

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ И НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

А. А. Зверев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованева, П. В. Садчиков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.10.2023 г.

Аннотация. В работе изучается краевая задача второго порядка с негладкими решениями и периодическими краевыми условиями. Такая задача моделирует деформации струнного кольца под воздействием внешней силы, заданной с помощью функции ограниченной вариации $F(x)$. Предполагается, что в произвольном множестве точек (но не более чем счетном) струнного кольца могут быть установлены упругие опоры. Также в произвольном множестве точек (но не более чем счетном) могут прикладываться сосредоточенные силы, и скачки функции $F(x)$ в соответствующих точках равняются этим силам. Следуя концепции поточечного подхода, предложенного Ю. В. Покорным, удалось получить формулу представления решения исследуемой краевой задачи в явном виде.

Ключевые слова: краевая задача, периодические краевые условия, интеграл Стильеса, функция ограниченной вариации, абсолютно-непрерывная функция.

ON THE INTEGRAL INVERTIBILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH PERIODIC CONDITIONS AND NONSMOOTH SOLUTIONS

A. A. Zverev, S. A. Shabrov, F. V. Golovaneva, P. V. Sadchikov

Abstract. In this paper we study a second-order boundary value problem with nonsmooth solutions and periodic boundary conditions. This problem models the deformation of a string ring under the influence of an external force specified by a function of bounded variation $F(x)$. It is assumed that elastic supports can be installed at an arbitrary set of points (but no more than countable) of the string ring. Also, concentrated forces can be applied at an arbitrary set of points (but no more than countable), and the jumps of the function $F(x)$ at the corresponding points are equal to these forces. Following the concept of the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokornyy, it was possible to obtain a formula for representing the solution to the investigated boundary value problem in explicit form.

Keywords: boundary value problem, periodic boundary conditions, Stieltjes integral, function of bounded variation, absolutely continuous function.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению дифференциальных уравнений с негладкими решениями посвящено большое количество работ. Особенно отметим публикации [1] – [20]. В этих работах не применяется теория обобщенных функций, а развивается поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным в [1], базирующийся на привлечении теории меры и интеграла к исследованию уравнений с

особенностями в коэффициентах и правых частях. Применяя концепцию поточечного подхода, в настоящей работе проведено исследование краевой задачи с негладкими решениями и периодическими краевыми условиями. Изучаемая задача имеет вид

$$\begin{cases} -(pu'_x)(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0) - (pu')(0), \\ u(0) = u(l), \\ u'(0) = u'(l). \end{cases} \quad (1)$$

Такая задача моделирует деформации струнного кольца под воздействием внешней силы, заданной с помощью функции $F(x)$. Здесь функция $u(x)$ определяет отклонение кольца от равновесного положения; $p(x)$ характеризует силу натяжения; $Q(x)$ описывает упругие свойства внешней среды. Предполагается, что в произвольном множестве точек (но не более чем счетном) струнного кольца могут быть установлены упругие опоры (пружины). При этом скачки функции $Q(x)$ совпадают с жесткостями соответствующих пружин. Также в произвольном множестве точек (но не более чем счетном) могут прикладываться сосредоточенные силы, и скачки функции $F(x)$ равняются этим силам.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $F(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$, причем $\inf_{[0, l]} p(x) > 0$, $p(0) = p(l)$; функция $Q(x)$ строго возрастает на $[0, l]$; функции $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ являются непрерывными в точках $x = 0$ и $x = l$. Решение задачи (1) мы ищем в классе абсолютно-непрерывных функций, производная которых имеет ограниченную вариацию на $[0, l]$.

В [20] установлены условия единственности решения задачи (1). В настоящей работе найдена формула представления решения (1).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе мы напоминаем некоторые понятия и определения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пространство $BV[0, l]$ — множество функций, каждая из которых имеет ограниченную вариацию (конечное изменение)

$$V_0^l(u) = \sup_{0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k \leq l} \sum_{i=0}^{k-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)|.$$

Любая функция $u(x)$ из $BV[0, l]$ допускает разложение Жордана $u = u_1 - u_2$, где u_1 , u_2 — неубывающие функции.

