порядка m_1, m_2 соответственно и удовлетворяют условиям*

1) $\nabla v_i(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$, $i = 1, 2$;

2) $|v_1(x)| + |v_2(x)| > 0 \ \forall x \neq 0$;

3) $\Omega_-(v_1) \subset \Omega_+(v_2)$ или $\Omega_-(v_1) \subset \Omega_-(v_2)$.

Тогда функция $v = v_1 v_2$ обладает свойствами

a) $\nabla v(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$;

b) $\Omega_-(v) = \Omega_-(v_1) \cup \Omega_-(v_2)$, если $\Omega_-(v_1) \subset \Omega_+(v_2)$;

c) $\Omega_+(v) = \Omega_-(v_1) \cup \Omega_+(v_2)$, если $\Omega_-(v_1) \subset \Omega_-(v_2)$.

Доказательство. Легко проверить, что из формулы Эйлера $(m_1+m_2)v(x) = \langle\nabla v(x), x\rangle$ и равенства $\nabla v(x) = v_1(x)\nabla v_2(x) + v_2(x)\nabla v_1(x)$, с учетом условий 1) и 2), следует свойство a).

Если $\Omega_-(v_1) \subset \Omega_+(v_2)$, то $\Omega_-(v_2) \subset \Omega_+(v_1)$ и из очевидного равенства

$$\Omega_-(v) = (\Omega_-(v_1) \cap \Omega_+(v_2)) \cup (\Omega_+(v_1) \cap \Omega_-(v_2))$$

следует $\Omega_-(v) = \Omega_-(v_1) \cup \Omega_-(v_2)$. Аналогично, если $\Omega_-(v_1) \subset \Omega_-(v_2)$, то $\Omega_+(v_2) \subset \Omega_+(v_1)$ и из равенства

$$\Omega_+(v) = (\Omega_-(v_1) \cap \Omega_-(v_2)) \cup (\Omega_+(v_1) \cap \Omega_+(v_2))$$

следует $\Omega_+(v) = \Omega_-(v_1) \cup \Omega_+(v_2)$. Лемма 1 доказана.

Из свойства b) следует, что если $\Omega_-(v_1) \subset \Omega_+(v_2)$, то согласно свойству 6°

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = \chi(\overline{\Omega}_-(v_1)) + \chi(\overline{\Omega}_-(v_2)).$$

А из свойства c) следует, что если $\Omega_-(v_1) \subset \Omega_-(v_2)$, то

$$\chi(\overline{\Omega}_+(v)) = \chi(\overline{\Omega}_-(v_1)) + \chi(\overline{\Omega}_+(v_2)).$$

В последнем равенстве выразим $\chi(\overline{\Omega}_+(v))$ и $\chi(\overline{\Omega}_+(v_2))$ через $\chi(\overline{\Omega}_-(v))$ и $\chi(\overline{\Omega}_-(v_2))$ по формуле (14):

$$1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = \chi(\overline{\Omega}_-(v_1)) + 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n\chi(\overline{\Omega}_-(v_2)),$$
$$\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = (-1)^n\chi(\overline{\Omega}_-(v_1)) + \chi(\overline{\Omega}_-(v_2)).$$

Таким образом, получаем

Следствие 5. *Если функции v_1 и v_2 удовлетворяют условиям 1) – 3) леммы 1, то верна формула*

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v_1v_2)) = \sigma(v_1; v_2)\chi(\overline{\Omega}_-(v_1)) + \chi(\overline{\Omega}_-(v_2)), \tag{15}$$

где

$$\sigma(v_1; v_2) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Omega_-(v_1) \subset \Omega_+(v_2), \\ (-1)^n, & \text{если} \quad \Omega_-(v_1) \subset \Omega_-(v_2). \end{cases}$$

Формулу (15) обобщим для конечного набора положительно однородных функций $v_i \in C^1(\mathrm{R}^n\backslash\{0\}; \mathrm{R}^1)$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяющих условиям

4) $\nabla v_i(x) \neq 0$ $\forall x \neq 0$, $i = \overline{1, N}$;

5) $|v_i(x)| + |v_j(x)| > 0$ $\forall x \neq 0$, $i \neq j$;

6) $\forall i = \overline{1, N-1}$ либо $\Omega_-(v_i) \subset \Omega_+(v_{i+1} \cdot \ldots \cdot v_N)$, либо $\Omega_-(v_i) \subset \Omega_-(v_{i+1} \cdot \ldots \cdot v_N)$.

