

# УСЛОВИЯ НАЧАЛА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА, ПОСТРОЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ О ПОРОГОВОМ “ПОДКЛЮЧЕНИИ” ФАКТОРА ПОПЕРЕЧНОЙ ВЯЗКОСТИ

В. Н. Колодежнов

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”*

Поступила в редакцию 15.02.2022 г.

**Аннотация.** Рассмотрен подход к прогнозированию начала ламинарно-турбулентного перехода. Подход базируется на гипотезе о возможном расширении реологической модели ньютоновской жидкости и пороговом “подключении” фактора поперечной вязкости. Предложены эмпирические условия, накладываемые на соответствующие безразмерные комплексы, при выполнении которых происходит инициирование перехода. Рассмотрено применение предложенного подхода на примере известной задачи о пограничном слое на пластине, обтекаемой параллельным потоком.

**Ключевые слова:** ламинарно-турбулентный переход, реологическая модель, поперечная вязкость, локальные аналоги числа Рейнольдса.

## CONDITIONS FOR THE BEGINNING OF THE LAMINAR-TURBULENT TRANSITION BUILT ON THE HYPOTHESIS OF THE THRESHOLD “CONNECTION” OF THE CROSS-VISCOSITY FACTOR

V. N. Kolodezhnov

**Abstract.** An approach to predicting the onset of a laminar-turbulent transition is considered. The approach is based on the hypothesis of a possible extension of the Newtonian fluid rheological model and the threshold “connection” of the transverse viscosity factor. Empirical conditions are proposed that are imposed on the corresponding dimensionless complexes, under which the transition is initiated. The application of the proposed approach is considered on the example of the well-known problem of a boundary layer on a plate in a parallel flow.

**Keywords:** laminar-turbulent transition, rheological model, transverse viscosity, local analogues of the Reynolds number.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Как правило, основные известные теоретические подходы, касающиеся моделирования возникновения ламинарно-турбулентного перехода, предполагают наложение на изначально ламинарное течение, удовлетворяющее уравнениям Навье-Стокса, пульсационного (на модельном уровне, регулярного, периодического) фона возмущений скорости и давления, а затем выявления условий, при выполнении которых амплитуды таких возмущений или кинетическая энергия пульсаций будут в дальнейшем неограниченно возрастать с течением времени. Однако имеют место примеры, когда такой подход на основе линейной гидродинамической

теории устойчивости приводит к результатам, которые не соответствуют экспериментальным данным. Наиболее известным является пример прогнозирования абсолютной устойчивости течения Куэтта в плоском канале [1]. При этом эксперименты демонстрируют прямо противоположный результат, а именно, переход ламинарной формы течения в турбулентную. Такие примеры указывают на актуальность рассмотрения и других подходов при моделировании начальной стадии перехода.

Прежде всего, отметим, что наличие изначального фона возмущений может оказаться не единственным фактором, предопределяющим возникновение ламинарно-турбулентного перехода. В 1948 году был обнаружен эффект Томса, который демонстрирует аномалию для процесса ламинарно-турбулентного перехода. Проведенные позже исследования показали [2], что принципиально малые с точки зрения изменения вязкости и плотности добавки некоторых полимеров к жидкостям оказывают существенное влияние на ламинаризацию потока и снижение сопротивления при течении в каналах и обтекании тел. Результаты таких экспериментов послужили академику Седову Л.И. основой для предположения о том, "... что в турбулентных потоках могут проявляться реологические свойства жидкости, которые являются скрытыми, несущественными с точки зрения ламинарных движений жидкости" [3]. Подобные по смыслу оценки приводятся также в [4].

Отмеченные выше обстоятельства позволяют поставить вопрос о возможном учете влияния реологического фактора на прогнозирование начала ламинарно-турбулентного перехода.

Как правило, "границу", определяющую начало перехода к турбулентности, связывают с критическим значением числа Рейнольдса. Вводя тогда в рассмотрение такое критическое значение  $Re_{crit}$  этого параметра, условия реализации соответствующих режимов течения обычно формулируют следующим образом. Если для рассматриваемого течения выполняется условие  $Re < Re_{crit}$ , течение считается ламинарным. Если же  $Re > Re_{crit}$ , то реализуется турбулентный режим.

