УДК 517.5; 512.813.5; 519.254

О ГОЛОМОРФНЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ

В. В. Крутских

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.04.2022 г.

Аннотация. Обсуждаются способы изучения алгебр Ли, допускающих невырожденные по Леви 7-мерные орбиты в комплексном пространстве $\mathbb{C}^4$, из обширных списков абстрактных 7-мерных вещественных алгебр Ли. Рассмотрение необходимых условий существования таких орбит (с использованием, в том числе, компьютерных алгоритмов) подтверждает выводы предыдущих работ Лободы А.В. и автора данной статьи о невозможности для большинства 7-мерных алгебр Ли реализаций с такими условиями. Тем самым, список алгебр Ли, отвечающих голоморфно однородным невырожденным вещественным гиперповерхностям в $\mathbb{C}^4$, удается сводить к обозримым размерам.

Ключевые слова: Алгебра Ли, абелева подалгебра, абелев идеал, векторное поле, комплексное пространство, голоморфная функция, компьютерный алгоритм, система дифференциальных уравнений.

ON HOLOMORPHIC REALIZATIONS OF 7-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS

V. V. Krutskikh

Abstract. Methods for studying Lie algebras admitting Levi non-degenerate 7-dimensional orbits in the complex space $\mathbb{C}^4$ from extensive lists of abstract 7-dimensional real Lie algebras are discussed. Consideration of the necessary conditions for the existence of such orbits (using, among other things, computer algorithms) confirms the conclusions of the previous works of Loboda A.V. and the author of this paper about the impossibility for most 7-dimensional Lie algebras of realizations with such conditions. Thus, the list of Lie algebras corresponding to holomorphically homogeneous non-degenerate real hypersurfaces in $\mathbb{C}^4$ can be reduced to manageable sizes.

Keywords: Lie algebra, Abelian subalgebra, Abelian ideal, vector field, complex space, holomorphic function, computer algorithm, system of differential equations.

ВВЕДЕНИЕ

Ниже обсуждается задача реализации абстрактных вещественных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей в многомерных комплексных пространствах. Эта задача связана с описанием голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей пространств $\mathbb{C}^n$. При $n = 2$ и $n = 3$ такие описания получены (см. [1, 2]) с использованием полных списков, соответственно, 3-мерных и 5-мерных вещественных алгебр Ли. Изучение следующей размерности $n = 4$ сопряжено с большими техническими трудностями. Как показано ниже, значительную часть таких трудностей в обсуждаемой математической задаче удается снять за счет использования компьютерных алгоритмов.

Схемы, примененные в [1, 2], связаны с вещественными алгебрами Ли, размерность которых является минимально возможной для однородных гиперповерхностей и удовлетворяет равенствам $\dim(g) = 2n - 1$, где n — размерность обсуждаемого комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. В связи со случаем $n = 4$ нас интересуют ниже 7-мерные вещественные алгебры Ли и их 7-мерные орбиты в пространстве $\mathbb{C}^4$.

При этом естественно рассматривать в первую очередь алгебры, допускающие в качестве орбит невырожденные по Леви гиперповерхности. Такие алгебры, как показывают опыт пространства $\mathbb{C}^3$ и первые результаты для случая $\mathbb{C}^4$ (см. [3–5]), являются достаточно редкими среди множества всех алгебр Ли обсуждаемых размерностей. Основной целью статьи является выделение (в том числе с помощью компьютерных алгоритмов) алгебр, не имеющих реализаций с невырожденными орбитами в $\mathbb{C}^4$, из множества всех 7-мерных алгебр Ли.

Отметим сразу, что семейство 7-мерных алгебр Ли содержит 1325 типов алгебр. Большие фрагменты классификации таких алгебр опубликованы в работах [6–8]. Мы рассмотрим здесь несколько алгебр из 594 типов из работы [7] и 128 типов алгебр Ли из работы [8].

1. ГОЛОМОРФНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ЗАДАЧА О ГОЛОМОРФНОЙ ОДНОРОДНОСТИ

В серии статей [3, 4, 9] показано, что поставленная задача локального описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств допускает получение содержательных результатов в терминах голоморфных векторных полей и алгебр Ли, состоящих из таких полей.

Напомним, что голоморфное векторное поле (далее – векторное поле) в $\mathbb{C}^n$ — это векторное поле, компонентами которого являются (голоморфные) функции комплексной переменной $z = (z_1, z_2, \dots z_n)$. Векторное поле в $\mathbb{C}^4$ задается формулой следующего вида

$$Z = a(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + b(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + c(z)\frac{\partial}{\partial z_3} + d(z)\frac{\partial}{\partial z_4}. \tag{1}$$

Особую роль в статье играют «выпрямленные» поля, каждое из которых является дифференцированием по одной из четырех комплексных переменных.

Нас интересуют векторные поля, касательные к вещественно аналитическим гиперповерхностям пространства $\mathbb{C}^4$. Вблизи неособой точки любая такая поверхность задается уравнением $\Phi(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ с некоторой аналитической функцией Φ от переменных $z, \bar{z}$, имеющей ненулевой градиент. Как известно (см., например [10]), векторное поле Z является касательным к такой поверхности M, если выполняется условие

$$Re(Z(\Phi))|_M \equiv 0. \tag{2}$$

Голоморфная однородность вещественной гиперповерхности M в точке $P \in M$ означает, что имеются голоморфные преобразования, определенные вблизи точки $P \in \mathbb{C}^4$, сохраняющие эту поверхность и переводящие точку P в любую близкую к ней точку M. Совокупность таких преобразований можно считать локальной группой Ли G (см. [11]). А переходя к инфинитезимальным преобразованиям, отвечающим однопараметрическим подгруппам этой группы, мы получаем алгебру Ли g, связанную с группой G и состоящую из голоморфных векторных полей, касательных к исходной поверхности M.

