

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛАГЕРРА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В. Г. Курбатов, Е. Д. Хороших

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.02.2024 г.

Аннотация. Импульсной характеристикой линейного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$ мы называем функцию $t \mapsto e^{At}$, $t > 0$. Предполагается, что собственные значения матрицы A лежат в открытой левой полуплоскости. Рассматривается задача приближенного представления импульсной характеристики путем разложения её в ряд по функциям Лагерра. Обсуждается оптимальный выбор параметра масштабирования многочленов Лагерра.

Ключевые слова: многочлены Лагерра, ортогональные ряды, импульсная характеристика, матричная экспонента, оптимизация.

APPLICATION OF THE LAGUERRE FUNCTIONS FOR CALCULATING THE IMPULSE RESPONSE

V. G. Kurbatov, E. D. Khoroshikh

Abstract. We call the function $t \mapsto e^{At}$, $t > 0$, the impulse response of the linear differential equation $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$. It is assumed that the eigenvalues of the matrix A lie in the open left half plane. The problem of approximate representation of the impulse response by means of the expansion into the Laguerre series is considered. The optimal choice of the scaling parameter of the Laguerre polynomials is discussed.

Keywords: Laguerre polynomials, orthogonal series, impulse response, matrix exponential, optimization.

ВВЕДЕНИЕ

Импульсная характеристика $H_A(t) = e^{At}$, $t > 0$, линейного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$ с матрицей A размера $M \times M$ представляет собой матричнозначную функцию того же размера, каждый элемент которой является линейной комбинацией функций вида $t \mapsto t^j e^{\lambda_k t}$. Тем самым, при больших M полная импульсная характеристика представляет собой очень громоздкое выражение. Одним из способов борьбы с этим неудобством является приближение импульсной характеристики более простой функцией; в настоящей работе для этой цели используется частичная сумма ряда Лагерра. Функции Лагерра естественным образом зависят от параметра масштабирования (сжатия-растяжения) τ . Изменение τ влияет на скорость сходимости ряда и тем самым естественно возникает задача оптимального выбора τ ; по поводу известных результатов в этом направлении см., например, работы [6], [9], [10], [11], [12], [13] и ссылки в них.

В настоящей работе предлагается алгоритм выбора τ , близкого к оптимальному, и вычисления оценки точности, которую это τ обеспечивает. Этот алгоритм частично аналитический (формульный) и частично численный (компьютерный). Для компьютерных экспериментов применялся пакет 'Mathematica' [14], [2].

1. ФУНКЦИИ ЛАГЕРРА

Многочленами Лагерра называют [7], [8] функции

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} (t^n e^{-t})^{(n)}, \quad t \geq 0, n = 0, 1, \dots$$

Функции L_n действительно являются многочленами степени n . Известно [4, с. 59], [5, § 8], [7, теорема 5.7.1], что функции L_n образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0, \infty)$ относительно весовой функции $t \mapsto e^{-t}$:

$$\int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_m(t) dt = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, \dots,$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Пусть $\tau > 0$ — произвольное число; оно играет роль масштаба времени. Функции

$$l_{n,\tau}(t) = \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} L_n(\tau t), \quad t \geq 0, n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

будем называть *функциями Лагерра*. Легко видеть, что они также образуют ортонормированный базис в $L_2[0, \infty)$, теперь уже без веса:

$$\int_0^\infty l_{n,\tau}(t) l_{m,\tau}(t) dt = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, \dots$$

2. РЯД ЛАГЕРРА ДЛЯ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

Обозначим через $\mathbb{C}^{M \times N}$ линейное пространство всех комплексных матриц размера $M \times N$, $\mathbf{1} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ означает единичную матрицу.