Скачки функций из BV . Для любой функции $u(x)$ из $BV[0, l]$ в каждой точке $\xi \in (0, l]$ существует левый, а в каждой точке $\xi \in [0, l)$ — правый пределы, $u(\xi - 0) = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} u(x)$ и $u(\xi + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} u(x)$. Простым скачком $u(x)$ в точке $x = \xi$ мы называем величину $\Delta u(\xi) = u(\xi + 0) - u(\xi - 0)$, полагая $u(0 - 0) = u(0)$ и $u(l + 0) = u(l)$. Говоря о простом скачке $\Delta u(\xi)$ при $0 < \xi < l$, мы игнорируем собственное значение $u(\xi)$ этой функции в точке $x = \xi$, учитывая только левое $u(\xi - 0)$ и правое $u(\xi + 0)$ предельные значения.

Всюду далее через $S(u)$ обозначается множество точек разрыва $u(x)$. Для $u(x) \in BV[0, l]$ множество $S(u)$ не более чем счетно.

Функция скачков $u_s(x)$ для $u(x)$ из $BV[0, l]$ определяется как

$$u_s(x) = \sum_{\xi \leq x} \Delta u(\xi).$$

Для любой $u(x)$ из $BV[0, l]$ разность $u_c(x) = u(x) - u_s(x)$ в каждой точке разрыва $\xi \in S(u)$ имеет одинаковые пределы $u_c(\xi - 0) = u_c(\xi + 0)$, т. е. имеет устранимый разрыв.

Интеграл Римана–Стилтьеса $\int_0^l f(x) d\mu(x)$ определяется для пары заданных на отрезке $[0, l]$ функций $f(x), \mu(x)$ предельным переходом в интегральных суммах

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)] \right). \quad (2)$$

Если при $\max(x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$ суммы (2) стремятся к некоторому пределу (не зависящему ни от способа разбиения ни от выбора точек ξ_i), то этот предел называется интегралом Римана–Стилтьеса от функции f по функции μ .

Прямо из определения следует, что оба интеграла $\int_0^l f d\mu$ и $\int_0^l \mu df$ существуют одновременно, причем их сумма равна $f(l)\mu(l) - f(0)\mu(0)$. Интеграл Стилтьеса $\int_0^l f d\mu$ гарантированно существует, если одна из функций $f(x), \mu(x)$ непрерывна, а другая имеет ограниченную вариацию.

Из определения интеграла Стилтьеса следует, что

$$\left| \int_0^l f(x) d\mu(x) \right| \leq \sup_{[0, l]} |f(x)| V_0^l(\mu).$$

Для интеграла Стилтьеса при $\mu \in BV[0, l]$ имеет место формула

$$\int_0^l f(x) d\mu(x) = \int_0^l f(x) d\mu_c(x) + \int_0^l f(x) d\mu_s(x) = \int_0^l f(x) d\mu_c(x) + \sum_{\xi \in S(\mu)} f(\xi) \Delta\mu(\xi).$$

Теорема о преобразовании меры. Для любой функции $\sigma(x)$ из $BV[0, l]$ и непрерывных функций $u(x), \varphi(x)$ верно

$$\int_0^l \varphi d\mu = \int_0^l \varphi u d\sigma,$$

где $\mu(x) = \int_0^x u d\sigma + \text{const}$.

Теорема Фубини. Пусть $A = \{(x, y) : x \in M, 0 \leq y \leq f(x)\}$, где M – μ_x -измеримое множество, $f(x, y)$ – интегрируемая функция. Обозначим

$$A_x = \{y : (x, y) \in A\},$$

где x фиксировано,

$$A_y = \{x : (x, y) \in A\},$$

где y фиксировано. Пусть меры μ_x и μ_y определены на σ -алгебрах, σ -аддитивны и полны. Обозначим $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$ и предположим, что функция $f(x, y)$ интегрируема по мере μ на множестве $A \subset X \times Y$. Тогда

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_X \left\{ \int_{A_x} f(x, y) d\mu_y \right\} d\mu_x = \int_Y \left\{ \int_{A_y} f(x, y) d\mu_x \right\} d\mu_y.$$

Абсолютно непрерывная функция. Функция u , заданная на отрезке $[0, l]$, называется абсолютно непрерывной на нем, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что какова бы ни была конечная или счетная система попарно непересекающихся интервалов (α_i, β_i) с суммой длин, меньшей δ , т.е.