Уточним, что абстрактной (вещественной) алгеброй Ли называется (см. [12]) линейное пространство с билинейной операцией умножения, которая удовлетворяет условиям

$$[x,x] = 0, \quad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Всякая 7-мерная алгебра Ли описывается своей «таблицей умножения», т.е. множеством коммутационных соотношений вида

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{7} \alpha_{ij}^{(k)} e_k, \tag{3}$$

где $e_1 \dots e_7$ — какой-либо базис обсуждаемой алгебры, $[x,y]$ — антикоммутативное произведение (коммутатор) элементов x, y обсуждаемой алгебры, $\alpha_{ij}^{(k)}$ — вещественные параметры.

Коммутатор в алгебре векторных полей вычисляется по известной формуле

$$[Z_1, Z_2] = Z_1(Z_2) - Z_2(Z_1). \tag{4}$$

Мы будем использовать сокращенную запись для полей вида (1), представляя каждое такое поле в виде набора его компонент $(a(z), b(z), c(z), d(z))$. Тогда коммутатором $[E_1, E_2]$ двух полей $E_1 = (a_1(z), b_1(z), c_1(z), d_1(z))$ и $E_2 = (a_2(z), b_2(z), c_2(z), d_2(z))$ является, в соответствии с формулой (4), разность двух формальных слагаемых. Первое из них получается суммированием последовательных дифференцирований всех компонент второго поля слагаемыми

$$a_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1},\ b_1(z)\frac{\partial}{\partial z_2},\ c_1(z)\frac{\partial}{\partial z_3},\ d_1(z)\frac{\partial}{\partial z_4}$$

первого поля. Второе формальное выражение, входящее в коммутатор $[E_1, E_2]$ со знаком «минус», вычисляется аналогично с переставленными полями E_1 и E_2.

Такой способ вычисления коммутаторов векторных полей является наглядным и удобным в случаях, когда отдельные компоненты полей зависят не от всех четырех комплексных переменных z_1, z_2, z_3, z_4, а имеют некоторые значимые упрощения. А сами такие упрощения базисных векторных полей обсуждаемых алгебр Ли оказываются возможными (см. [9]) за счет использования общих теорем о дифференциальных уравнениях и таблиц коммутационных соотношений в этих алгебрах. При этом важную играют максимальные абелевы подалгебры и абелевы идеалы исходных алгебр.

Напомним, что подалгебра Ли алгебры g называется абелевой, если коммутатор любых двух элементов подалгебры равен нулю. Абелева подалгебра Ли $I \subset g$ называется (абелевым) идеалом, если для любых $a \in g$, $b \in I$ их коммутатор $[a,b]$ является элементом I.

Ниже обсуждаются примеры 7-мерных алгебр Ли с 5-мерными (раздел 2) и 4-мерными (раздел 3) абелевыми идеалами. Независимо от размерности абелевых идеалов предлагаемая в статье техника опирается на упрощение четверки коммутирующих голоморфных векторных полей, касательных к вещественной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^4$.

Уточним, что все обсуждения статьи относятся к невырожденным по Леви гиперповерхностям. Согласно [10], аналитическая гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^4$, заданная уравнением

$$Imz_4 = F(z_1, z_2, z_3, Rez_4),$$

называется невырожденной по Леви, если эрмитова форма из тейлоровского разложения правой части этого уравнения является невырожденной на комплексной касательной плоскости к M.

Для поиска реализаций абстрактных алгебр Ли в виде алгебр векторных полей на невырожденных гиперповерхностях в $\mathbb{C}^4$ мы воспользуемся леммой из [3], являющейся модификацией рассуждений [9].

Согласно этой лемме, любую упорядоченную четверку коммутирующих линейно независимых векторных полей на невырожденной гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ (например, четверку e_1, e_2, e_3, e_4 на гипотетической невырожденной орбите 7-мерной алгебры Ли) можно привести (голоморфной) заменой координат в этом пространстве к одному из трех видов

$$\begin{array}{lll} e_1 = (1,0,0,0), & e_1 = (0,b_2(z_1),c_2(z_1),d_2(z_1)), & e_1 = (0,1,0,0), \\ e_2 = (0,1,0,0), & e_2 = (0,1,0,0), & e_2 = (0,0,c_3(z_1),d_3(z_1)), \\ e_3 = (0,0,1,0), & e_3 = (0,0,1,0), & e_3 = (0,0,1,0), \\ e_4 = (0,0,0,1), & e_4 = (0,0,0,1), & e_4 = (0,0,0,1). \end{array} \tag{5}$$

Отметим, что два поля из выбранной упорядоченной четверки («основная пара полей») выпрямляются во всех трех случаях, а два других («первое и второе примыкающие поля») выпрямляются, соответственно, во втором и третьем случаях леммы. В приведенной формулировке леммы основная пара – это поля e_4, e_3, а e_2 и e_1, соответственно, первое и второе примыкающие поля.

При упрощенном виде четырех из семи базисных полей коммутационные соотношения, имеющиеся в произвольной 7-мерной алгебре Ли, позволяют получить относительно простой вид остальных элементов базиса. В качестве следствия для большинства рассматриваемых алгебр достаточно легко получить вывод о возможных или невозможных реализациях с невырожденными орбитами.

