

УДК 517.9

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Е. Ф. Дедаева, П. В. Садчиков*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 12.01.2023 г.

Аннотация. В представленной работе отображается разработка и реализация решения задачи Коши для некоторого дифференциального уравнения посредством компьютерных технологий. Преобразование исходного уравнения к модифицированному уравнению Бесселя технически воплощено в программном пакете “Wolfram Mathematica 11”. В качестве решения берутся специальные функции, которые нельзя представить через элементарные функции. Далее доказывается, что полученная система решений является фундаментальной. Находим общее решение неоднородного уравнения и, делая обратное преобразование, так как в ходе решения применяли замену переменных, приходим к решению исходной задачи.

Ключевые слова: функции Бесселя, задачи Коши, вронскиан.

COMPUTER TECHNOLOGIES FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR SOME DIFFERENTIAL EQUATION

E. F. Dedyeva, P. V. Sadchikov

Abstract. The presented work shows the development and implementation using computer technology of the solution of the Cauchy problem for some differential equation. The transformation of the original equation to the modified Bessel equation is technically implemented in the “Wolfram Mathematica 11” software package. As a solution, special functions are taken that are not expressible in terms of elementary functions. Further, it is proved that the resulting system of solutions is fundamental. We find a general solution to an inhomogeneous equation and, by doing the inverse transformation, since variable substitution was used during the solution, we find a solution to the original problem.

Keywords: Bessel function, the Cauchy problem, Vronskian.

ВВЕДЕНИЕ

Зачастую, при решении тех или иных математических задач необходимо использование универсальных математических пакетов, например, такого, как Wolfram Mathematica. Его мы сможем использовать, применяя различные преобразования, строя плоские и объемные графики или же решая уравнения различных видов и сложностей.

В этой работе строится решение задачи Коши для некоторого дифференциального уравнения с использованием программного пакета “Wolfram Mathematica 11”. Применяя его, исходное уравнение с помощью интегрального преобразования будет приведено к модифицированному уравнению Бесселя. Происходит этой с той целью, что решения многих линейных

дифференциальных уравнений второго порядка могут быть выражены через функции Бесселя, которые, как раз, и являются решениями уравнения Бесселя.

В дальнейшем будет представлен не весь код из Wolfram Mathematica целиком, а наиболее значимые и показательные его части и строки.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Поставим задачу нахождения ограниченного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[0; 12]$ (см. [1])

$$\alpha(t) (\alpha(t)u'(t))' + \sigma \alpha'(t)\alpha(t)u'(t) - u(t) = e^{-t}, \quad u(0) = 1, \quad (1)$$

где σ — положительный числовой параметр, $\alpha(t) \in C^3$ — положительная при $0 < t < \infty$ функция.

Причем $\alpha(t) \approx t^{\beta_0}$, $\beta_0 \in (0; 1)$ при $t \rightarrow 0$. Положим $\beta_0 = \frac{5}{7}$ (так же как и отрезок выбираем произвольно). Тогда $\alpha(t) \approx t^{\frac{5}{7}}$ при $t \rightarrow 0$.

Составим систему линейно независимых решений поставленной задачи (1) на ранее выбранном произвольным образом отрезке $[0, 12]$. Для этого в Wolfram Mathematica (см. [2]) осуществим интегральное преобразование в исходном уравнении:

$$y = \varphi[t_] := \int_0^t 1/(x^{\beta_0}) dx,$$

и тогда при, указанном ранее, $\beta_0 = 5/7$, получим $\varphi(t) = \frac{7 \cdot t^{2/7}}{2}$.

Решим полученное уравнение относительно переменной t с помощью функции Solve и получим: $t = \frac{8}{343} \sqrt{\frac{2}{7}} y^{\frac{7}{2}}$. Найденное решение обозначим как $p(y)$, а функцию $\alpha(t)$ при $t = p(y)$ обозначим как $b_0(y)$.

С помощью функции PowerExpand проведем упрощение и преобразование функции $\alpha(t)$:

$$b_0[y_]=\text{PowerExpand}\left[t^{\wedge}(\beta_0)/.t->\frac{8}{343}\sqrt{\frac{2}{7}}y^{\frac{7}{2}}\right].$$

Тогда $\alpha(t)$ примет вид: $\frac{4}{49} \sqrt{\frac{2}{7}} y^{5/2}$.

Далее построим график полученной функции. Так как была осуществлена замена переменных путем интегрального преобразования, необходимо найти правую границу отрезка, на котором будем строить график. Введем в Wolfram Mathematica следующее выражение:

$$s_0 = \text{NIntegrate}[1/\alpha[s], \{s, 0, 12\}].$$

Тогда правая граница, обозначенная как s_0 , примет значение 7,11878.