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \delta,$$

выполняется неравенство

$$\sum_i |u(\beta_i) - u(\alpha_i)| < \varepsilon.$$

Теорема Лебега утверждает, что производная $v = u'$ абсолютно непрерывной функции, заданной на $[0, l]$, суммируема на этом отрезке и для каждого x ($0 \leq x \leq l$) верно равенство

$$\int_0^x v(x) dx = u(x) - u(0).$$

Пространство допустимых решений. Обозначим через E множество абсолютно непрерывных функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.1 (Теорема 1.3 из [4]) *Пространство E является полным по норме*

$$\|u\| = \sup_{[0, l]} |u(x)| + V_0^l(u').$$

Теорема 2.2 (Теорема 1.4 из [4]) *Для любой $u \in E$ верно*

$$u'(\xi + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} u'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0 + 0} \frac{u(\xi + \varepsilon) - u(\xi)}{\varepsilon} = u'_+(\xi),$$

$$u'(\xi - 0) = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} u'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0 - 0} \frac{u(\xi + \varepsilon) - u(\xi)}{\varepsilon} = u'_-(\xi).$$

Важную роль в настоящей работе будет играть уравнение

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0). \quad (3)$$

Замена привычного обыкновенного дифференциального уравнения

$$-(pu')' + qu = f$$

на (3) расширяет класс допускаемых к анализу задач, требуя при этом учета чисто математической новизны этого объекта.

Уравнение (3) содержит разрывные, вообще говоря, функции p, Q, F наряду с интегралом Стильтьеса. Сохраняя явное присутствие скалярного аргумента, уравнение (3) обнаруживает и его особые значения — это те точки, где производная $u'(x)$ и функции p, Q, F могут иметь разрыв, те значения верхнего предела в интеграле, когда этот интеграл может терять смысл. Последнее — самое коварное (с позиций привычных для элементарного анализа ассоциаций) обстоятельство, порождаемое в уравнении (3) интегралом Стильтьеса: если в (3) точка x совпадает с одной из точек ξ разрыва $Q(x)$, и если при этом $Q(\xi) \neq Q(\xi - 0)$, $Q(\xi) \neq Q(\xi + 0)$, то соответствующее значение $\int_0^\xi u(x) dQ(x)$ отлично как от $\int_0^{\xi-0} u(x) dQ(x)$, так и от $\int_0^{\xi+0} u(x) dQ(x)$, что приводит к абсурдности смысла $u'(\xi)$ в (3), ибо $u'(\xi)$ обозначает общее значение левой $u'_-(\xi)$ и правой $u'_+(\xi)$ производных. При этом каждый из символов

$\int_0^{\xi-0} u dQ$ и $\int_0^{\xi+0} u dQ$, связанных с привлечением интеграла Стильтьеса в дифференциальные уравнения, требует на самом деле дополнительных разъяснений. Например, то ли $\int_0^{\xi-0} u dQ$ обозначает интеграл по полусегменту $[0, \xi)$, то ли несобственный интеграл $\lim_{\delta \downarrow 0} \int_0^{\xi-\delta} u dQ$. Заметим, что теорема 2.2 позволяет нам отождествлять, например, несобственный интеграл $\int_0^{\xi-0} f d\mu = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{\xi-\varepsilon} f d\mu$ с собственным по полуинтервалу $[0, \xi)$, т.е. с $\int_{[0, \xi)} f d\mu$. Чтобы снять отмеченные поводы для возможных недоразумений, мы заменим особые точки парой символов $\{\xi - 0, \xi + 0\}$.

Обозначим через S множество всех точек, где $p(x), Q(x), F(x)$ имеют ненулевые простые скачки, т.е. имеют не совпадающие левые и правые пределы. Рассмотрев $[0, l]$ без S , заменим каждую точку $\xi \in S$ парой символов $\{\xi - 0, \xi + 0\}$. Будем считать, что $\xi - 0 > x$ для всех $x < \xi$ и $\xi + 0 < x$ для всех $x > \xi$. Множество, полученное из $[0, l]$ заменой точек $\xi \in S$ на соответствующие пары $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $\overline{[0, l]}_\sigma$.

Множеству $\overline{[0, l]}_\sigma$ можно дать следующее корректное определение, как одномерному метрическому пространству.

Взяв жорданово представление функций ограниченной вариации p, F в виде $p = p^+ - p^-$ и $F = F^+ - F^-$, обозначим через σ сумму неубывающих функций

$$\sigma(x) = x + p^+(x) + p^-(x) + Q(x) + F^+(x) + F^-(x).$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\sigma(x)$ имеет разрывы (полные скачки) только в точках S .