2. АЛГЕБРЫ ЛИ С 5-МЕРНЫМ АБЕЛЕВЫМ ИДЕАЛОМ

В этом разделе будут рассмотрены 5 типов алгебр Ли с 5-мерным абелевым идеалом из [7]. Алгебры $[7,[6,31],1,k]$, $k = \{3,5,13,14,24\}$ из классификации [7] имеют абелев идеал $I_5 =< e_1, e_2, e_3, e_4, e_6 >$. Эти алгебры возможно описать при помощи следующей (общей) таблицы коммутационных соотношений (табл. 1)

Таблица 1

Коммутационные соотношения для пяти типов алгебр из блока [6,31]

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1							e_1
e_2							
e_3					e_1		$\delta e_1 + e_3$
e_4					e_2		
e_5						e_4	αe_6
e_6							λe_2
e_7							

где $\delta \in \{0{,}1\}$, $\alpha \in \{0{,}1\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Каждая из обозначенных выше алгебр имеет свой уникальный набор описанных параметров. Ниже приведена таблица, наглядно показывающая этот факт

Таблица 2

Значения параметров для пяти типов алгебр из блока [6,31]

	1.3	1.5	1.13	1.14	1.24
δ	0	0	0	0	1
α	0	0	1	1	1
λ	0	ε	0	ε	a

где, $\varepsilon^2 = 1$ и $a \in \mathbb{R}$.

Предложение 1. *Голоморфные реализации в пространстве $\mathbb{C}^4$ алгебр Ли из обсуждаемых пяти семейств не допускают Леви-невырожденных 7-мерных орбит в этом пространстве.*

Доказательство.

Главным упрощением в изучении алгебр с 5-мерным абелевым идеалом является достаточность рассмотрения лишь второго и третьего случаев формул (5) для какой-либо четверки базисных полей 5-мерного абелева идеала исходной 7-мерной алгебры. Первый случай формул (5) в такой ситуации запрещается замечанием из работы [13]. Согласно этому замечанию при наличии 5-мерной абелевой алгебры голоморфных векторных полей на Леви-невырожденной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^4$, невозможно одновременное выпрямление никакой четверки независимых полей из этой 5-мерной алгебры.

При рассмотрении двух оставшихся случаев упомянутой выше леммы мы зафиксируем в качестве упорядоченной четверки независимых полей из идеала I_5 набор e_1, e_2 (основная пара полей, выпрямленная до $e_1 = \frac{\partial}{\partial z_4}$, $e_2 = \frac{\partial}{\partial z_3}$), e_3 (первое примыкающее) и e_6 (второе примыкающее).

Еще одно поле e_4 из идеала I_5 коммутирует в каждом из двух рассматриваемых случаев с тройкой выпрямленных полей идеала, а потому его компоненты могут зависеть только от переменной z_1. При этом первая компонента e_4 обязана быть тождественно нулевой, т.к. в противном случае процедурами, аналогичными описанным в статье [9], можно было бы выпрямить четверку независимых полей из I_5. А это (см. [13]) невозможно.

Учитывая сказанное, мы можем сразу считать базис идеала I_5 имеющим во втором и третьем случаях леммы, соответственно, следующий вид:

$$\begin{array}{ll} e_1 = (0{,}0{,}0{,}1), & e_1 = (0{,}0{,}0{,}1), \\ e_2 = (0{,}0{,}1{,}0), & e_2 = (0{,}0{,}1{,}0), \\ e_3 = (0{,}1{,}0{,}0), & e_3 = (0{,}0{,}c_3(z_1), d_3(z_1)), \\ e_4 = (0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1)), & e_4 = (0, b_4(z_1), c_4(z_1), d_4(z_1)), \\ e_6 = (0, b_6(z_1), c_6(z_1), d_6(z_1)), & e_6 = (0{,}1{,}0{,}0). \end{array} \tag{6}$$

Для дальнейшего рассмотрения вопроса о возможных реализациях алгебр Ли в виде алгебр векторных полей, касательных к невырожденным гиперповерхностям необходимо упростить поля e_5 и e_7. Для этого обсудим в несколько шагов коммутаторы этих двух полей с остальными полями 7-мерной алгебры.

Начнем с первого случая формул (6). На первом шаге мы рассмотрим коммутаторы e_5 и e_7 с выпрямленными полями e_1, e_2, e_3. Например, из соотношения

$$[e_1, e_5] = \left(\frac{\partial}{\partial z_4} a_5(z), \frac{\partial}{\partial z_4} b_5(z), \frac{\partial}{\partial z_4} c_5(z), \frac{\partial}{\partial z_4} d_5(z)\right) = 0,$$

где $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, в котором не участвуют обозначенные параметры пяти алгебр, следует, что голоморфные компоненты поля e_5 не зависят от переменной z_4. Проделав аналогичные вычисления с оставшимися скобками, получаем следующий вид поля e_5:

$$e_5 = (a_5(z_1), b_5(z_1), c_5(z_1), z_2 + d_5(z_1)),$$

с некоторыми голоморфными компонентами a_5, b_5, c_5, d_5.

Аналогичными рассуждениями упрощаем поле e_7 (имеющее некоторые различия в зависимости от значений параметров) и получаем, что

$$e_7 = (a_7(z_1), z_2 + b_7(z_1), c_7(z_1), z_4 + \delta z_2 + d_7(z_1)).$$

Отметим, что одним из условий вырожденности любой орбиты обсуждаемой 7-мерной алгебры Ли является тождественное равенство нулю, например, первой компоненты у шести базисных векторных полей алгебры. Так как нас интересуют только невырожденные орбиты, можно считать, что в таких ситуациях $a_5(z_1) \neq 0$. Воспользуемся леммой «о линеаризации» из [9] (см. также [14], Замечание 3.2), с помощью которой можно голоморфной заменой координат поле e_5 привести к виду

$$e_5 = (1, 0, 0, z_2)$$

с сохранением вида оставшихся полей.