Для построения графика воспользуемся функцией Plot:

$$\text{Plot}[b_0[y], \{y, 0, s_0\}].$$

Пусть $v(y) = u(p(y))$, тогда $u'(t) = v'(y)y'(t) = \frac{v'(y)}{\alpha(p(y))} = \frac{v'(y)}{b_0(y)}$. После этого исходное уравнение на отрезке $[0; s_0]$, будет иметь следующий вид:

$$v''(y) + \sigma \cdot b_1(y) \cdot v'(y) - v(y) = g(y), \quad (2)$$

где $b_1(y) = \alpha'(t)$, а $g(y) = e^{-t}$ при $t = p(y)$.

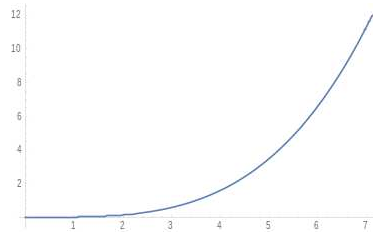


Рис. 1. График функции $\alpha(t)$.

Сначала решим однородное уравнение

$$v''(y) + \sigma \cdot b_1(y) \cdot v'(y) - v(y) = 0. \quad (3)$$

Построим систему линейно независимых решений на интервале от 0 до s_0 . Проведя замену $v(y) = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} \cdot v_0(y)$, приходим к модифицированному уравнению Бесселя (см. [3]):

$$y^2 \cdot v_0''(y) + y \cdot v_0'(y) - (y^2 + \tau^2) \cdot v_0(y) = 0, \quad (4)$$

где $\tau = \frac{\sigma-1}{2}$.

Предполагая, что $\sigma = \frac{3}{7}$, по итогу приходим к системе линейно независимых решений, которые обозначили как v_1 и v_2 (см. [4]):

$$v_1[y_-] = \frac{2^{\frac{1}{7}} \text{BesselI}\left[\frac{1}{7}, y\right] \text{Gamma}\left[\frac{8}{7}\right]}{y^{\frac{1}{7}}},$$

$$v_2[y_-] = \frac{2^{\frac{1}{7}} \text{BesselI}\left[-\frac{1}{7}, y\right] \text{Gamma}\left[\frac{6}{7}\right]}{y^{\frac{1}{7}}},$$

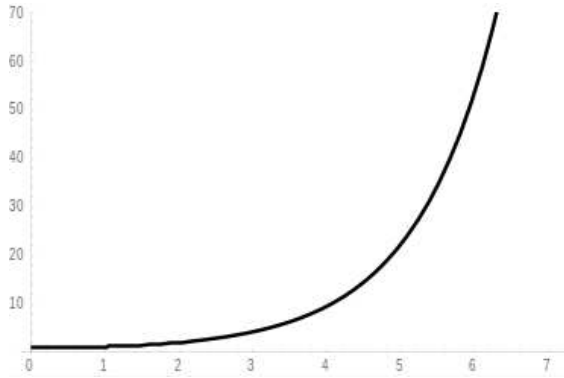


Рис. 2. График решения v_1 .

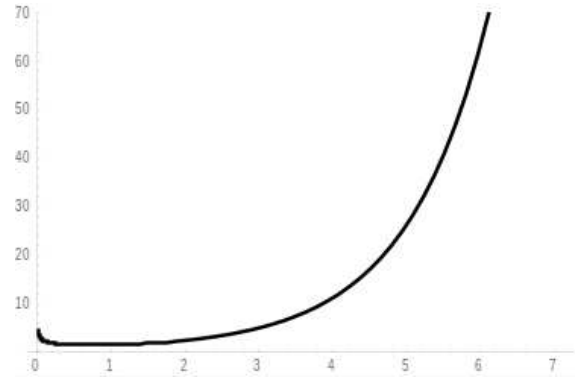


Рис. 3. График решения v_2 .