Введем на множестве $[0, l] \setminus S$ метрику $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S \neq \emptyset$, то это метрическое пространство, очевидно, не полно. Его стандартное метрическое пополнение с точностью до изоморфизма совпадает с $\overline{[0, l]}_\sigma$, индуцируя в нем топологию.

Очевидна разрывность этого пространства. Равно как и его компактность.

Мы рассматриваем уравнение (3) на множестве значений x из $\overline{[0, l]}_\sigma$, не допуская тем самым в (3) значения x из S . На $\overline{[0, l]}_\sigma$ функции $p(\cdot), Q(\cdot), F(\cdot)$ становятся непрерывными, поскольку их значения $p(\xi + 0), p(\xi - 0), Q(\xi + 0), Q(\xi - 0), F(\xi + 0), F(\xi - 0)$, бывшие в $[0, l]$ предельными, теперь оказываются собственными значениями в соответствующих точках из $\overline{[0, l]}_\sigma$.

Непрерывность рассматриваемых функций $u(\cdot)$ позволяет сохранять обычный смысл Римана–Стильтьеса для интегрального слагаемого в (3) при $x = \xi - 0$ и $x = \xi + 0$, беря в качестве собственных значения, бывшие ранее предельными.

Таким образом, уравнение (3) нами рассматривается как бы двухслойно: нижний уровень — для значений $x \in [0, l]$ при разговоре о самих решениях $u(x)$ (под знаком интеграла), и второй уровень — для значений x в тождестве (3), где x принимается из $\overline{[0, l]}_\sigma$.

Заметим, что непосредственно из (3) следует равенство

$$-p(\xi + 0)u'(\xi + 0) + p(\xi - 0)u'(\xi - 0) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi).$$

Теорема 2.3 (Теорема 1.5 [4]) Для любых чисел u_0, v_0 и для любого $x_0 \in \overline{[0, l]}_\sigma$ задача

$$\begin{cases} -(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int_0^x u dQ = 0. \quad (4)$$

Лемма 2.1. (Лемма 1.1 из [4]). Пространство решений уравнения (4) двумерно.

Предложение 2.1. (Предложение 2.2 из [4]). Пусть функции $p(x)$, $Q(x)$ непрерывны в точках $x = 0$ и $x = l$. Функция $p(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, l]$, причем $\inf_{[0, l]} p > 0$. Функция $Q(x)$ не убывает на $[0, l]$. Тогда всякое нетривиальное решение уравнения (4) имеет на $[0, l]$ не более одного нуля.

Теорема 2.4 (Теорема 2.1 из [4]) Для любых двух решений φ_1 , φ_2 уравнения (4)

$$p(x)(\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)) \equiv \text{const}$$

на $\overline{[0, l]}_\sigma$. Таким образом, $p(x)W(x) = \text{const}$, где $W(x)$ — определитель Вронского для системы функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 3.1. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1(0) = 0, \varphi_1(l) = 1; \quad \varphi_2(0) = 1, \varphi_2(l) = 0.$$

Тогда

$$\varphi_1'(0) \neq 0, \quad \varphi_1'(l) - 2\varphi_1'(0) - \varphi_2'(0) \neq 0.$$

Доказательство. Покажем сначала, что введенные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ существуют. Обозначим через $u_1(x)$ решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $u_1(0) = 0$, $u_1'(0) = 1$; $u_2(x)$ — решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $u_2(0) = 1$, $u_2'(0) = 0$. В силу теоремы 2.3 функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ существуют. В силу леммы 2.1 представим $\varphi_1(x)$ в виде $\varphi_1(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$. Тогда $\varphi_1(0) = c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0) = 0$, откуда $c_2 = 0$. Второе условие принимает вид $\varphi_1(l) = c_1 u_1(l) = 1$. В силу предложения 2.1 функция $u_1(x)$ не имеет нулей на $(0, l]$, значит $u_1(l) \neq 0$, откуда $c_1 = \frac{1}{u_1(l)}$. Аналогично доказывается существование функции $\varphi_2(x)$.

Так как $\varphi_1(0) = 0$, то в силу предложения 2.1 функция $\varphi_1(x)$ не имеет нулей на $(0, l]$. Поскольку $\varphi_1(l) = 1$, то $\varphi_1(x) > 0$ для всех $x \in (0, l]$, откуда $\varphi_1'(0) > 0$. Аналогично, в силу предложения 2.1 функция $\varphi_2(x) > 0$ для всех $x \in [0, l)$.