Для дальнейшего упрощения поля e_4 необходимо выяснить вид его компонент, которые зависят от z_1. Для этого рассмотрим коммутатор этого поля с полем e_5. Решая четыре дифференциальных уравнения, получаемые из соотношения

$$[e_4, e_5] = \left(0, -\frac{d}{dz_1} b_4(z_1), -\frac{d}{dz_1} c_4(z_1), -\frac{d}{dz_1} d_4(z_1) + b_4(z_1)\right) = (0, 0, 1, 0),$$

легко увидеть, что поле e_4 имеет вид

$$e_4 = (0, B_4, -z_1 + C_4, B_4 z_1 + D_4).$$

с некоторыми комплексными константами B_4, C_4, D_4.

Заметим, что если в дальнейшем рассмотрении скобок доказать, что $a_7(z_1) = 0$, то у пяти обсуждаемых алгебр первая компонента шести базисных векторных полей будет равна нулю, что является признаком наличия только вырожденных орбит у этих алгебр.

Для доказательства этого факта рассмотрим коммутационное соотношение

$$[e_4, e_7] = (0, B_4, a_7(z_1), B_4\delta + B_4 z_1 + D_4 - a_7(z_1) B_4) = 0.$$

Очевидно, что из этого соотношения следует тождественное равенство нулю компоненты $a_7(z_1)$ у каждой из пяти обсуждаемых алгебр, а значит эти алгебры могут иметь только вырожденные орбиты в рамках схемы второго случая реализации базисных полей алгебры. Заметим, что наличие параметров, которые объединили пять алгебр для общего рассмотрения, никак не повлияло на вычисления в этом случае.

Рассмотрим теперь второй случай формул (6), в котором выпрямленными оказываются поля e_1, e_2, e_6. По аналогии с предыдущим случаем получим предварительно упрощенный вид полей e_5 и e_7:

$$e_5 = (a_5(z_1), -z_2 b_4(z_1) + b_5(z_1), -z_2 c_4(z_1) + c_5(z_1), -z_2 d_4(z_1) + d_5(z_1)),$$
$$e_7 = (a_7(z_1), b_7(z_1), \lambda z_2 + c_7(z_1), z_4 + d_7(z_1)).$$

Дальнейшие рассмотрения оказываются более простыми по сравнению с предыдущим случаем, несмотря на более громоздкую формулу для поля e_5.

Так, из коммутационного соотношения $[e_3, e_5] = e_1$ получаем равенство

$$-a_5(z_1)(0,0,c_3'(z_1), d_3'(z_1)) = (0,0,0,1).$$

Из четвертой компоненты этого равенства следует, что $a_5(z_1) \neq 0$, а с учетом этого из третьей компоненты получаем условие $c_3'(z_1) = 0$, или $c_3(z_1) = C_3 = const$.

Рассматривая далее третью компоненту коммутационного соотношения $[e_3, e_7] = \delta e_1 + e_3$, приходим к равенству $-a_7(z_1) C_3' = C_3$, из которого следует, что $C_3 = 0$.

В такой ситуации два базисных поля $e_1 = (0,0,0,1)$ и $e_3 = (0,0,0,d_3(z_1))$ обсуждаемой алгебры оказываются комплексно линейно зависимыми (в каждой точке любой орбиты). Сама такая орбита вырождена по Леви, т.к. ее определяющая функция не зависит от переменной z_4.

Предложение 1 доказано.

В процессе изучения голоморфных реализаций в $\mathbb{C}^4$ 7-мерных алгебр Ли возникает достаточно естественная гипотеза об отсутствии у алгебр с 5-мерным абелевым идеалом невырожденных орбит. Эта гипотеза выполняется, например, для 7-мерных нильпотентных алгебр Ли.

Доказанное предложение 1 является дополнительным аргументом в пользу этой гипотезы даже при отсутствии условия нильпотентности. В то же время для полной проверки этой гипотезы в случае неразложимых разрешимых алгебр Ли необходимо рассмотреть еще более 50 типов таких алгебр, описанных в [7].

Отметим еще, что невырожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$ у других 7-мерных алгебр Ли также встречаются достаточно редко. Это показывают обсуждения следующего раздела.

3. АЛГЕБРЫ ЛИ С 4-МЕРНЫМ АБЕЛЕВЫМ ИДЕАЛОМ

В этом разделе обсуждаются 128 типов алгебр из работы [8]. Каждая алгебра из [8] имеет 5-мерный нильпотентный идеал, при этом, для 127 типов алгебр внутри такого идеала содержится 4-мерная абелева подалгебра. Отметим, что коммутационные соотношения для алгебр из [8] заданы в краткой закодированной форме. Например, алгебра $L1.1$ имеет в этой работе следующую кодировку (табл. 3)

Таблица 3

Кодировка алгебры $L1.1$

No.	A	B	$[A,B]$
$L1.1$	$(1,-1,0,0,0)$	$(0,0,0,0,1)$	σX_3+X_4

где A и B — диагональные матрицы 5-го порядка, определяемые коммутационными соотношениями между базисными элементами 5-мерного нильпотентного идеала, и двумя дополнительными базисными элементами этой алгебры, $\sigma\in\{0,1\}$.

На первом шаге 128 закодированных типов алгебр Ли из [8] переведены программным образом в табличные описания. Упомянутая алгебра $L1.1$ задается теперь следующей «таблицей умножения» (табл. 4).