Применяя формулу (15) к парам функций $(v_i, v_{i+1} \cdot \ldots \cdot v_N)$, $i = \overline{1, N-1}$, получим

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v_1 \cdot \ldots \cdot v_N)) = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma(v_i; v_{i+1} \cdot \ldots \cdot v_N)\chi(\overline{\Omega}_-(v_i)) + \chi(\overline{\Omega}_-(v_N)). \tag{16}$$

В частности,

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v_1 \cdot \ldots \cdot v_N)) = \sum_{i=1}^{N} \chi(\overline{\Omega}_-(v_i)), \qquad \text{если} \quad n - \text{четно}.$$

Аналогично работе [11, Lemma 2] можно показать, что любую положительно однородную (порядка $m > 0$) функцию $v \in C^1(\mathrm{R}^n\backslash\{0\}; \mathrm{R}^1)$, градиент которой не обращается в ноль, можно представить в виде произведения $v(x) = |x|^{m-N}v_1(x) \cdot \ldots \cdot v_N(x)$, где $N = p_0(v)$, функции v_i, $i = \overline{1, N}$ положительно однородные порядка 1 и удовлетворяют условиям 4) – 6), а соответствующие им множества $\Omega_0(v_i)$, $i = \overline{1, N}$ совпадают со связными компонентами $\Omega_0(v)$.

В качестве приложения формулы (1) исследуем существование периодического решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = \nabla v(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathrm{R}^n, \tag{17}$$

где функция $v \in C^1(\mathrm{R}^n \backslash \{0\}; \mathrm{R}^1)$ положительно однородная порядка $m + 1 > 2$, $\nabla v(x) \neq 0$ $\forall x \neq 0$, $f : \mathrm{R}^{1+n} \mapsto \mathrm{R}^n$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям

$$f(t + \omega, x) \equiv f(t, x), \qquad |y|^{-m} \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |f(t, y)| \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to \infty. \tag{18}$$

Вектор-функцию $x(t) \in C^1([0, \omega], \mathrm{R}^n)$ называем ω-периодическим решением системы уравнений (17), если она удовлетворяет данной системе уравнений при $t \in (0, \omega)$ и условию $x(0) = x(\omega)$. Такое решение при ω-периодическом продолжении на $(-\infty, +\infty)$ удовлетворяет системе уравнений (17) при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема 2. *Система уравнений (17) имеет ω-периодическое решение при любом непрерывном отображении f, удовлетворяющем условиям (18), тогда и только тогда, когда*

$$\chi(\overline{\Omega}_-(v)) \neq 1. \tag{19}$$

Доказательство. Достаточность условия (19) следует из формулы (1) и теоремы 41.8, доказанной в [2, с. 334]. Действительно, из условия (19) и формулы (1) следует, что $\gamma(\nabla v, S^{n-1}) \neq 0$. Отсюда, применяя теорему 41.8, получаем, что у системы уравнений (17) есть по крайней мере одно ω-периодическое решение.

Необходимость условия (19) докажем по аналогии с работой [4]. Пусть $\chi(\overline{\Omega}_-(v)) = 1$. Тогда по формуле (1) имеем $\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 0$. Построим удовлетворяющее условиям (18) отображение f, при котором система уравнений (17) не имеет периодических решений. Для этого воспользуемся теоремой 5.2 из [2, гл. 1, §5], в соответствии с которой из равенства $\gamma(\nabla v, S^{n-1}) = 0$ вытекает, что векторное поле ∇v можно непрерывно продолжить без нулей внутри сферы S^{n-1} некоторой формулой $Q(y)$: $\nabla v(y) = Q(y)$ при $|y| = 1$ и $Q(y) \neq 0$ при $|y| < 1$.

Рассмотрим систему уравнений

$$x'(t) = \nabla v(x(t)) + g(x(t)), \quad x(t) \in \mathrm{R}^n, \tag{20}$$

где отображение g определено формулой

$$g(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geqslant 1, \\ Q(y) - \nabla v(y), & |y| < 1. \end{cases}$$

Очевидно, g удовлетворяет условиям (18) и

$$\nabla v(y) + g(y) \neq 0 \quad \forall y \in \mathrm{R}^n. \tag{21}$$

Верна следующая лемма.