Докажем, что $\varphi_1'(l) - 2\varphi_1'(0) - \varphi_2'(0) \neq 0$. Предположим противное, что $\varphi_1'(l) - 2\varphi_1'(0) - \varphi_2'(0) = 0$. Тогда $p(l)(\varphi_1'(l) - 2\varphi_1'(0) - \varphi_2'(0)) = 0$ и с учетом $p(0) = p(l)$, получим $p(l)\varphi_1'(l) - 2p(0)\varphi_1'(0) - p(0)\varphi_2'(0) = 0$. Из уравнения (4) следует, что $p(l)\varphi_1'(l) = p(0)\varphi_1'(0) + \int_0^l \varphi_1 dQ$.

Значит $p(0)(\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0)) = \int_0^l \varphi_1 dQ$. Поскольку функция $Q(x)$ строго возрастает на $[0, l]$,

$\varphi_1(x) > 0$ для всех $x \in (0, l]$, то $\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) > 0$. Обозначим $\omega(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$. Функция $\omega(x)$ является решением уравнения (4), причем $\omega(x) > 0$ для всех $x \in [0, l]$. Из равенства

$p(x)\omega'(x) = p(0)\omega'(0) + \int_0^x \omega dQ$ следует, что $\omega(x)$ строго возрастает на $[0, l]$. Значит $\omega(0) < \omega(l)$.

С другой стороны, $\omega(0) = \omega(l) = 1$ в силу условий на функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Получили противоречие. Значит, $\varphi_1'(l) - 2\varphi_1'(0) - \varphi_2'(0) \neq 0$. Лемма доказана.

Теорема 3.2. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — функции, введенные в Лемме 3.1. Обозначим

$$c = \frac{1}{p(0)(\varphi_1'(l) - 2\varphi_1'(0) - \varphi_2'(0))}.$$

Тогда решение задачи (1) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) = & c\varphi_2(x) \int_0^x \left(\frac{\varphi_1(s)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} + (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) \right) dF(s) + \\ & + c\varphi_1(x) \int_0^x (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s) + \\ & + c\varphi_1(x) \int_x^l \left(\frac{\varphi_2(s)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} - (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) \right) dF(s) + \\ & + c\varphi_2(x) \int_x^l (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s). \end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, сначала, что для любой точки ξ разрыва $F(x)$ верно $u(\xi + 0) = u(\xi - 0)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} u(\xi + 0) - u(\xi - 0) = & c\varphi_2(\xi) \left(\frac{\varphi_1(\xi)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} + (\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)) \right) \Delta F(\xi) + \\ & + c\varphi_1(\xi)(\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)) \Delta F(\xi) + \\ & - c\varphi_1(\xi) \left(\frac{\varphi_2(\xi)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} - (\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)) \right) \Delta F(\xi) - \\ & - c\varphi_2(\xi)(\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)) \Delta F(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Определим $u(\xi) = u(\xi + 0) = u(\xi - 0)$.

Абсолютная непрерывность функции $u(x)$ следует из абсолютной непрерывности $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и из равенства

$$\begin{aligned} u(\beta) - u(\alpha) = & c(\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)) \int_0^\beta \left(\frac{\varphi_1(s)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} + (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) \right) dF(s) + \\ & + c(\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\alpha)) \int_0^\beta (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s) + \\ & + c(\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\alpha)) \int_\beta^l \left(\frac{\varphi_2(s)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} - (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) \right) dF(s) \\ & + c(\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)) \int_\beta^l (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s) + \\ & + c \frac{\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0)}{\varphi'_1(0)} \int_\alpha^\beta (\varphi_1(s)(\varphi_2(\alpha) - \varphi_2(s)) + \varphi_2(s)(\varphi_1(s) - \varphi_1(\alpha))) dF(s) + \end{aligned}$$

$$+2c\left(\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi_2(s)(\varphi_1(\alpha)-\varphi_1(s))+\varphi_1(s)(\varphi_2(s)-\varphi_2(\alpha)))dF(s)\right)$$

справедливого для произвольных $\alpha \leq \beta$.