Однако такой подход, хотя и считается общепринятым, не является универсальным. Это обусловлено уже тем, что критическое значение числа Рейнольдса существенным образом зависит от формы и размеров границ области течения. В этой связи параметр  $Re_{crit}$  определяется, как правило, на основе экспериментальных данных для каждой конкретной схемы течения в отдельности. К этому следует добавить, что критическое число Рейнольдса характеризует процесс перехода весьма обобщенно. Здесь имеется в виду то, что оно не позволяет конкретизировать те зоны ("узкие" места) в пространственной области течения, где, собственно говоря, и происходит инициирование начала перехода ламинарной формы течения в турбулентную. В то же время с точки зрения технических приложений и выработки соответствующих предложений по оптимизации потоков представляет интерес именно постановка вопроса о локализации той пространственной зоны области течения, где конкретно инициируется начало перехода.

В этой связи при рассмотрении различных задач в разные годы неоднократно вводились в рассмотрение локальные аналоги числа Рейнольдса. Приведем в формате краткого обзора некоторые примеры подобных локальных безразмерных комплексов.

В [5] применительно к течению в пограничном слое приводится описание следующего параметра стабильности

$$\chi = \frac{\rho \cdot y^2}{\mu} \cdot \frac{dV}{dy}, \quad (1)$$

где  $V = V(y)$  – касательная к обтекаемой поверхности составляющая скорости, представленная в форме функции поперечной координаты  $y$ , отсчитываемой от поверхности по нормали к ней.

Такой безразмерный параметр (1) на некотором промежуточном, но конечном расстоянии от обтекаемой поверхности принимает максимальное значение  $\chi_{max}$ . Согласно [5] в окрестно-

сти такой пространственной точки и располагается зона первичной неустойчивости.

Несколько позже в работе [6] для течения в цилиндрическом канале был введен более сложный параметр посредством соотношения

$$Z = \frac{R \cdot \rho \cdot V}{\tau_w} \cdot \frac{\partial V}{\partial y},$$

где  $R$  — радиус канала;  $y$  — координата, отсчитываемая от стенки канала по нормали к ней внутрь области течения;  $\tau_w$  — касательное напряжение на стенке канала.

Развитие последнего результата нашло свое отражение в работе [7], где был предложен еще один вариант безразмерного комплекса, распределенного по области течения и локально характеризующего начало перехода ламинарной формы течения в турбулентную

$$K = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{|\text{grad}(\bar{V} \cdot \bar{V})|}{|\bar{F} - \text{grad}(P)|},$$

Принимая за основу уравнение динамики жидкости в форме Громеко, в работе [8], был рассмотрен еще один вариант локального безразмерного комплекса, представленного через вектор угловой скорости вращения частиц жидкости. При этом, как и выше, здесь предполагается следующее. Если в некоторой пространственной точке этот комплекс принимает свое максимальное значение и оно, к тому же достигает некоторого критического уровня, то такая точка начинает выступать в качестве “инициатора” ламинарно-турбулентного перехода. Похожий безразмерный комплекс был введен в рассмотрение в работе [9].

В [10], используя плотность полной энергии потока, был введен в рассмотрение следующий безразмерный комплекс

$$K = \frac{\partial P / \partial n + \rho \cdot V \cdot (\partial V / \partial n)}{(\mu \cdot \nabla^2 \bar{V})_\tau}. \quad (2)$$

Числитель этого комплекса представляет собой модуль градиента плотности полной энергии в направлении нормали  $n$  к линии тока, а, соответственно, знаменатель — модуль градиента плотности полной энергии в направлении касательной  $\tau$  к линии тока. Близкий подход к построению соответствующего локального безразмерного комплекса был рассмотрен в работе [11].

Результаты целого ряда исследований с использованием комплекса (2) по прогнозированию начала перехода для течений Куэтта, Пуазейля и ряда других схем течений нашли свое обобщение в монографии [12]. При этом, в [13] механизм возникновения турбулентности было предложено связывать с “искажением” профиля скорости при переходном течении и формированием на нем точек перегиба или излома.

Описанные выше безразмерные комплексы и параметры, введенные для локальной характеристики начала перехода ламинарной формы течения в турбулентную, учитывают не только скорость потока, но также и более “тонкие” (“дифференциальные”) свойства поля скорости. Это, вообще говоря, отличает их от традиционного числа Рейнольдса, учитывающего лишь характерную величину скорости. Вместе с тем, по своему смыслу такие комплексы являются аналогами числа Рейнольдса.