Таблица 4

Коммутационные соотношения для алгебры $L1.1$

$L1.1$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1		e_3				e_1	
e_2						$-e_2$	
e_3							
e_4							
e_5							e_5
e_6							σe_3+e_4
e_7							

Для поиска абелевых идеалов и подалгебр 7-мерных алгебр Ли были написаны процедуры в пакете Maple. Описание этих процедур приведено в [15]. Например, алгебра $L1.1$ имеет, как легко увидеть, два 4-мерных абелева идеала $I_4 =< e_2,e_3,e_4,e_5 >$ и $I_4' =< e_1,e_3,e_4,e_5 >$.

Этими же процедурами установлено, что 127 из 128 типов обсуждаемых алгебр имеют 4-мерную абелеву подалгебру (при этом 101 алгебра имеет, как минимум, две такие подалгебры). Последняя алгебра $L1$ из списка [8] не имеет 4-мерных абелевых подалгебр, но содержит ровно три 3-мерные абелевы подалгебры, одна из которых является абелевым идеалом.

Три указанных случая формул (5) означают, что потенциально количество возможных реализаций алгебр Ли с 4-мерной абелевой подалгеброй увеличивается в три раза (т.е. необходимо рассмотреть не 127 случаев реализаций алгебр, а более 300 различных по сложности случаев). В связи с такими объемами требуемых вычислений естественным образом мы приходим к необходимости использования компьютерных алгоритмов.

Работу предлагаемого алгоритма рассмотрим на примере алгебры $L1.1$. При рассмотрении трех случаев леммы (см. (5)) в качестве упорядоченной четверки независимых полей из идеала I_4 зафиксируем набор e_5,e_4 (основная пара полей, выпрямленная до $e_5=\frac{\partial}{\partial z_4}$, $e_2=\frac{\partial}{\partial z_3}$), e_3 (первое примыкающее), e_2 (второе примыкающее).

3.1. Первый подслучай

Алгоритм базируется на специальном порядке рассмотрения коммутационных соотношений в алгебрах. Всего у любой 7-мерной алгебры имеется 21 коммутационное соотношение: 6 соотношений между базисными элементами абелевой подалгебры; 12 соотношений между элементами подалгебры и элементами, не входящими в абелеву подалгебру; оставшиеся 3 соотношения между тремя базисными элементами из дополнения к идеалу.

Наличие 4-мерной абелевой подалгебры в абстрактной алгебре гарантирует нам, что в первом случае из (5) базисные элементы потенциальной реализации такой алгебры, т.е. векторные поля, будут линейными по четырем комплексным переменным. В самом деле, 6 упомянутых соотношений позволяют выпрямить базисную четверку полей из идеала

$$\begin{aligned} e_2 &= (1, 0, 0, 0), \\ e_3 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_4 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_5 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Упомянутые 12 соотношений распадаются на три группы по четыре соотношения для каждого из трех полей, не входящих в абелев идеал. Например, из соотношения $[e_1, e_2] = e_3$, выполняющегося в алгебре $L1.1$ (как и во многих других обсуждаемых алгебрах), следует, что производная по переменной z_1 поля e_1 равна — e_3. Аналогичные выводы следуют из соотношений $[e_1, e_3] = 0$, $[e_1, e_4] = 0$, $[e_1, e_5] = 0$. Тогда все поле e_1 имеет вид

$$e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, D_1) \tag{7}$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 — комплексные константы.

Две других четверки приводят (как в ручном, так и в компьютерном варианте) к следующему виду полей e_6, e_7:

$$\begin{aligned} e_6 &= (z_1 + A_6, B_6, C_6, D_6), \\ e_7 &= (A_7, B_7, C_7, z_4 + D_7). \end{aligned}$$

Последние 3 соотношения между полями e_1, e_6, e_7

$$\begin{aligned} &[e_1, e_6] = (-A_1, -z_1 + A_6, 0, 0) = e_1 = (A_1, -z_1 + B_1, C_1, D_1), \\ &[e_1, e_7] = (0, 0, 0, 0) = 0, \\ &[e_6, e_7] = (A_7, 0, 0, D_6) = \sigma e_3 + e_4 (0, \sigma, 1, 0). \end{aligned} \tag{8}$$

также легко обрабатываются.

Их сравнение с данными из таблицы коммутационных соотношений (реализованное для алгебры $L1.1$ в формулах (8)) для каждой конкретной алгебры Ли приводит к системе линейных уравнений на комплексные коэффициенты. В первом случае из (5) такая система легко исследуется программным образом. Если она не имеет решений, то обсуждаемая алгебра не имеет реализаций в виде алгебр векторных полей в $\mathbb{C}^4$ (такая ситуация является характерной для большинства из обсуждаемых 128 алгебр Ли). Так в примере $L1.1$ имеем противоречие в третьих элементах $0 = 1$ соотношения $[e_6, e_7] = \sigma e_3 + e_4$.

Искомые реализации абстрактных алгебр Ли могут получиться, если формулы (8) не противоречат таблицам коммутационных соотношений. Однако часть подобных «реализаций» не удовлетворяет заложенным в алгоритм проверочным условиям, связанным с линейной независимостью базисных векторных полей и наличием невырожденных орбит у изучаемых алгебр.

Реализации алгебр Ли, прошедшие все этапы алгоритма, записываются в итоговый файл. Более детальными рассмотрениями этого файла можно показать, что еще у некоторых из полученных реализаций все орбиты также вырождены, т.е. предложенный алгоритм имеет возможности для усовершенствования. Однако представляется вполне перспективным следующий вывод из уже проведенного компьютерного исследования первого случая.