Лемма 2. *При некотором $\omega_0 > 0$ система уравнений (20) не имеет ω_0-периодических решений.*

Предположим, что такого $\omega_0 > 0$ не существует. Тогда найдется последовательность периодических решений $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ системы уравнений (20) с периодами $\omega_k = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу периодичности решений имеем:

$$\frac{1}{\omega_k} \int_0^{\omega_k} \langle \nabla v(x_k(t)) + g(x_k(t)), y \rangle dt = 0 \quad \forall y \in \mathrm{R}^n, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

Если вектор-функции $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ равномерно ограничены

$$\sup_{k=1,2,\ldots} \max_{t \in \mathrm{R}} |x_k(t)| < \infty, \tag{23}$$

то они, как решения системы уравнения (20), равностепенно непрерывны. Без ограничения общности, можно считать что последовательность вектор-функций $x_k(t)$ равномерно сходится к функции $x_0(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в (22), получим

$$\langle \nabla v(x_0(0)) + g(x_0(0)), y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathrm{R}^n,$$

что противоречит (21). Таким образом, для завершения доказательства леммы остается показать оценку (23).

Предположим, что оценка (23) неверна. Тогда можно считать, что

$$r_k := \max_{t \in \mathrm{R}} |x_k(t)| = |x_k(t_k)| \to \infty \quad \text{ при } \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим вектор-функции $z_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{1-m} t)$, $t \in \mathrm{R}$, $k = 1, 2, \ldots$. Для них имеем:

$$z_k'(t) = \nabla v(z_k(t)) + r_k^{-m} g(z_k(t)), \quad |z_k(t)| \leqslant |z_k(0)|, \quad t \in \mathrm{R}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда, переходя к пределу, получим:

$$z_0'(t) = \nabla v(z_0(t)), \quad |z_0(t)| \leqslant |z_0(0)|, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Существование такой вектор-функции $z_0(t)$ невозможно из-за того, что $\nabla v(y) \neq 0$ при $y \neq 0$. Действительно, рассматривая функцию $\xi(t) = v(z_0(t))$ имеем: $\xi(t)$ непрерывна и ограничена на R, $\xi'(t) = |\nabla v(z_0(t))|^2$, $\xi'(0) = |\nabla v(z_0(0))|^2 > 0$, следовательно, существуют конечные пределы $\xi(t) \to \xi_-$ при $t \to -\infty$ и $\xi(t) \to \xi_+$ при $t \to +\infty$, где $\xi_- < \xi_+$, а также существуют последовательности $\tau_k \to -\infty$ и $s_k \to +\infty$, вдоль которых $\xi'(t)$ стремится к нулю

$$\xi'(\tau_k) = |\nabla v(z_0(\tau_k))|^2 \to 0, \qquad \xi'(s_k) = |\nabla v(z_0(s_k))|^2 \to 0.$$

Отсюда выводим: $z_0(\tau_k) \to 0$, $z_0(s_k) \to 0$ и $\xi_- = \xi_+ = 0$ — противоречие. Лемма 2 доказана.

В системе уравнений (20) произведем замену $z(t) = \lambda_0 x(\lambda_0^{m-1} t)$, где $\lambda_0 = (\omega_0/\omega)^{1/(m-1)}$. Тогда получаем систему уравнений

$$z'(t) = \nabla v(z(t)) + \lambda_0^m g(\lambda_0^{-1} z(t)), \quad z(t) \in \mathrm{R}^n. \tag{24}$$

Всякому ω-периодическому решению системы уравнений (24), согласно произведенной замене, соответствует ω_0-периодическое решение системы уравнений (20). Поэтому в силу леммы 2 система уравнений (24) не имеет ω-периодических решений. Таким образом, при $f(y) = \lambda_0^m g(\lambda_0^{-1} y)$ система уравнений (17) не имеет ω-периодических решений.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Наука, 1966. — 330 с.

2. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

3. Мухамадиев, Э. Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Докл. РАН. — 1996. — Т. 351, № 5. — С. 596–598.

4. Мухамадиев, Э. Критерии существования периодических и ограниченных решений для трехмерных систем дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 1. — С. 157–172.

5. Мухамадиев, Э. Об априорной оценке и существовании периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов // Изв. вузов. Матем. — 2022. — № 4. — С. 37–48.

6. Арнольд, В. И. Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейник и смешанные структуры Ходжа / В. И. Арнольд // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 1. — С. 1–14.

7. Милнор, Дж. Дифференциальная топология. Начальный курс / Дж. Милнор, А. Уоллес. — М. : Мир, 1972. — 277 с.