Для матрицы $C = \{C_{ij}\} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ обозначим через $\|C\|_{2 \rightarrow 2}$ норму, индуцированную евклидовой нормой на $\mathbb{C}^M$, а через

$$\|C\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |C_{ij}|^2} \quad (2)$$

— норму Фробениуса [3, с. 34]. Легко показать, что

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_{2 \rightarrow 2} \cdot \|B\|_F, \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \cdot \|B\|_{2 \rightarrow 2}, \quad \|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \cdot \|x\|_2.$$

Обозначим через $\sigma(C)$ спектр матрицы C . Если не оговорено противное, все матрицы $C \in \mathbb{C}^{M \times M}$ рассматриваются с нормой Фробениуса.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{M \times M}$ — заданная матрица. Предполагается, что A *устойчива*, т. е. собственные значения A лежат в открытой левой полуплоскости. Рассмотрим функцию

$$H_A(t) = e^{At}, \quad t > 0.$$

Будем называть H_A *импульсной характеристикой* дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t).$$

Поскольку функции Лагерра (1) образуют ортонормированный базис в $L_2[0, \infty)$, импульсная характеристика H_A раскладывается в сходящийся по норме L_2 ряд Лагерра

$$H_A = \sum_{n=0}^{\infty} R_{n,\tau,A} l_{n,\tau},$$

где

$$R_{n,\tau,A} = \int_0^\infty H_A(t) l_{n,\tau}(t) dt. \quad (3)$$

Поскольку H_A — линейная комбинация функций вида $t \mapsto t^j e^{\lambda_k t}$, напоминающих $l_{n,\tau}$, естественно ожидать, что ряд Лагерра сходится достаточно быстро и поэтому его N -я частичная сумма

$$H_{N,\tau,A}(t) = \sum_{n=0}^N R_{n,\tau,A} l_{n,\tau}(t) \quad (4)$$

с небольшим N хорошо приближает H_A . В то же время понятно, что скорость сходимости ряд Лагерра зависит от параметра τ .

Целью работы является нахождение τ , для которого величина (при заданном N)

$$\|H_A - H_{N,\tau,A}\|_{L_2[0,\infty)} = \sqrt{\int_0^\infty \|H_A(t) - H_{N,\tau,A}(t)\|_F^2 dt}$$

является близкой к наименьшей и которое тем самым целесообразно использовать для приближения импульсной характеристики частичной суммой (4) ряда Лагерра.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛАГЕРРА

Для $\operatorname{Re} \lambda < 0$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$h_\lambda(t) = e^{\lambda t}, \quad t > 0.$$

Наш интерес к функции h_λ объясняется следующим. Если λ — собственное значение матрицы A (напомним, что $\operatorname{Re} \lambda < 0$), а v — соответствующий собственный вектор, то функция

$$x_\lambda(t) = H_A(t)v$$

является решением дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$ и может быть представлена в виде

$$x_\lambda(t) = h_\lambda(t)v.$$

Обозначим через $r_{n,\tau,\lambda}$ коэффициенты Фурье функции h_λ в ортонормированном базисе $l_{n,\tau}$:

$$r_{n,\tau,\lambda} = \int_0^\infty h_\lambda(t) l_{n,\tau}(t) dt = \int_0^\infty e^{\lambda t} l_{n,\tau}(t) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0. \quad (5)$$

Предложение 1. Пусть $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Тогда

$$r_{n,\tau,\lambda} = -\frac{2\sqrt{\tau}(2\lambda + \tau)^n}{(2\lambda - \tau)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Сначала посчитаем преобразование Лапласа функции $l_{n,\tau}(t)$, пользуясь свойствами преобразования Лапласа

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

Напомним эти свойства [1, с. 53]:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_0 t} &\doteq \frac{1}{\lambda - \lambda_0}, & f(\alpha t) &\doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \\ f^{(n)}(t) &\doteq \lambda^n F(\lambda), & t^n f(t) &\doteq (-1)^n F^{(n)}(\lambda), \\ e^{\lambda_0 t} f(t) &\doteq F(\lambda - \lambda_0), & f(t - t_0) &\doteq e^{-\lambda t_0} F(\lambda). \end{aligned}$$