Покажем, что производная $u'(x)$ функции $u(x)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} u'(x) = & c\varphi_2'(x) \int_0^x \left(\frac{\varphi_1(s)(\varphi_1'(l)-\varphi_2'(0))}{\varphi_1'(0)} + (\varphi_2(s)-\varphi_1(s)) \right) dF(s) + \\ & + c\varphi_1'(x) \int_0^x (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s) + \\ & + c\varphi_1'(x) \int_x^l \left(\frac{\varphi_2(s)(\varphi_1'(l)-\varphi_2'(0))}{\varphi_1'(0)} - (\varphi_2(s)-\varphi_1(s)) \right) dF(s) + \\ & + c\varphi_2'(x) \int_x^l (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s). \end{aligned}$$

Обозначим $\Delta_\varepsilon u = u(x+\varepsilon) - u(x)$, где $\varepsilon > 0$. Проведем доказательство для правой производной (для левой рассуждения аналогичны). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_\varepsilon u}{\varepsilon} = & \frac{c\Delta_\varepsilon \varphi_2}{\varepsilon} \int_0^{x+\varepsilon} \left(\frac{\varphi_1(s)(\varphi_1'(l)-\varphi_2'(0))}{\varphi_1'(0)} + (\varphi_2(s)-\varphi_1(s)) \right) dF(s) + \\ & + \frac{c\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\varepsilon} \int_0^{x+\varepsilon} (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s) + \\ & + \frac{c\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\varepsilon} \int_{x+\varepsilon}^l \left(\frac{\varphi_2(s)(\varphi_1'(l)-\varphi_2'(0))}{\varphi_1'(0)} - (\varphi_2(s)-\varphi_1(s)) \right) dF(s) + \\ & + \frac{c\Delta_\varepsilon \varphi_2}{\varepsilon} \int_{x+\varepsilon}^l (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s) + \\ & + c \left(2 - \left(\frac{\varphi_1'(l)-\varphi_2'(0)}{\varphi_1'(0)} \right) \right) \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)}{\varepsilon} dF(s). \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)}{\varepsilon} dF(s) \right) = 0. \quad (5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)) dF(s) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\max_{x \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)| \right) V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)| & \leq \|\varphi_1\| \cdot |\varphi_2(s) - \varphi_2(x)| + \|\varphi_2\| \cdot |\varphi_1(x) - \varphi_1(s)| \leq \\ & \leq \|\varphi_1\| \cdot \left| \int_x^s \varphi_2'(\tau) d\tau \right| + \|\varphi_2\| \cdot \left| \int_x^s \varphi_1'(\tau) d\tau \right|, \end{aligned}$$

где $\|\varphi_i\| = \max_{[0,l]} |\varphi_i(x)|$. Так как $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, то вариации φ'_1, φ'_2 ограничены и, значит, существует такая константа c_0 , что $|\varphi'_2(\tau)| \leq c_0$ и $|\varphi'_1(\tau)| \leq c_0$. Тогда

$$|\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)| \leq (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)c_0\varepsilon,$$

и значит

$$\frac{1}{\varepsilon} \max_{x \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x)\varphi_2(s) - \varphi_2(x)\varphi_1(s)| \leq (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)c_0.$$

Так как $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F) \rightarrow 0$, то мы получаем равенство (5).

Таким образом, равенство для производной доказано. Из полученного следует, что $u' \in BV[0, l]$, и значит, $u \in E$.

Заметим, что $u(0) = u(l) = c \int_0^l (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s)$. Из теоремы 2.4 с учетом условия $p(0) = p(l)$ получим, что $W(0) = W(l)$, откуда следует, что $\varphi'_2(l) = -\varphi'_1(0)$. Тогда воспользовавшись формулой для производной, имеем

$$u'(0) = u'(l) = c \int_0^l (\varphi_2(s)\varphi'_1(l) - \varphi'_1(0)\varphi_2(s) + \varphi'_1(0)\varphi_1(s) + \varphi'_2(0)\varphi_1(s)) dF(s).$$

Покажем, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению из (1). Обозначим

$$\psi_1(s) = \frac{\varphi_1(s)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} + (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)),$$