8. Дольд, А. Лекции по алгебраической топологии / А. Дольд. — М. : Мир, 1976. — 463 с.

9. Мухамадиев, Э. К вопросу о вычислении вращения конечномерного векторного поля / Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов // Изв. вузов. Матем. — 2023. — № 6. — С. 67–73.

10. Введение в топологию / Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко. — М. : URSS, 2014. — 416 с.

11. Mukhamadiev, E. On the homotopy classification of positively homogeneous functions of three variables / E. Mukhamadiev, A. N. Naimov // Issues Anal. — 2021. — V. 10, № 2. — P. 67–78.

REFERENCES

1. Krasnoselsky M.A. Path shift operator differential equations. [Krasnosel'skij M.A. Operator sdviga po trayektoriyam differentsial'nykh uravneniy]. Moscow, Nauka, 1966, 330 p.

2. Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P. Geometric Methods of Non-linear Analysis. [Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P. Geomtricheskie metodi nelineinogo analiza]. Moscow, Nauka, 1975, 512 p.

3. Mukhamadiev E. Bounded solutions and homotopy invariants of systems of non-linear differential equations. [Muhamadiev E. Ogranichennye resheniya i gomotopicheskie invarianty sistem nelinejnyh differencial'nyh uravnenij]. *Doklady RAN — Reports of the Russian Academy of Sciences*, 1996, vol. 351, no. 5, pp. 596–598.

4. Mukhamadiev E., Naimov A.N. Criteria for the existence of periodic and bounded solutions of three-dimensional systems of differential equations. [Muhamadiev E., Naimov A.N. Kriterii sushchestvovaniya periodicheskih i ogranichennyh reshenij dlya trekhmernyh sistem differencial'nyh uravnenij]. *Tr. IMM UrO RAN — Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 157–172.

5. Mukhamadiev E., Naimov A.N. On a Priori Estimate and Existence of Periodic Solutions for a Class of Systems of Non-linear Ordinary Differential Equations. [Muhamadiev E., Naimov A.N. Ob apriornoj ocenke i sushchestvovanii periodicheskih reshenij dlya odnogo klassa sistem nelinejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika — Izv. vuzov. Matem.*, 2022, no. 4, pp. 37–48.

6. Arnol'd V.I. Index of a singular point of a vector field, the Petrovskii–Oleinik inequality, and mixed Hodge structures. [Arnol'd V.I. Indeks osoboj tochki vektornogo polya, neravenstva Petrovskogo–Olejnik i smeshannye struktury Hodzha]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1978, vol. 12, no. 1, pp. 1–14.

7. Milnor J., Wallace A. Differential topology. First Steps. [Milnor Dzh., Uolles A. Differentsial'naya topologiya. Nachal'nyi kurs]. Moscow, Mir, 1972, 277 p.

8. Dold A. Lectures on algebraic topology. [Dol'd A. Lektsii po algebraicheskoy topologii]. Moscow, Mir, 1976, 463 p.

9. Mukhamadiev E., Naimov A.N. To the Calculation of the Mapping Degree of Finite Dimensional Vector Field. [Muhamadiev E., Naimov A.N. K voprosu o vychislenii vrashcheniya

konechnomernogo vektornogo polya]. *Izv. vuzov. Matem. — Russian Mathematics*, 2023, no. 6, pp. 67–73.

10. Borisovich Yu.G., Bliznyakov N.M., Izrailevich Ya.A., Fomenko T.N. Introduction to Topology. [Borisovich YU.G., Bliznyakov N.M., Izrailevich YA.A., Fomenko T.N. Vvedenie v topologiyu]. Moscow: URSS, 2014, 416 p.

11. Mukhamadiev E., Naimov A.N. On the homotopy classification of positively homogeneous functions of three variables. Issues Anal., 2021, vol. 10, no. 2, pp. 67–78.

Мухамадиев Э., доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики, Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Mukhamadiev E., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vologda State University, Vologda, Russia
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Наимов А. Н., доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики, Вологодский государственный университет, профессор кафедры информатики и математики, Вологодский институт права и экономики ФСИН России, Вологда, Россия
E-mail: naimovan@vogu35.ru

Naimov A. N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vologda State University, Professor of the Department of Informatics and Mathematics, Vologda Institute of Law and Economics of the Federal Penitentiary Service of Russia, Vologda, Russia
E-mail: naimovan@vogu35.ru