Имеем при $\operatorname{Re} \lambda > 0$

$$\begin{aligned} e^{-t} &\doteq \frac{1}{\lambda + 1}, \\ t^n e^{-t} &\doteq (-1)^n \left(\frac{1}{\lambda + 1} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(\lambda + 1)^{n+1}} = \frac{n!}{(\lambda + 1)^{n+1}}, \\ (t^n e^{-t})^{(n)} &\doteq \frac{n! \lambda^n}{(\lambda + 1)^{n+1}}, \\ (t^n e^{-t})^{(n)} \Big|_{t \rightarrow \tau t} &\doteq \frac{1}{\tau} \frac{n! (\lambda/\tau)^n}{(\lambda/\tau + 1)^{n+1}} = \frac{n! \lambda^n}{(\lambda + \tau)^{n+1}}, \\ e^{\tau t/2} (t^n e^{-t})^{(n)} \Big|_{t \rightarrow \tau t} &\doteq \frac{n! (\lambda - \tau/2)^n}{((\lambda - \tau/2) + \tau)^{n+1}} = \frac{n! (\lambda - \tau/2)^n}{(\lambda + \tau/2)^{n+1}}, \\ l_{n,\tau}(t) = \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} \frac{e^{\tau t}}{n!} (t^n e^{-t})^{(n)} \Big|_{t \rightarrow \tau t} &\doteq \sqrt{\tau} \frac{(\lambda - \tau/2)^n}{(\lambda + \tau/2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} l_{n,\tau}(t) dt = \sqrt{\tau} \frac{(\lambda - \tau/2)^n}{(\lambda + \tau/2)^{n+1}}.$$

Отсюда для интересующего нас интеграла (5) при $\operatorname{Re} \lambda < 0$ получаем

$$\int_0^\infty e^{\lambda t} l_{n,\tau}(t) dt = \sqrt{\tau} \frac{(-\lambda - \tau/2)^n}{(-\lambda + \tau/2)^{n+1}} = -\sqrt{\tau} \frac{(\lambda + \tau/2)^n}{(\lambda - \tau/2)^{n+1}}. \quad \square$$

Следствие 1. Пусть $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Тогда коэффициенты $r_{n,\tau,\lambda}$ могут быть вычислены рекуррентно:

$$r_{0,\tau,\lambda} = -\frac{2\sqrt{\tau}}{2\lambda - \tau}, \quad r_{n+1,\tau,\lambda} = \frac{2\lambda + \tau}{2\lambda - \tau} r_{n,\tau,\lambda}.$$

Доказательство. Следует из предложения 1. $\square$

Предложение 2. Пусть спектр $\sigma(A)$ матрицы A лежит в левой полуплоскости. Тогда коэффициенты $R_{n,\tau,A}$ (см. формулу (3)) являются результатом подстановки матрицы A в функцию $\lambda \mapsto r_{n,\tau,\lambda}$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}_0$ и $\tau > 0$. Для краткости, положим $f(\lambda) = r_{n,\tau,\lambda}$. Из предложения 1 ясно, что f является аналитической функцией в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Вспомним, что

$$r_{n,\tau,\lambda} = \int_0^\infty h_\lambda(t) l_{n,\tau}(t) dt = \int_0^\infty e^{\lambda t} l_{n,\tau}(t) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0.$$

Продифференцируем данную формулу

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{n,\tau,\lambda}}{\partial \lambda} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{\lambda t} l_{n,\tau}(t)) dt = \\ &= \int_0^\infty l_{n,\tau}(t) \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda t} dt = \\ &= \int_0^\infty l_{n,\tau}(t) t e^{\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Точно так же доказывается, что

$$\frac{\partial^j r_{n,\tau,\lambda}}{\partial \lambda^j} = \int_0^\infty l_{n,\tau}(t) t^j e^{\lambda t} dt.$$

Напомним [3, следствие 3.32], что для любой квадратной матрицы A

$$f(A) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{w_k-1} \frac{\partial^j f}{\partial \lambda^j}(\lambda_k) \frac{N_k^j}{j!}, \quad (6)$$