Безразмерные локальные комплексы, обзор которых приведен выше, тесно связаны посредством соответствующих зависимостей с традиционными числами Рейнольдса. Поэтому для всех этих комплексов, вполне естественно, что в различных цитированных выше работах [5-11] выдвигается примерно одна и та же гипотеза. Согласно этой гипотезе достижение в некоторой пространственной точке максимальным значением соответствующего комплекса некоторого критического уровня приводит к началу перехода ламинарной формы течения в турбулентную.

В данной работе рассматривается гипотеза о возможном расширении реологической модели ньютоновской жидкости за счет порогового подключения фактора поперечной вязкости. С привлечением такой гипотезы предпринимается попытка обосновать реологический фактор, как одну из возможных причин зарождения перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Для характеристики начала перехода введен в рассмотрение набор безразмерных локальных комплексов и на их основе предложены эмпирические условия начала перехода, с помощью которых проведен анализ прогнозирования перехода на тестовом примере известной задачи Блазиуса о пограничном слое на плоской пластине.

## 2. ГИПОТЕЗА О ВОЗМОЖНОМ РАСШИРЕНИИ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

В наиболее общем виде для несжимаемой жидкости связь между компонентами  $\tau_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  тензоров, соответственно, напряжений и скоростей деформаций может быть представлена в форме [14]

$$\tau_{ij} = -P \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \varphi_1(I_2, I_3) \cdot \varepsilon_{ij} + 4 \cdot \varphi_2(I_2, I_3) \cdot \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \cdot \varepsilon_{kj}; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (3)$$

где  $P$  — гидростатическое давление;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\varphi_1(I_2, I_3)$ ,  $\varphi_2(I_2, I_3)$  — заданные функции второго и третьего инвариантов  $I_2, I_3$  тензора скоростей деформаций. При этом функцию  $\varphi_2(I_2, I_3)$ , нередко, называют поперечной вязкостью.

Для широко распространенного частного случая, когда полагают

$$\varphi_1(I_2, I_3) \equiv \mu = const; \quad \varphi_2(I_2, I_3) \equiv 0, \quad (4)$$

модельное соотношение (3) существенно упрощается и принимает вид

$$\tau_{ij} = -P \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (5)$$

Модель (5) позволяет описывать механическое поведение классических ньютоновских вязких жидкостей. При этом, коэффициент  $\mu$  называют динамической вязкостью.

Вернемся к предположению Л. И. Седова относительно новых реологических свойств жидкостей, которые “. . . являются скрытыми, несущественными с точки зрения ламинарных движений. . .” [3], но подключаются и начинают проявлять себя при соответствующих условиях, определяя тем самым начало перехода к турбулентности.

Если принять точку зрения о возможности существования таких свойств, то в рамках исходных фундаментальных уравнений динамики, по сути, единственную “степень свободы” для продвижения в этом направлении на модельном уровне могут дать реологические соотношения (3) за счет соответствующего постулирования вида функций  $\varphi_1(I_2, I_3)$  и  $\varphi_2(I_2, I_3)$ , отличного от (4). В таком случае может быть поставлен вопрос о необходимости расширения реологической модели (4) ньютоновской жидкости.

Отметим следующее, важное для дальнейшего рассмотрения, обстоятельство. Как известно, моделирование течения в каналах для жидкостей, реология которых предполагает учет поперечной вязкости, приводит к решениям, демонстрирующим наличие вторичных течений [14]. Эти течения характеризуются поперечными составляющими скорости по отношению к изначальным линиям тока, полученным при математическом моделировании процесса того же течения, но без учета поперечной вязкости. В этой связи заметим, что схожее явление имеет место и при ламинарно-турбулентном переходе. Аналогия здесь понимается лишь исключительно в смысле “генерирования” поперечных составляющих скорости по отношению

к исходным ламинарным линиям тока. Действительно, на начальной стадии перехода всегда наблюдается “генерирование” ранее отсутствовавших поперечных составляющих скорости по отношению к сформировавшимся изначально ламинарным линиям тока. При этом особо подчеркнем, что переход ламинарной формы течения в турбулентную, связанный с “генерированием” этих ранее отсутствовавших поперечных составляющих скорости, происходит в “пороговом” формате. Здесь имеется в виду следующее. Как показывают многие экспериментальные данные, собственно переход “начинается” при превышении значением соответствующего параметра гидродинамического процесса некоторого критического уровня. В противном случае переход не может быть реализован и течение остается ламинарным.