Производные первого и второго решения обозначим как w_1 и w_2 соответственно (см. [5]):

$$w_1[y_-] := \frac{\text{BesselI}\left[-\frac{6}{7}, y\right] \text{Gamma}\left[\frac{8}{7}\right]}{2^{\frac{6}{7}} y^{\frac{1}{7}}} - \frac{2^{\frac{1}{7}} \text{BesselI}\left[\frac{1}{7}, y\right] \text{Gamma}\left[\frac{8}{7}\right]}{7 y^{\frac{8}{7}}} + \frac{\text{BesselI}\left[\frac{8}{7}, y\right] \text{Gamma}\left[\frac{8}{7}\right]}{2^{\frac{6}{7}} y^{\frac{1}{7}}},$$

$$w_2[y_-] := \frac{\text{BesselI}\left[-\frac{8}{7}, y\right] \text{Gamma}\left[\frac{6}{7}\right]}{2^{\frac{6}{7}} y^{\frac{1}{7}}} - \frac{2^{\frac{1}{7}} \text{BesselI}\left[-\frac{1}{7}, y\right] \text{Gamma}\left[\frac{6}{7}\right]}{7 y^{\frac{8}{7}}} + \frac{\text{BesselI}\left[\frac{6}{7}, y\right] \text{Gamma}\left[\frac{6}{7}\right]}{2^{\frac{6}{7}} y^{\frac{1}{7}}}.$$

Далее необходимо было определить вронскиан для найденной системы решений (см. [6]):

$$W(y) = v_1(y) \cdot w_2(y) - v_2(y) \cdot w_1(y) = -\frac{2 \cdot 2^{2/7}}{7y^{9/7}}.$$

Теперь же перейдем к построению решения неоднородного уравнения для задачи Коши. После интегрального преобразования получим задачу:

$$v''(y) - \frac{2}{7}b_1(y) * v'(y) - v(y) = e^{-p0[y]}, \quad v(s_0) = 1.$$

Теорема 1 (о структуре общего решения неоднородного уравнения) (см. [7]). Общим решением $v(y)$ неоднородного уравнения является сумма его произвольного частного решения $v^*(y)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения $\bar{v}(y)$, т. е.

$$v(y) = \bar{v}(y) + v^*(y).$$

Теорема 2 (о структуре решения задачи (1)). Решение задачи можно записать в следующей форме

$$v(y) = \bar{v}(y) + v^*(y) = \frac{v_1(y)w_2(s_0)}{W(s_0)} + \int_{s_0}^y \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1(y) & v_2(y) \end{vmatrix} \frac{g(x)}{W(x)} dx.$$

В Wolfram Mathematica нахождение решения неоднородного уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{vvd}[y1_ , x1_] &:= \\ \text{If}[0 \leq y1 < x1 \leq s0, -v2[y1] * v1[x1] / \left(-\frac{2 \times 2^{2/7}}{7 \times 1^{9/7}} \right) + v1[y1] * v2[x1] / \left(-\frac{2 \times 2^{2/7}}{7 \times 1^{9/7}} \right), 0], \\ g1[y1_] &:= e^{-p0[y1]}. \end{aligned}$$

Проведем операцию численного интегрирования (см. [5]):

$$\text{intvg1}[y1_] := \text{NIntegrate}[g1[x1]\text{vvd}[y1, x1], \{x1, y1, s0\}].$$

Имея произвольное частное решение и общее решение однородного уравнения, найдем общее решение неоднородного уравнения (в новых координатах):

$$\text{vg}[y1_] := v1[y1]w2[s0] / \left(-\frac{2 \times 2^{2/7}}{7 \times s0^{9/7}} \right) + \text{intvg1}[y1].$$

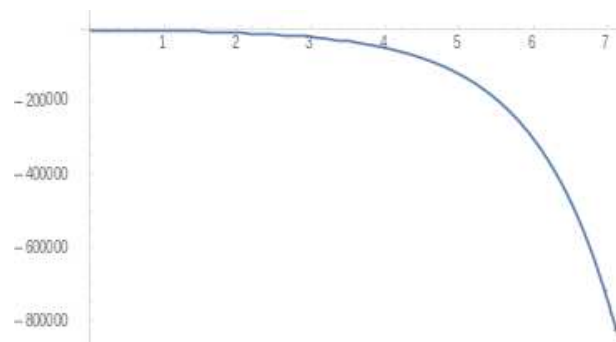


Рис. 4. График решения $\text{vg}[y1]$.

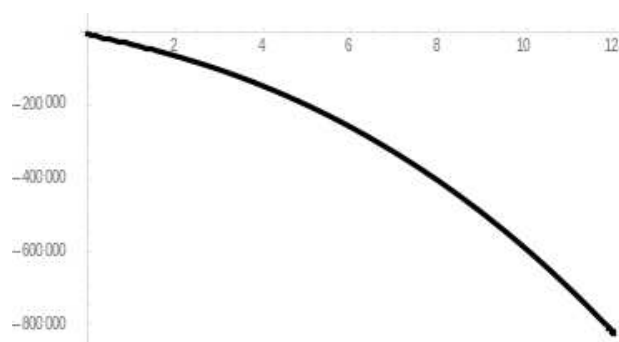


Рис. 5. График решения $u[t]$ задачи (1) в исходных переменных.