где λ_k — собственные числа матрицы A , w_k — алгебраическая кратность λ_k и N_k — нильпотентные матрицы. В частности, $N_k^0 = P_k$ — спектральные проекторы. Если все собственные значения простые, то

$$f(A) = \sum_{k=1}^M f(\lambda_k) P_k.$$

Для функции $\lambda \mapsto e^{\lambda t}$ формула (6) принимает вид

$$e^{At} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{w_k-1} t^j e^{\lambda_k t} \frac{N_k^j}{j!}. \quad (7)$$

В частности, если все собственные значения простые, то

$$e^{At} = \sum_{k=1}^M e^{\lambda_k t} P_k.$$

Из (7) и (3) следует, что

$$\begin{aligned} R_{n,\tau,A} &= \int_0^\infty e^{At} l_{n,\tau}(t) dt = \int_0^\infty \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{w_k-1} t^j e^{\lambda_k t} \frac{N_k^j}{j!} l_{n,\tau}(t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{w_k-1} \frac{N_k^j}{j!} \int_0^\infty t^j e^{\lambda_k t} l_{n,\tau}(t) dt = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{w_k-1} \frac{N_k^j}{j!} \frac{\partial^j r_{n,\tau,\lambda_k}}{\partial \lambda^j}, \end{aligned}$$

а это выражение в силу (6) равно функции $\lambda \mapsto r_{n,\tau,\lambda}$ от матрицы A . $\square$

Следствие 2. Пусть спектр матрицы A лежит в левой полуплоскости. Тогда коэффициенты $R_{n,\tau,A}$ могут быть вычислены рекуррентно:

$$R_{0,\tau,A} = -2\sqrt{\tau}(2A - \tau \mathbf{1})^{-1}, \quad R_{n+1,\tau,A} = (2A + \tau \mathbf{1})(2A - \tau \mathbf{1})^{-1} R_{n,\tau,A}.$$

Следствие 2 удобно использовать для вычисления $R_{n,\tau,A}$. После того, как матрицы $R_{n,\tau,A}$ вычислены, можно выписать приближение

$$H_{N,\tau,A}(t) \approx \sum_{n=0}^N R_{n,\tau,A} l_{n,\tau}(t).$$

4. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Для $\operatorname{Re} \lambda < 0$ и $N \in \mathbb{N}$ обозначим через $\zeta(N, \tau, \lambda)$ квадрат точности приближения функции h_λ ее N -й частичной суммой ряда Лагерра по L_2 -норме:

$$\zeta(N, \tau, \lambda) = \int_0^\infty \left| e^{\lambda t} - \sum_{n=0}^N r_{n, \tau, \lambda} l_{n, \tau}(t) \right|^2 dt. \quad (8)$$

Данную формулу можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \zeta(N, \tau, \lambda) &= \left\| h_\lambda - \sum_{n=0}^N r_{n, \tau, \lambda} l_{n, \tau} \right\|_{L_2}^2 = \\ &= \left\| \sum_{n=N+1}^\infty r_{n, \tau, \lambda} l_{n, \tau} \right\|_{L_2}^2 = \sum_{n=N+1}^\infty |r_{n, \tau, \lambda}|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Предложение 3. Пусть $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Тогда

$$\zeta(N, \tau, \lambda) = \frac{4\tau}{|2\lambda - \tau|^2 - |2\lambda + \tau|^2} \cdot \left| \frac{2\lambda + \tau}{2\lambda - \tau} \right|^{2N+2}.$$

Доказательство. Воспользуемся предложением 1, равенством (9) и формулой для вычисления суммы геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \zeta(N, \tau, \lambda) &= \sum_{n=N+1}^\infty |r_{n, \tau, \lambda}|^2 = \sum_{n=N+1}^\infty \left| -\frac{2\sqrt{\tau}(2\lambda + \tau)^n}{(2\lambda - \tau)^{n+1}} \right|^2 = \\ &= \sum_{n=N+1}^\infty \left| \frac{4\tau(2\lambda + \tau)^{2n}}{(2\lambda - \tau)^{2n+2}} \right| = \frac{4\tau}{|2\lambda - \tau|^2} \cdot \sum_{n=N+1}^\infty \left| \frac{(2\lambda + \tau)}{(2\lambda - \tau)} \right|^{2n} = \\ &= \frac{4\tau}{|2\lambda - \tau|^2} \cdot \frac{\left| \frac{2\lambda + \tau}{2\lambda - \tau} \right|^{2N+2}}{1 - \left| \frac{2\lambda + \tau}{2\lambda - \tau} \right|^2} = \\ &= \frac{4\tau}{|2\lambda - \tau|^2 - |2\lambda + \tau|^2} \cdot \left| \frac{2\lambda + \tau}{2\lambda - \tau} \right|^{2N+2}. \quad \square \end{aligned}$$