Предположим, что граница области применимости ньютоновской модели несжимаемой жидкости “определяется” условием возможного “генерирования” поперечных составляющих скорости, которое, в свою очередь, будем рассматривать как необходимое, хотя и не достаточное, условие начала ламинарно-турбулентного перехода. В развитие этого необходимого условия далее речь должна идти об условии возможного нарастания (на модельном уровне - неограниченного нарастания) “генерируемых” (возникающих) поперечных составляющих скорости. В итоге такую ситуацию и предлагается в дальнейшем интерпретировать, как начало ламинарно-турбулентного перехода. Если же “генерируемые” поперечные составляющие скорости далее с течением времени не нарастают, то этот случай предлагается интерпретировать, как формирование вторичных ламинарных течений.

Принимая во внимание отмеченные выше особенности и пренебрегая влиянием третьего инварианта тензора скоростей деформаций на механическое поведение сплошной среды, можно предложить гипотезу о возможном расширении классической реологической модели (5) вязкой несжимаемой жидкости и представлении ее в форме [15, 16]

$$\tau_{ij} = -P \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij} + 4 \cdot \varphi_2(I_2, I_3) \cdot \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \cdot \varepsilon_{kj}; \quad i, j = 1, 2, .3; \quad (6)$$

$$\mu = const \quad ; \quad \varphi_2(I_2, I_3) \equiv \eta_c(I_2) = \begin{cases} 0; & |I_2| < I_{2\eta} \\ \eta(I_2); & |I_2| \geq I_{2\eta}; \end{cases} \quad (7)$$

где  $\eta_c(I_2)$  — поперечная вязкость, представленная в виде заданной функции от второго инварианта  $I_2$  тензора скоростей деформаций;  $I_{2\eta}$  - пороговое значение для модуля второго инварианта, при превышении которого “подключается” фактор поперечной вязкости.

Согласно этой модели, в той части области течения, где модуль второго инварианта тензора скоростей деформаций не превышает порогового уровня  $I_{2\eta}$ , в точности реализуется реологическая модель (5) и течение жидкости подчиняется уравнениям Навье-Стокса. В той же части области течения, где выполняется обратное условие

$$|I_2| \geq I_{2\eta}, \quad (8)$$

динамика жидкости должна описываться уже с учетом фактора поперечной вязкости на основе модели (6) с учетом (7).

В предлагаемой модели (6), (7) предполагается, что при учете дополнительных характеристик, которые, напрямую, не зависят от второго инварианта тензора скоростей деформаций, пороговое значение  $I_{2\eta}$  может быть представлено в виде функции этих характеристик.

### 3. ЛОКАЛЬНЫЕ БЕЗРАЗМЕРНЫЕ КОМПЛЕКСЫ И ЭМПИРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАЧАЛА ПЕРЕХОДА

Рассмотрим постановку следующей задачи. Пусть в рассматриваемой области пространства к некоторому моменту времени, который будем принимать в качестве начального, сфор-

мировались некоторые поля скорости и давления. Будем считать, что такое начальное распределение скорости и давления в точности удовлетворяет системе уравнений Навье-Стокса. При этом, ставя такие начальные условия, будем полагать, что в отдельной точке и некоторой ее окрестности внутри рассматриваемой области течения, тем не менее, выполняется условие (8). Это означает, что для жидкости, удовлетворяющей реологической модели (6), (7), сразу же после начального момента времени здесь начнет проявлять себя фактор поперечной вязкости.

Рассмотрим подход к описанию эволюции поля скоростей и давления в малой окрестности именно этой точки, для которой в начальный момент времени выполняется условие (8).

Свяжем локальную декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с рассматриваемой точкой, разместив в ней ее начало и сориентировав одну из осей, например ось  $Ox_1$ , по касательной к начальной линии тока, проходящей через эту точку области течения.

Обсудим, прежде всего, переход к безразмерной форме представления основных уравнений динамики, которые должны описывать эволюцию с течением времени  $t$  полей скорости  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ;  $i = 1, 2, 3$ ; и давления  $P = P(x_1, x_2, x_3, t)$  в окрестности такой точки из заявленного начального состояния.

Общепринятым шагом при реализации такого перехода является, как правило, постулирование ряда характерных для рассматриваемого процесса масштабных величин, с помощью которых, собственно говоря, и осуществляется процедура “обезразмеривания”.