Предложение 1. Из 127 типов обсуждаемых алгебр Ли в рамках первого случая формул (5) невозможны реализации в $\mathbb{C}^4$ с невырожденными орбитами для 95 алгебр.

3.2. Второй и третий подслучаи

В рамках второго и третьего случаев формул (5) исследование алгебр из списка [8] с помощью компьютерных алгоритмов пока оказывается менее продуктивным.

Во втором случае рассмотрены начальные (61 тип) алгебры Ли из этого списка. Каждая из этих алгебр Ли имеет две 4-мерные абелевы подалгебры. При этом либо обе они, либо хотя бы одна из двух является абелевым идеалом, что значительно упрощает обсуждения.

В частности, при фиксированном абелевом идеале, рассмотренном в первом случае (5), обсуждение второго случая для таких алгебр фактически сводится к схеме первого случая, применяемой для «запасной» абелевой подалгебры. В итоге здесь использование разработанных компьютерных программ приводит к следующему утверждению.

Предложение 2. В рамках второго случая формул (5) из 61 рассмотренного типа алгебр Ли из списка [8] лишь два типа могут иметь невырожденные орбиты.

Отметим, что количества нетривиальных коммутационных соотношений в алгебрах Ли этих типов равны, соответственно, 7 и 8.

Например, реализацией алгебры $L4.6$ с коммутационными соотношениями (табл. 5)

Таблица 5

Коммутационные соотношения для алгебры $L4.6$

$L4.6$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1		e_3				e_1+e_2	e_4
e_2						e_2+ae_4	
e_3						$2e_3$	
e_4						e_4	
e_5							e_5
e_6							
e_7							

является алгебра векторных полей с базисом

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1{,}0{,}0{,}0),\\
e_2 &= (0, z_1, C_2, 0),\\
e_3 &= (0, 1, 0{,}0),\\
e_4 &= (0{,}0{,}1{,}0),\\
e_5 &= (0, 0, 0, 1),\\
e_6 &= (z_1, 2z_2 + \frac{1}{2}z_1^2, C_2 z_1 + z_3, 0),\\
e_7 &= (0, 0, z_1, z_4).
\end{aligned}$$

Третий случай формул (5) является наиболее сложным для программных вычислений, т.к. базисные поля гипотетических реализаций, дополнительные к максимально упрощенной четверке (5), теряют, вообще говоря, свой линейный характер. Модификация основного алгоритма для третьего случая пока оказывается эффективной для алгебр с двумя 4-мерными абелевыми идеалами (в списке [8] имеется 48 типов таких алгебр).

В этом же случае две компоненты одного из базисных полей

$$e_3 = (0{,}0, c_3(z_1), d_3(z_1)) \tag{9}$$

упрощенной четверки (5) содержат пару функций, зависящих от переменной z_1. Это приводит к появлению нелинейных слагаемых в формулах для трех остальных базисных полей. Однако все такие слагаемые зависят только от переменной z_1, а потому очередные этапы предлагаемого алгоритма используют процедуры формирования и решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно этих функций (вместо исследования системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных числовых коэффициентов).

Для первых 48 алгебр из списка [8] все эти этапы реализованы. Как и в двух первых случаях, алгоритмическое рассмотрение значительной части обсуждаемых абстрактных алгебр Ли и здесь приводит к противоречиям.

Предложение 3. В рамках третьего случая формул (5) из первых 48 типов алгебр Ли из списка [8] невырожденные орбиты могут иметь не более чем 15 типов алгебр.

4. ПРИМЕРЫ ВЫРОЖДЕННЫХ И НЕВЫРОЖДЕННЫХ ОРБИТ

Выше обсуждались реализации алгебр Ли, вырождения орбит которых были заметны по некоторым свойствам базисных векторных полей. Однако, не всегда по реализации алгебры легко определить: вырождены ли ее орбиты или нет? В этом разделе рассмотрим два примера алгебр Ли векторных полей, ответ на поставленный вопрос для которых устанавливается после интегрирования этих алгебр.

Первым примером будет алгебра [7,[6,17],1,2] с вырожденными по Леви трубчатыми орбитами. Алгебра векторных полей имеет следующую реализацию

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0{,}0{,}0{,}1),\\
e_2 &= (0{,}0{,}1{,}0),\\
e_3 &= (0{,}1{,}0{,}0),\\
e_4 &= (0{,}0, -z_1, -z_2),\\
e_5 &= (1{,}0{,}0{,}0),\\
e_6 &= (0, z_1, z_2, z_3),\\
e_7 &= (z_1, z_2, z_3, z_4).
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (2) и получим систему из 7 (по факту из 3) дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{gathered}
-y_1\frac{\partial F}{\partial y_3} + y_2 = 0,\\
y_1\frac{\partial F}{\partial y_2} + y_2\frac{\partial F}{\partial y_3} - y_3 = 0,\\
y_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial F}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial F}{\partial y_3} - F = 0.
\end{gathered}$$

Отметим, что определяющую функцию Φ из формулы (2) мы ищем в виде $\Phi = -y_4 + F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4)$, и переменные $x_i = Re(z_i)$, $y_i = Im(z_i)$.

Подробно останавливаться на решении подобных систем мы не будем, однако, стоит отметить, что решить их можно в «ручном» режиме и с помощью компьютерного алгоритма (см. [16]).