Аналог следующего утверждения получен в [10], [11].

Следствие 3. Для коэффициентов (5) имеем

$$\frac{\partial l_{n, \tau}}{\partial \tau}(t) = d_{n+1} l_{n+1, \tau}(t) - d_n l_{n-1, \tau}(t), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $l_{-1, \tau}(t) = 0$ и

$$d_0 = 0, \quad d_n = \frac{n}{2\tau}.$$

Доказательство. Продифференцируем формулу (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{n, \tau}}{\partial \tau}(t) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} L_n(\tau t) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\tau}} e^{-\tau t/2} L_n(\tau t) - \frac{t}{2} \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} L_n(\tau t) + \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} \frac{\partial}{\partial \tau} L_n(\tau t) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} - t \right) \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} L_n(\tau t) + \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} \frac{\partial}{\partial \tau} L_n(\tau t). \end{aligned}$$

В силу формулы [7, формула (5.1.14)], [8, формула (27), с. 226]

$$\frac{\partial}{\partial t} L_n(t) = \frac{1}{t} (nL_n(t) - nL_{n-1}(t)),$$

которая в нашем случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L_n(\tau t) = \frac{1}{\tau} (nL_n(\tau t) - nL_{n-1}(\tau t)),$$

перепишем это так:

$$\frac{\partial l_{n,\tau}}{\partial \tau}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} - t \right) \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} L_n(\tau t) + e^{-\tau t/2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} (nL_n(\tau t) - nL_{n-1}(\tau t)).$$

Или

$$\frac{\partial l_{n,\tau}}{\partial \tau}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} e^{-\tau t/2} ((1 + 2n - \tau t)L_n(\tau t) - 2nL_{n-1}(\tau t)).$$

Далее с помощью формулы [7, формула (5.1.10)]

$$(2n + 1 - t)L_n(t) = (n + 1)L_{n+1}(t) + nL_{n-1}(t),$$

которая примет вид

$$(2n + 1 - \tau t)L_n(\tau t) = (n + 1)L_{n+1}(\tau t) + nL_{n-1}(\tau t),$$

перепишем это так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{n,\tau}}{\partial \tau}(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\tau}} e^{-\tau t/2} ((n + 1)L_{n+1}(\tau t) + nL_{n-1}(\tau t) - 2nL_{n-1}(\tau t)) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\tau}} e^{-\tau t/2} ((n + 1)L_{n+1}(\tau t) - nL_{n-1}(\tau t)) = \\ &= \frac{n + 1}{2\tau} \cdot \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} L_{n+1}(\tau t) - \frac{n}{2\tau} \cdot \sqrt{\tau} e^{-\tau t/2} L_{n-1}(\tau t) = \\ &= d_{n+1} l_{n+1,\tau}(t) - d_n l_{n-1,\tau}(t). \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 4. Для коэффициентов Лагерра (5) имеем