Введем в рассмотрение поля векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{D}$ , которые определим следующим образом

$$\bar{E} = grad \left\{ P + \frac{\rho \cdot u^2}{2} \right\}; \quad \bar{D} = grad \left\{ 2 \cdot \mu \cdot \sqrt{|I_2|} \right\}; \quad (9)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$  – модуль скорости.

Вектор  $\bar{E}$  характеризует собой направление и “быстроту” (по пространственным координатам) максимального нарастания плотности полной энергии потока жидкости в произвольной точке области течения. В свою очередь, вектор  $\bar{D}$  также характеризует собой направление и “быстроту” максимального нарастания, но уже фактора вязкой диссипации.

Одной из основных масштабных величин, используемых при проведении процедуры “обезразмеривания”, выступает характерный линейный размер. По этому поводу заметим следующее. Поскольку предполагается рассмотреть лишь стартовый этап процесса эволюции начального распределения скорости и давления в некой малой окрестности рассматриваемой точки, использование в качестве линейного масштаба  $L_S$  какого либо “макrorазмера” всей области течения представляется в данном случае неоправданным.

В этой связи в качестве  $L_S$  предлагается принять некую условную величину, которая определяется локальными особенностями полей скорости и давления в окрестности рассматриваемой точки и может быть получена соответствующей комбинацией из отдельных параметров жидкости (плотность и вязкость), а также модулей векторов (9)

$$L_S = \frac{\mu \cdot E_S}{\rho \cdot u_S \cdot D_S}. \quad (10)$$

Подобным образом введем масштабные величины для давления и второго инварианта тензора скоростей деформаций

$$P_S = \frac{\rho^3 \cdot u_S^5}{\mu \cdot E_S}; \quad I_{2S} = \left( \frac{L_S \cdot D_S}{\mu} \right)^2 = \left( \frac{E_S}{\rho \cdot u_S} \right)^2. \quad (11)$$

Нижний индекс  $S$  в (10), (11) и далее указывает на то, что предлагаемые масштабные величины получены через соответствующие функции, вычисленные в рассматриваемой точке

(в начале локальной системы координат при  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 0$ ;) и в начальный момент времени  $t = 0$ .

С помощью, в том числе, и этих масштабных величин (10), (11) проекции векторов скорости  $u_i$  и плотности объемной силы  $F_i$ , а также координаты, время, давление и второй инвариант тензора скоростей деформаций могут быть в безразмерной форме представлены следующим образом

$$u'_i = \frac{u_i}{u_S}; \quad F'_i = \frac{F_i}{F_S} = \frac{L_S \cdot F_i}{\mu \cdot u_S^2}; \quad x'_i = \frac{x_i}{L_S}; \quad i = 1, 2, 3; \quad (12)$$

$$t' = \frac{t}{t_S} = \frac{u_S \cdot t}{L_S}; \quad P' = \frac{P}{P_S}; \quad I'_2 = \frac{I_2}{I_{2S}}. \quad (13)$$

Верхние штрихи здесь и далее используются для обозначения безразмерных величин.

Принимая тогда за основу соотношения (12), (13) приходим для жидкости, реологическая модель которой постулируется соотношениями (6), (7), к следующей безразмерной форме записи уравнений динамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + \sum_{j=1}^3 u'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = & -K_3 \cdot \frac{\partial P'}{\partial x'_i} + F'_i + \frac{2}{K_1} \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial x'_j} + \\ & + 4 \cdot \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[ K_4(I'_2) \cdot \sum_{k=1}^3 \varepsilon'_{ik} \cdot \varepsilon'_{kj} \right] \right\}; \quad i = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (14)$$

Естественно, что для системы уравнений (14) априори предполагается выполнение условия (8), которое в безразмерной форме удобно преобразовать к виду

$$K_2 > K_{2G}. \quad (15)$$

Здесь  $K_1, K_2, K_{2G}, K_3, K_4$  представляют собой безразмерные локальные комплексы, которые определяются следующим образом

$$K_1 = \frac{\rho \cdot L_S \cdot u_S}{\mu} = \frac{E_S}{D_S}; \quad K_2 = |I'_2| = \frac{|I_2| \cdot \rho^2 \cdot u_S^2}{E_S^2}; \quad K_{2G} = I'_{2\eta} = \frac{I_{2\eta} \cdot \rho^2 \cdot u_S^2}{E_S^2}; \quad (16)$$

$$K_3 = \frac{\rho^2 \cdot u_S^3}{\mu \cdot E_S}; \quad K_4(I'_2) = \eta'(I'_2) = \frac{\eta(I_2)}{\rho \cdot L_S^2}. \quad (17)$$