Орбиты исходной алгебры, описываемые решениями последней системы, сводятся аффинными преобразованиям к следующему виду

$$y_1^2 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_2^3 = 0.$$

Для проверки вырожденности полученной поверхности воспользуемся обозначенным выше определением невырожденной по Леви гиперповерхности. При $y_1 \neq 0$ запишем полученное уравнение в разрешенной форме относительно y_4

$$y_4 = -\left(\frac{y_2 y_3}{y_1} + \frac{y_2^3}{y_1^2}\right). \tag{10}$$

Разложение в ряд Тейлора будем рассматривать в произвольной точке $Q(A,B,C,Y_4)$. Квадратичная часть этого разложения

$$\frac{B(AC+3B^2)}{A^4}y_1^2 - \frac{AC+6B^2}{A^3}y_1y_2 - \frac{B}{A^2}y_1y_3 + \frac{1}{A}y_2y_3 + \frac{3B}{A^2}y_2^2$$

вырождена, так как определитель матрицы, составленной из ее коэффициентов, равен нулю. Вырожденность (или невырожденность) квадратичной части поверхности $\Gamma \in \mathbb{R}^4$ типа (10) переносится на вырожденность (или невырожденность) формы Леви для трубчатой поверхности $\Gamma + i\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{C}^4$.

Вторым примером рассмотрим алгебру Ли с невырожденной по Леви орбитой. Такой алгеброй, например, является алгебра Ли $L2.6$ с набором коммутационных соотношений из [8]

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_6] = e_1, \quad [e_1, e_7] = \sigma e_5, \quad [e_2, e_7] = e_2$$
$$[e_3, e_6] = [e_3, e_7] = e_3, \quad [e_4, e_6] = e_4 + e_5, \quad [e_5, e_6] = e_5.$$

Одна из ее реализаций имеет следующие базисные векторные поля

$$\begin{aligned}
e_1 &= (A_1, 0, -z_4, 0),\\
e_2 &= (0,0,0,1),\\
e_3 &= (0,0,1,0),\\
e_4 &= (0,1,0,0),\\
e_5 &= (1,0,0,0),\\
e_6 &= (z_1 + z_2, z_2, z_3, 0),\\
e_7 &= (0,0,z_3,z_4)
\end{aligned}$$

и соответствующую эти полям систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
a_{12}\frac{\partial F}{\partial y_1} - F\frac{\partial F}{\partial y_3} = 0,\\
(y_1 + y_2)\frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial F}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial F}{\partial y_3} = 0,\\
y_3\frac{\partial F}{\partial y_3} - F = 0.
\end{gathered}$$

Одним из решений этой системы является поверхность с уравнением

$$y_4 = y_2 y_3(\ln(y_2) + 1) + y_1 y_3,$$

Невырожденность орбиты рассмотрим в точке $Q(0,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$. Введем замену переменных

$$y_2 = 1 + y_2^*, \quad y_3 = 1 + y_3^*, \quad y_4 = 1 + y_4^*$$

и перепишем уравнение через полученные переменные

$$1 + y_4^* = y_1(1 + y_3^*) + (1 + y_2^*)(1 + y_3^*)\big(1 + \ln(1 + y_2^*)\big).$$

Определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов квадратичной формы тейлоровского разложения правой части полученного уравнения равен $\det(A) = -1$. Это означает, что полученная гиперповерхность невырождена по Леви.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В связи с задачей описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ изучены реализации абстрактных 7-мер-ных вещественных алгебр Ли в виде алгебр Ли голоморфных векторных полей в этом пространстве. Показано, что для значительной части обширного списка таких алгебр Ли изучаемые реализации не допускают невырожденных по Леви орбит. Тем самым, «большинство» однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$, ассоциированных с 7-мерными алгебрами Ли, относится к семейству Леви-вырожденных многообразий.

Для пяти алгебр Ли, имеющих 5-мерный абелев идеал, этот факт устанавливается несложными рассуждениями. Для достаточно большого списка (содержащего более 100 типов) алгебр Ли, имеющих лишь 4-мерные абелевы идеалы, продемонстрирована эффективность использования в изучаемой задаче компьютерных алгоритмов.

Как непосредственные рассуждения, так и компьютерные вычисления используют общую схему изучения голоморфных реализаций абстрактных алгебр Ли, опирающуюся на совместное упрощение нескольких коммутирующих векторных полей. В дополнение к общим утверждениям статьи рассматриваются примеры, в которых эта схема приводит к содержательным алгебрам векторных полей. В частности, в статье имеется пример Леви-невырожденной орбиты одной из рассмотренных алгебр Ли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cartan, E. Sur la g´eom´etrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes / E. Cartan // Ann. Math. Pura. Appl. — 1993. — 11. — P. 17–90.

2. Лобода, А. В. Голоморфно однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода // Тр. ММО. — 2020. — 81(2). — С. 205–280.

3. Loboda, A. V. On the Orbits of Nilpotent 7-dimensional Lie Algebras in 4-dimensional Complex Space / A. V. Loboda, R. S. Akopyan, V. V. Krutskikh // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. — 2020. — 13(3). — P. 360–372.

4. Лобода, А. В. О вырожденности орбит нильпотентных алгебр / А. В. Лобода, В. К. Каверина // Уфимский матем. журнал. — 2022. — № 1. — С. 57–83.

5. Крутских, В. В. Компьютерные алгоритмы исследования голоморфно однородных гиперповерхностей / В. В. Крутских, А. В. Лобода // Матер. междунар. научной конф. УОМШ. — 2022. — Т. 1. — С. 124–126.

6. Gong, M. P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebrai-cally Closed Fields and R) / M. P. Gong. — University of Waterloo, 1998. — 165 p.

7. Parry, A. R. A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals [master's thesis] / A. R. Parry. — Logan, Utah: Utah State University, 2007. — 225 p.

8. Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals / Vu A. Le et al. // Cornell University. — 2021.

9. Beloshapka, V. K. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic / V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. — 2010. — 20(3). — P. 538–564.

10. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных / Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1985. — 577 с.

11. Дубровин, Б. А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. — М. : Наука, 1986. — 760 с.

12. Серр, Ж. П. Алгебры Ли и группы Ли / Ж. П. Серр. — М. : Мир, 1969. — 376 с.

13. Лобода, А. В. О задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей 4-мерных комплексных пространств / А. В. Лобода // Труды МИАН. — 2020. — Т. 331. — С. 194–212.

14. Атанов, А. В. Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Атанов, А. В. Лобода // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 2019. — 173. — С. 86–115.

15. Крутских, В. В. Компьютерная обработка данных в одной многомерной математической задаче / В. В. Крутских, А. В. Лобода // Матер. XXI междунар. научно-технической конф. ИПМТ. — Воронеж. — 2021. — С. 411–419.

16. Крутских, В. В. Интегрирование 7-мерных алгебр Ли с использованием символьных вычислений / В. В. Крутских, А. В. Лобода // Матер. XX междунар. научно-технической конф. ИПМТ. — Воронеж, 2020. — С. 579–586.

REFERENCES

1. Cartan E. Sur la g´eom´etrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes. Ann. Math. Pura. Appl., 1993., vol. 11., pp. 17–90.

2. Loboda A.V. Holomorphically homogeneous real hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$. [Loboda A.V. Golomorfno odnorodnye veshchestvennye giperpoverhnosti v $\mathbb{C}^3$]. *Tr. MMO — Trans. Moscow Math. Soc.*, 2020, 81(2), pp. 205–280.

3. Loboda A.V., Akopyan R.S., Krutskikh V.V. On the Orbits of Nilpotent 7-dimensional Lie Algebras in 4-dimensional Complex Space. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2020., 13(3), pp. 360–372.

4. Loboda A.V., Kaverina V.K. On degeneracy of orbits of nilpotent lie algebras. [Loboda A.V., Kaverina V.K. O vyrozhdennosti orbit nil'potentnyh algebr]. *Ufimskij matem. zhurnal — Ufa Math. Journal*, 2022, no. 1, pp. 57–83.

5. Krutskikh V.V., Loboda A.V. Computer algorithms for investigation holomorphically homogeneous hypersurfaces. [Krutskikh V.V., Loboda A.V. Komp'yuternye algoritmy issledovaniya golomorfno odnorodnyh giperpoverhnostej]. *Mater. mezhdunar. nauchnoj konf. UOMSH — Proceedings of the international scientific conference Ufa Autumn Mathematical School*, 2022, vol. 1, pp. 124–126.

6. Gong M.P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebrai-cally Closed Fields and R). University of Waterloo, 1998, 165 p.

7. Parry A.R. A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals [master's thesis]. Logan, Utah, Utah State University, 2007, 225 p.

8. Le Vu A., Nguyen Tuan A., Nguyen Tu T.C., Nguyen Tuyen T.M., Vo Thieu N. Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals. Cornell University, 2021.

9. Beloshapka V.K., Kossovskiy I.G. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic. J. Geom. Anal., 2010, 20(3), pp. 538–564.

10. Chabat B.V. Introduction to complex analysis. Functions of several variables. [Chabat B.V. Vvedenie v kompleksnyj analiz. Funkcii neskol'kih peremennyh]. Moscow: Science, 1985, 577 p.

11. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Modern geometry. Methods and Applications. [Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya]. Moscow: Science, 1986, 760 p.

12. Serre J.P. Lie Algebras and Lie Groups. [Serre J.P. Algebry Li i gruppy Li]. Moscow: World, 1969, 376 p.

13. Loboda A.V. On the Problem of Describing Holomorphically Homogeneous Real Hypersurfaces of Four-Dimensional Complex Spaces. [Loboda A.V. O zadache opisaniya golomorfno odnorodnyh veshchestvennyh giperpoverhnostej 4-mernyh kompleksnyh prostranstv]. *Trudy MIAN — Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 331, pp. 194–212.

14. Atanov A.V., Loboda A.V. Becomposable five-dimensional lie algebras in the problem on holomorphic homogeneity in $\mathbb{C}^3$. [Atanov A.V., Loboda A.V. Razlozhimye pyatimernye algebry Li v zadache o golomorfnoj odnorodnosti v $\mathbb{C}^3$]. *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. — Results of science and technology. Modern mathematics and its applications*, 2019, vol. 173, pp. 86–115.

15. Krutskikh V.V., Loboda A.V. Computer data processing in one multidimensional mathematical problem. [Krutskikh V.V., Loboda A.V. Komp'yuternaya obrabotka dannyh v odnoj mnogomernoj matematicheskoj zadache]. *Mater. XXI mezhdunar. nauchno-tekhnicheskoj konf. IPMT — Proceedings of the XXI International Scientific and Technical Conference Informatics Problems Methods Technologies*, Voronezh, 2021, pp. 411–419.

16. Krutskikh V.V., Loboda A.V. Integration of 7-dimensional Lie algebras using symbolic computation. [Krutskikh V.V., Loboda A.V. Integrirovanie 7-mernyh algebr Li s ispol'zovaniem simvol'nyh vychislenij]. *Mater. XX mezhdunar. nauchno-tekhnicheskoj konf. IPMT — Proceedings of the XX International Scientific and Technical Conference Informatics Problems Methods Technologies*, Voronezh, 2020, pp. 579–586.

Крутских Владислав Валерьевич, аспирант кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: krutskihvlad@mail.ru

Krutskikh Vladislav Valerievich, PhD student of the Department of Digital Technologies of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: krutskihvlad@mail.ru