$$\frac{\partial r_{n,\tau,\lambda}}{\partial \tau} = d_{n+1} r_{n+1,\tau,\lambda} - d_n r_{n-1,\tau,\lambda}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Следует из (5) и следствия 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{n,\tau,\lambda}}{\partial \tau} &= \int_0^\infty h_\lambda(t) \frac{\partial l_{n,\tau}(t)}{\partial \tau} dt = \\ &= \int_0^\infty h_\lambda(t) (d_{n+1} l_{n+1,\tau}(t) - d_n l_{n-1,\tau}(t)) dt = \\ &= d_{n+1} \int_0^\infty h_\lambda(t) l_{n+1,\tau}(t) dt - d_n \int_0^\infty h_\lambda(t) l_{n-1,\tau}(t) dt = \\ &= d_{n+1} r_{n+1,\tau,\lambda} - d_n r_{n-1,\tau,\lambda}. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 5. Для функции (8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta(N, \tau, \lambda)}{\partial \tau} &= -d_{N+1} (r_{N+1,\tau,\lambda} \overline{r_{N,\tau,\lambda}} + \overline{r_{N+1,\tau,\lambda}} r_{N,\tau,\lambda}) = \\ &= -2d_{N+1} \operatorname{Re}(r_{N+1,\tau,\lambda} \overline{r_{N,\tau,\lambda}}). \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (9):

$$\zeta(N, \tau, \lambda) = \sum_{n=N+1}^{\infty} |r_{n, \tau, \lambda}|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} r_{n, \tau, \lambda} \overline{r_{n, \tau, \lambda}}.$$

Дифференцируя эту формулу, получаем

$$\frac{\partial \zeta(N, \tau, \lambda)}{\partial \tau} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\partial r_{n, \tau, \lambda}}{\partial \tau} \overline{r_{n, \tau, \lambda}} + r_{n, \tau, \lambda} \frac{\partial \overline{r_{n, \tau, \lambda}}}{\partial \tau}.$$

Теперь из следствия 4 видно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta(N, \tau, \lambda)}{\partial \tau} &= \sum_{n=N+1}^{\infty} (d_{n+1} r_{n+1, \tau, \lambda} - d_n r_{n-1, \tau, \lambda}) \overline{r_{n, \tau, \lambda}} + \\ &+ r_{n, \tau, \lambda} (d_{n+1} \overline{r_{n+1, \tau, \lambda}} - d_n \overline{r_{n-1, \tau, \lambda}}) \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} (d_{n+1} r_{n+1, \tau, \lambda} \overline{r_{n, \tau, \lambda}} - d_n \overline{r_{n, \tau, \lambda}} r_{n-1, \tau, \lambda} + \\ &+ d_{n+1} \overline{r_{n+1, \tau, \lambda}} r_{n, \tau, \lambda} - d_n r_{n, \tau, \lambda} \overline{r_{n-1, \tau, \lambda}}). \end{aligned}$$

После очевидных сокращений получается нужное представление. $\square$

Рассмотрим вначале случай, когда матрица A является диагональной.

Предложение 4. Пусть $D \in \mathbb{C}^{M \times M}$ — диагональная матрица с диагональными элементами λ_k , $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, M$. Тогда для величины

$$\|H_D - H_{N, \tau, D}\|_{L_2[0, \infty)} = \sqrt{\int_0^{\infty} \|H_D(t) - H_{N, \tau, D}(t)\|_F^2 dt}$$

имеем

$$\|H_D - H_{N, \tau, D}\|_{L_2[0, \infty)} = \sqrt{\sum_{k=0}^M \zeta(N, \tau, \lambda_k)} \leq \sqrt{M \max_k \zeta(N, \tau, \lambda_k)},$$

где ζ — функция (8).

Предположим, что матрица A диагонализуема; это значит, что существует обратимая матрица T и диагональная матрица D такие, что $A = TDT^{-1}$. В этом случае диагональные элементы D являются собственными значениями матрицы A , а столбцы T являются соответствующими собственными векторами. Матрицу D можно интерпретировать как жорданову форму матрицы A . Очевидно, для диагонализуемой матрицы A

$$\begin{aligned} H_A(t) &= e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}, & t > 0, \\ H_{N, \tau, A}(t) &= \sum_{n=0}^N TR_{n, \tau, D}T^{-1}l_{n, \tau}(t), & t > 0. \end{aligned}$$

Напомним, что в $\mathbb{C}^{M \times M}$ мы используем норму Фробениуса (2).