Сразу же отметим, что при введении безразмерных комплексов (16), (17) приняты соотношения (9), определяющие параметры  $E_S$  и  $D_S$ . Эти параметры в некоторых характерных точках области течения могут принимать и нулевые значения. Рассмотрение таких точек на предмет изучения дальнейшей эволюции течения в их малой окрестности, естественно, должно требовать повышенного внимания. Это обусловлено тем, что такие точки будут являться особыми для представленных выше безразмерных комплексов (16), (17). Здесь речь идет, в первую очередь, о точках экстремума или перегиба профилей скорости, а также о точках, в окрестности которых скорость остается постоянной либо изменяется линейным образом.

Формально система уравнений (14) совместно с условием неразрывности позволяют описывать развитие течения с учетом “генерирования” поперечных составляющих скорости (по отношению к исходным линиям тока) из начального стартового состояния в окрестности некоторой пространственной точки области течения, в которой выполняется условие (8) порогового подключения фактора поперечной вязкости. При этом существо соответствующих граничных и начальных условий в данном случае не обсуждается.

Выше отмечалось, что необходимое условие (8) или его безразмерная форма (15) предполагает в рамках реологической модели (6), (7) “подключение” фактора поперечной вязкости и, как следствие, “генерирование” поперечных составляющих скорости (по отношению к изначальным линиям тока), которые являются характерным признаком начальной стадии перехода.

Судя по “месторасположению” безразмерного комплекса  $K_1$  в уравнениях (14), можно видеть, что он представляет собой модифицированный вариант числа Рейнольдса.

Принимая во внимание особенности использования известных безразмерных локальных комплексов [5-12], сделаем по аналогии с уже изложенным выше во введении следующее предположение.

Пусть превышение максимальным значением безразмерного комплекса  $K_1$  некоторого критического уровня  $K_{1T}$  приводит к неограниченному (по крайней мере, на модельном уровне) нарастанию формирующихся при выполнении (15) поперечных составляющих скорости, что и предлагается далее интерпретировать, как начало ламинарно-турбулентного перехода.

Заметим, что уравнения (14), наряду с  $K_1$ , содержат еще один, не зависящий от него, безразмерный комплекс  $K_3$ . Тогда будем полагать, что введенные выше пороговые значения соответствующих безразмерных комплексов могут представлять собой функции вида

$$K_{2G} = K_{2G}(K_3); \quad K_{1T} = K_{1T}(K_3). \quad (18)$$

При этом, вполне естественно, что все безразмерные комплексы  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , в свою очередь, представляют собой функции положения рассматриваемой точки области течения, но уже в глобальной системе координат.

На основе обработки широкого круга известных экспериментальных данных, библиография которых приводится в [15, 16], были предложены эмпирические аппроксимации для (18).

В частности, в рамках обсуждаемого подхода к прогнозированию начала перехода предполагается, что при превышении модулем второго инварианта порогового значения в некоторой точке  $\bar{X}$  области течения и выполнении условия (15) в форме

$$K_2(\bar{X}) > K_{2G}(K_3(\bar{X})) = k_0 + \frac{k_1}{K_3(\bar{X}) - k_2}; \quad K_3(\bar{X}) > k_2, \quad (19)$$

происходит “подключение” фактора поперечной вязкости и, соответственно, начинается процесс “генерирования” поперечных составляющих скорости по отношению к линиям тока изначального ламинарного течения.

Такая точка  $\bar{X}$  далее должна приниматься за начало отсчета локальной системы координат, в которой развитие течения в некоторой окрестности этой точки должно удовлетворять системе уравнений (14).

По сути, условие (19) определяет в области течения некоторую зону  $\bar{X} \in G$ , внутри которой оказывается возможным “генерирование” поперечных составляющих скорости.

Если же в рассматриваемой точке условие (19) не выполняется, то предполагается, что поперечная вязкость не проявляет себя и “генерирование” поперечных составляющих скорости не происходит. Тогда поведение жидкости соответствует классической ньютоновской модели (4), (5) и ее течение описывается традиционной системой уравнений Навье-Стокса.