Для получения конечного решения поставленной задачи совершим обратное преобразование:

$$u[y_-] := \text{vg}[\varphi[t]].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современном мире, когда один из главных ресурсов – это время, а промедление из-за громоздкости вычислений может стоить открытия, использование вычислительных машин или программных пакетов можно считать необходимостью. Поэтому их приходится применять в работах и расчетах, совмещая с уже имеющимися знаниями, для полноты понимания, а, зачастую, и визуального представления той или иной решаемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садчиков, П. В. Метод построения задачи Коши для некоторого линейного дифференциального уравнения с существенно переменными коэффициентами на полубесконечном интервале / П. В. Садчиков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 159–164.
2. Глушко, В. П. Курс уравнений математической физики с использованием пакета Mathematica. Теория и технология решения задач: [учебное пособие для студ. вузов, обуч. по группе мат. и механ. направлений и специальностей] / В. П. Глушко, А. В. Глушко. — СПб. : Лань, 2010. — 308 с.
3. Гаврилов, В. С. Функции Бесселя в задачах математической физики: Учебно-методическое пособие / В. С. Гаврилов, Н. А. Денисова, А. В. Калинин. — Нижний Новгород : Нижегородский университет, 2014. — 40 с.
4. Дьяконов, В. П. Mathematica 4: учебный курс / В. Дьяконов. — СПб. : Питер, 2001. — 656 с.
5. Холодова, С. Е. Специальные функции в задачах математической физики. Учебное пособие / С. Е. Холодова, С. И. Перегудин. — СПб. : НИУ ИТМО, 2012. — 87 с.
6. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М. : Изд-во МГУ, 1984. — 200 с.
7. Лизоркин, П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами / П. И. Лизоркин. — М. : наука, 1981. — 353 с.

REFERENCES

1. Sadchikov P.V. Method of constructing the Cauchy problem for some linear differential equation with substantially variable coefficients on a semi-infinite interval. [Sadchikov P.V.

Metod postroeniya zadachi Koshi dlya nekotorogo linejnogo differencial'nogo uravneniya s sushchestvenno peremennymi koefitsientami na polubeskonechnom intervale]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 4, pp. 159–164.

2. Glushko V.P., Glushko A.V. Course of equations of mathematical physics using the Mathematica package. Theory and technology of problem solving: [textbook for students. universities, students. according to the mat group. and the mechan. directions and specialties]. [Glushko V.P., Glushko A.V. Kurs uravnenij matematicheskoy fiziki s ispol'zovaniem paketa Mathematica. Teoriya i tekhnologiya resheniya zadach: [uchebnoe posobie dlya stud. vuzov, obuch. po gruppe mat. i mekhan. napravlenij i special'nostej]]. St. Petersburg: Lan, 2010, 308 p. [2] Gavrilov V.S., Denisova N.A., Kalinin A.V. Bessel functions in problems of mathematical physics: An educational and methodological guide Gavrilov V.S., Denisova N.A., Kalinin A.V. Funkcii Besselya v zadachah matematicheskoy fiziki: Uchebno-metodicheskoe posobie Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University, 2014, 40 p

3. Dyakonov V.P. Mathematica 4: a training course. [D'yakonov V.P. Mathematica 4: uchebnyj kurs]. St. Petersburg: Peter, 2001, 656 p.

4. Kholodova S.E., Peregudin S.I. Special functions in problems of mathematical physics. Textbook. [Kholodova S.E., Peregudin S.I. Special'nye funkcii v zadachah matematicheskoy fiziki. Uchebnoe posobie]. St. Petersburg: NRU ITMO, 2012, 87 p.

5. Petrovsky I.G. Lectures on the theory of ordinary differential equations. [Petrovskij I.G. Lekcii po teorii obyknovykh differencial'nykh uravnenij]. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1984, 200 p.

6. Lizorkin P.I. Course of differential and integral equations with additional chapters. [Lizorkin P.I. Kurs differencial'nykh i integral'nykh uravnenij s dopolnitel'nymi glavami]. Moscow: Nauka, 1981, 353 p.

Дедяева Екатерина Федоровна, магистрант кафедры математического анализа Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: dedyaeva.katena@mail.ru

Dedyaeva Ekaterina F., Undergraduate Student, Mathematical Analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: dedyaeva.katena@mail.ru

Садчиков Павел Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений в частных производных и теорий вероятностей, доцент кафедры математического анализа Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: sadchikov.agon@yandex.ru

Sadchikov Pavel V., candidate of physics and mathematical Sciences, Associate Professor, Chair of Partial Differential Equations and Theories of Probability, Chair of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: sadchikov.agon@yandex.ru