Теорема 5. Пусть $A \in \mathbb{C}^{M \times M}$ и λ_k , $k = 1, 2, \dots, M$, — собственные значения A . Тогда

$$\sqrt{\max_k \zeta(N, \tau, \lambda_k)} \leq \|H_A - H_{N, \tau, A}\|_{L_2[0, \infty)},$$

а при условии, что A диагонализуема —

$$\|H_A - H_{N,\tau,A}\|_{L_2[0,\infty)} \leq \kappa(T) \sqrt{\sum_{k=0}^M \zeta(N,\tau,\lambda_k)} \leq \kappa(T) \sqrt{M \max_k \zeta(N,\tau,\lambda_k)},$$

где $\kappa(T) = \|T\|_{2 \rightarrow 2} \cdot \|T^{-1}\|_{2 \rightarrow 2}$ — число обусловленности [3, с. 264] матрицы T , а ζ — функция (8).

5. ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР τ

Рассмотрим функцию

$$\rho(N,\tau) = \sum_{k=0}^M \zeta(N,\tau,\lambda_k),$$

где λ_k — собственные значения матрицы A . В силу следствия 5

$$\frac{\partial \rho(N,\tau)}{\partial \tau} = \sum_{k=0}^M -2d_{N+1} \operatorname{Re}(r_{N+1,\tau,\lambda_k} \overline{r_{N,\tau,\lambda_k}}).$$

Вычисления показывают, что (при фиксированном N) функция $\tau \mapsto \frac{\partial \rho(N,\tau)}{\partial \tau}$ является строго возрастающей. Таким образом, функция $\rho(N,\cdot)$ имеет единственный минимум. Он легко находится численно.

Точку минимума τ_0 функции $\rho(N,\cdot)$ мы рекомендуем взять в качестве (почти) оптимального значения τ , а соответствующее значение $\sqrt{\rho_{\min}}$ (посчитанное с помощью предложения 3) — использовать в качестве оценки величины $\|H_A - H_{N,\tau_0,A}\|_{L_2[0,\infty)}$ в соответствии с теоремой 5. Если величина точности $\|H_A - H_{N,\tau_0,A}\|_{L_2[0,\infty)}$ недостаточна, число N слагаемых ряда Лагерра можно увеличить. Используя предложение 3, также легко посчитать $\max_k \sqrt{\zeta(N,\tau,\lambda_k)}$, после чего это число также можно использовать для оценок в соответствии с теоремой 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кацнельсон, Б. Г. Применения математического анализа в ТФКП : учебное пособие для вузов / Б. Г. Кацнельсон, В. Г. Курбатов. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2008. — 56 с.
2. Курбатов, В. Г. Пакет “Математика” в прикладных научных исследованиях : учебное пособие / В. Г. Курбатов, В. Е. Чернов. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. — 240 с.
3. Курбатов, В. Г. Вычислительные методы спектральной теории : учебное пособие / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — 323 с.
4. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. — М.-Л. : ГИФМЛ, 1963. — 358 с.
5. Никифоров, А. Ф. Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. — М. : Наука, 1985. — 344 с.
6. Прохоров, С. А. Условие оптимальности фильтров Мейкснера / С. А. Прохоров, И. М. Куликовских // Журнал радиоэлектроники. — 2015. — № 4. — С. 1–14.
7. Сегё, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сегё. — М.-Л. : ГИФМЛ, 1962. — 500 с.
8. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1979. — 416 с.
9. Хороших, Е. Д. Разложение функции Грина задачи об ограниченных решениях в ряд по функциям Лагерра / Е. Д. Хороших // Математика, информационные технологии, приложения : сборник трудов Межвузовской научной конференции молодых ученых и студентов, Воронеж, 27 апреля 2022 г. — Воронеж, 2023. — С. 514–520.