$$\psi_2(s) = \frac{\varphi_2(s)(\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0))}{\varphi'_1(0)} - (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} p(x)u'(x) &= cp(x)\varphi'_2(x) \int_0^x \psi_1(s) dF(s) + \\ &+ cp(x)\varphi'_1(x) \int_0^x (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s) + \\ &+ cp(x)\varphi'_1(x) \int_x^l \psi_2(s) dF(s) + \\ &+ cp(x)\varphi'_2(x) \int_x^l (\varphi_1(s) + \varphi_2(s)) dF(s). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &\int_0^x u(s) dQ(s) = \\ &= c \left(\int_0^x \varphi_2(s) \int_0^s \psi_1(\tau) dF(\tau) dQ(s) + \int_0^x \varphi_1(s) \int_0^s (\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)) dF(\tau) dQ(s) \right) + \\ &+ c \left(\int_0^x \varphi_1(s) \int_s^l \psi_2(\tau) dF(\tau) dQ(s) + \int_0^x \varphi_2(s) \int_s^l (\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)) dF(\tau) dQ(s) \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись теоремой Фубини, поменяем пределы интегрирования. Поменяв пределы интегрирования в первом и втором слагаемых, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^x \varphi_2(s) \int_0^s \psi_1(\tau) dF(\tau) dQ(s) + \int_0^x \varphi_1(s) \int_0^s (\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)) dF(\tau) dQ(s) = \\ & = \int_0^x \psi_1(\tau) ((p\varphi_2')(x) - (p\varphi_2')(\tau)) dF(\tau) + \int_0^x (\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)) ((p\varphi_1')(x) - (p\varphi_1')(\tau)) dF(\tau). \end{aligned}$$

Поменяв пределы интегрирования в третьем и четвертом слагаемых, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^x \varphi_1(s) \int_s^l \psi_2(\tau) dF(\tau) dQ(s) + \int_0^x \varphi_2(s) \int_s^l (\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)) dF(\tau) dQ(s) = \\ & = \int_0^x \psi_2(\tau) (p(\tau)\varphi_1'(\tau) - p(0)\varphi_1'(0)) dF(\tau) + \\ & + \int_x^l \psi_2(\tau) ((p(x)\varphi_1'(x) - p(0)\varphi_1'(0)) dF(\tau) + \\ & + \int_0^x (\varphi_2(\tau) + \varphi_1(\tau)) (p(\tau)\varphi_2'(\tau) - p(0)\varphi_2'(0)) dF(\tau) + \\ & + \int_x^l (\varphi_2(\tau) + \varphi_1(\tau)) ((p(x)\varphi_2'(x) - p(0)\varphi_2'(0)) dF(\tau). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & -p(x)u'(x) + \int_0^x u dQ = \\ & = c \left(\int_0^x (-\psi_1(\tau)p(\tau)\varphi_2'(\tau) - p(\tau)\varphi_1'(\tau)(\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)) dF(\tau) \right) + \\ & + c \left(\int_0^x (\psi_2(\tau)p(\tau)\varphi_1'(\tau) + p(\tau)\varphi_2'(\tau)(\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)) dF(\tau) \right) - \\ & - cp(0)\varphi_1'(0) \int_0^l \psi_2(\tau) dF(\tau) - cp(0)\varphi_2'(0) \int_0^l (\varphi_2(\tau) + \varphi_1(\tau)) dF(\tau) = \\ & c \int_0^x \left(\frac{\varphi_1'(l) - \varphi_2'(0)}{\varphi_1'(0)} (-p(\tau)W(\tau)) + 2p(\tau)W(\tau) \right) dF(\tau) - p(0)u'(0). \end{aligned}$$

Согласно теореме 2.4,

$$p(\tau)W(\tau) = p(0)W(0) = -p(0)\varphi_1'(0).$$

Значит,

$$-p(x)u'(x) + \int_0^x u dQ = c \int_0^x \left(\frac{\varphi_1'(l) - \varphi_2'(0)}{\varphi_1'(0)} (p(0)\varphi_1'(0)) - 2p(0)\varphi_1'(0) \right) dF(\tau) - p(0)u'(0) =$$

$$= cp(0) \int_0^x (\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0) - 2\varphi'_1(0)) dF(\tau) - p(0)u'(0) =$$

$$\frac{1}{p(0)(\varphi'_1(l) - 2\varphi'_1(0) - \varphi'_2(0))} p(0) (\varphi'_1(l) - \varphi'_2(0) - 2\varphi'_1(0)) (F(x) - F(0)) - p(0)u'(0).$$

Таким образом,

$$-p(x)u'(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0) - p(0)u'(0),$$

что и требовалось. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стильеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.
2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.
3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.
4. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.
5. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.
6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.
7. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.
8. Тимашова, Е. В. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стильеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2–1. — С. 3–8.
9. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.
10. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.
11. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Бавев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.
12. Шабров, С. А. Об одной спектральной задаче четвертого порядка с производными Радона–Никодима и со спектральным параметром / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова,

О. М. Ильина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 163–167.

13. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной разнорядковой спектральной задачи с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Головкин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

14. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи с производными по мере и спектральным параметром при второй производной / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина, М. В. Шаброва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 203–207.

15. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

16. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стильеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

17. Borodina, E. A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monotone nonlinearity / E. A. Borodina, S. A. Shabrov, M. V. Shabrova // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

18. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives / S. A. Shabrov, O. M. Ilina, E. A. Shaina, D. A. Chechin // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012044.

19. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 3. — С. 93–100.

20. О математических моделях второго порядка с производными по мере и периодическими и антипериодическими условиями / С. А. Шабров, Т. В. Гридяева, Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2023. — № 1. — С. 94–101.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornij Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennykh differentsial'nykh uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorniy Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornij Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differentsial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorniy Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornij Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nykh zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

4. Pokorniy Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm–Liouville problem for impulsive problems. [Pokornij Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snykh zadach]. *Uspechi*

matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

5. Pokorniy Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

6. Pokorniy Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokorniy Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoy teorii spektral'noy zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Pokorniy Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

8. Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma kvadrachnogo funkcionala s integralom Stilt'esa i nulevym koefficientom pri starshej proizvodnoy na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2–1, pp. 3–8.

9. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebaniy razryvnoy struny dlya sluchaya tret'ej kraevoy zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

10. Shabrov S.A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an integral Stieltjes. [Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadrachnogo funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

11. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoy matematicheskoy modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

12. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M. On one spectral problem of the fourth order with Radon–Nikodim derivatives and with spectral parameter at the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M. Ob odnoy spektral'noy zadache chetvertogo poryadka s proizvodnymi Radona–Nikodima i so spektral'nyy parametrom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 163–167.

13. Shabrov S.A., Golovko N.I. About the velocity of increase of eigenvalue of a different order spectral problem with derivative on the measure. [Shabrov S.A., Golovko N.I. O skorosti rosta sobstvennykh znacheniy odnoy raznoporyadkovoy spektral'noy zadachi s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*

— *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 186–195.

14. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M., Shabrova M.V. On the rate of growth of the eigenvalues of one spectral problem with derivatives of the measure and a spectral parameter in the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M., Shabrova M.V. O skorosti rosta sobstvennykh znacheniy odnoy spektral'noy zadachi s proizvodnymi po mere i spektral'nym parametrom pri vtoroy proizvodnoy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 203–207.

15. Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About one boundary value problem of the sixth order with a strong nonlinearity. [Borodina E.A., Golovanyova F.V., Shabrov S.A. Ob odnoy granichnoy zadache shestogo poryadka s sil'noy nelineynost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 65–69.

16. Davydova M.B., Shabrov S.A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O chisle reshenij nelinejnoy kraevoy zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

17. Borodina E.A., Shabrov S.A., Shabrova M.V. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity. *Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems*, 2020, P. 012023.

18. Shabrov S.A., Ilina O.M., Shaina E.A., Chechin D.A. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives *Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems*, 2020, P. 012044.

19. Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davidova M.B. On the number of solutions of the nonlinear boundary problem of the fourth order with derivatives by measure. [Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davydova M.B. O chisle reshenij nelinejnoy granichnoy zadachi chetvertogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 93–100.

20. Shabrov S.A., Gridiaeva T.V., Golovanova F.V., Davydova M.B. On second-order mathematical models with derivatives in measure and periodic and antiperiodic conditions. [SHabrov S.A., Gridyaeva T.V., Golovaneva F.V., Davydova M.B. O matematicheskikh modelyakh vtorogo poryadka s proizvodnymi po mere i periodicheskimi i antiperiodicheskimi usloviyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2023, no. 1, pp. 94–101.

Зверев Артем Алексеевич, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: InoplaneTemin@rambler.ru

Zverev Artem Alekseevich, Student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: InoplaneTemin@rambler.ru

Шабров Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Голованева Фаина Валентиновна, доцент кафедры теории уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovaneva Faina Valentinovna, Associate Professor of the Department of Theory of Partial Differential Equations and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: gfainav@mail.ru

Садчиков Павел Валерьевич, доцент кафедры теории уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: sadchikov.agon@yandex.ru

Sadchikov Pavel Valerievich, Associate Professor of the Department of Theory of Partial Differential Equations and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: sadchikov.agon@yandex.ru