10. Belt, H. J. W. Optimal parametrization of truncated generalized Laguerre series / H. J. W. Belt, A. C. Brinker, den // 1997 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing / The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. — V. 5. — Los Alamitos, California : IEEE Computer Society Press, 1997. — P. 3805–3808.
11. Clowes, G. J. Choice of the time-scaling factor for linear system approximation using orthonormal Laguerre functions / G. J. Clowes // IEEE Trans. Automatic Control. — 1965. — V. 10. — P. 487–489.
12. Moore, G. Orthogonal polynomial expansions for the matrix exponential / G. Moore // Linear Algebra Appl. — 2011. — V. 435, № 3. — P. 537–559.
13. Terekhov, A. V. Preconditioning for time-harmonic Maxwell's equations using the Laguerre transform / A. V. Terekhov : Novosibirsk State Technical University, 2023. — Rep. — arXiv: 2309.11023.
14. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. — New York : Wolfram Media, 2003. — 1488 p.

REFERENCES

1. Katsnelson B.G., Kurbatov V.G. Applications of calculus in complex analysis. [Kacnel'son B.G., Kurbatov V.G. Primeneniya matematicheskogo analiza v TFKP]. Voronezh : Publishing and printing center of VGU, 2008, 56 p.
2. Kurbatov V.G., Chernov W.E. 'Mathematica' package in applied scientific researchs. [Kurbatov V.G., Chernov V.E. Paket "Matematika" v prikladnyh nauchnyh issledovaniyah: uchebnoe posobie]. Voronezh: VGU Publishing House, 2016, 240 p.
3. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Computational methods of spectral theory. [Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Vychislitel'nye metody spektral'noj teorii]. Voronezh: VGU Publishing House, 2019, 323 p.
4. Lebedev N.N. Special functions and their applications. [Lebedev N.N. Special'nye funktsii i ih prilozheniya]. Moscow–Leningrad, 1963, 358 p.
5. Nikiforov A.F., Uvarov V.B. Special functions of mathematical physics: a unified introduction with applications. [Nikiforov A.F., Uvarov V.B. Special'nye funktsii matematicheskoy fiziki]. Moscow: Nauka, 1985, 344 p.
6. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. The optimality condition of the Meixner filters. [Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Uslovie optimal'nosti fil'trov Mejksnera]. *Zhurnal radioelektroniki* — *Journal of Radio Electronics*, 2015, no. 4, pp. 1–14.
7. Szegő G. Orthogonal polynomials. [Segyo G. Ortogonal'nye mnogochleny]. Moscow–Leningrad, 1962, 500 p.
8. Suetin P.K. Series of Faber polynomials. [Suetin P.K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny]. Moscow: Nauka, 1979. — 416 p.
9. Khoroshikh E.G. Expansion of the Green function of the bounded solutions problem into a series of Laguerre functions. [Horoshih E.D. Razlozhenie funktsii Grina zadachi ob ogranichennyh resheniyah v ryad po funktsiyam Lagerra]. Mathematics, information technology, applications: collection of Proceedings of the Interuniversity Scientific Conference of Young Scientists and Students, Voronezh, 27 April 2022 Voronezh : Scientific book, 2023, pp. 514–520.
10. Belt H.J.W., Brinker, den A. C. Optimal parametrization of truncated generalized Laguerre series. 1997 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., vol. 5, Los Alamitos, California : IEEE Computer Society Press, 1997, pp. 3805–3808.
11. Clowes G.J. Choice of the time-scaling factor for linear system approximation using orthonormal Laguerre functions. IEEE Trans. Automatic Control, 1965, vol. 10, pp. 487–489.
12. Moore G. Orthogonal polynomial expansions for the matrix exponential. Linear Algebra

Appl., 2011, vol. 435, no. 3, pp. 537–559.

13. Terekhov A.V. Preconditioning for time-harmonic Maxwell's equations using the Laguerre transform. Novosibirsk State Technical University, 2023, Rep. arXiv: 2309.11023.

14. Wolfram S. The Mathematica book. New York : Wolfram Media, 2003, 1488 p.

*Курбатов В. Г., доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kv51@inbox.ru*

*Kurbatov V. G., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kv51@inbox.ru*

*Хороших Е. Д., студент кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: xoroshix2002@mail.ru*

*Khoroshikh E. D., Student, Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: xoroshix2002@mail.ru*