Еще одно эмпирическое условие, также как и (19) предложенное в [15, 16] на основе обработки известных экспериментальных результатов, представляет собой условие неограниченного возрастания “генерируемых” поперечных составляющих скорости и может быть представлено следующим образом

$$\max_{\bar{X} \in G} \{ K_1(\bar{X}) \} > K_{1T}(\bar{X}) = q_0 \cdot [K_3(\bar{X})]^2. \quad (20)$$



Числовые значения эмпирических коэффициентов  $k_0, k_1, k_2, q_0$ , в (19), (20) приводятся в [16].

Таким образом, если максимальное значение безразмерного комплекса  $K_1$ , которое достигается в некоторой точке  $\bar{X} \in G$ , где выполняются условия (19), дополнительно удовлетворяет и условию (20), то такую пространственную точку (и ее окрестность) предлагается рассматривать в качестве инициатора ламинарно-турбулентного перехода.

В заключение этого раздела следует особо обратить внимание на следующее. Предлагаемые условие генерирования поперечных составляющих скорости (19), а также условие (20) неограниченного (на модельном уровне) возрастания этих составляющих следует рассматривать лишь в формате некоей эмпирической оценки, поскольку при их обосновании использовались весьма “разнородные” экспериментальные данные.

Эти данные были получены в разное время, на различных экспериментальных установках, в различных условиях, при использовании различной методики фиксации начала перехода. Ссылки на соответствующие экспериментальные работы приводятся в [15, 16]. Принимая во внимание сказанное, представленные выше условия начала перехода (19), (20), предлагается считать относящимися не к каким-то идеализированным условиям (когда специально проводится предварительная подготовка по снижению начальных пульсаций потока), а к течениям, которые реализуются, скорее, “штатно” (естественным образом) в самых различных технологических процессах.

#### 4. ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР АНАЛИЗА НАЧАЛА ПЕРЕХОДА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим классическую задачу Блазиуса о течении в пограничном слое при обтекании пластины параллельным потоком. Не смотря на то, что решение этой задачи было предложено еще в 1908 году, тем не менее, такая схема течения нередко используется в качестве тестового примера при рассмотрении различных вопросов, связанных с изучением начала перехода.

Эволюция структуры течения в пограничном слое на стадии зарождения турбулентности была исследована в работе [17]. В [18] анализ начала перехода в пограничном слое был проведен на основе безразмерного комплекса (2). При этом собственно механизм зарождения турбулентности было предложено связывать с превышением градиентом полной механической энергии соответствующего критического уровня там, где на профиле скорости формируются соответствующие “выбросы”. В более поздней работе Dou H.S. [19] приводится схожая первопричина начала перехода. В частности отмечается, что ламинарно турбулентный переход в пограничном слое может быть обусловлен разрывом на профиле скорости.

Проведем прогнозирование начала перехода с привлечением условий (19), (20). Предполагая постоянство давления, компоненты скорости в безразмерной форме записи могут быть представлены следующим образом [20]

$$u'_x(x', y') = \frac{df}{d\xi}; \quad u'_y(x', y') = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x'}} \cdot \left( \xi \cdot \frac{df}{d\xi} - f \right); \quad (21)$$

Здесь

$$u'_x = \frac{u_x}{U}; \quad u'_y = \frac{u_y}{U}; \quad \xi = y \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot U}{\mu \cdot x}}; \quad x' = \frac{\rho \cdot x \cdot U}{\mu}; \quad y' = \frac{\rho \cdot y \cdot U}{\mu},$$

где  $U$  – скорость набегающего потока;  $x$  – продольная координата, отсчитываемая вдоль пластины от ее передней кромки;  $y$  – поперечная координата, отсчитываемая от поверхности пластины.

В соотношениях (21) функция  $f(\xi)$  находится из решения дифференциального уравнения [25]

$$2 \cdot \frac{d^3 f}{d\xi^3} + f \cdot \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0;$$

при следующих граничных условиях

$$\xi = 0; \quad f = 0; \quad \frac{df}{d\xi} = 0; \quad \xi \rightarrow \infty; \quad \frac{df}{d\xi} = 1 \quad .$$

Принимая за основу (21), с учетом (16), (17), (19), (20) были проведены численные эксперименты по прогнозированию начала перехода в пограничном слое на пластине, результаты которых представлены на рис. 1.

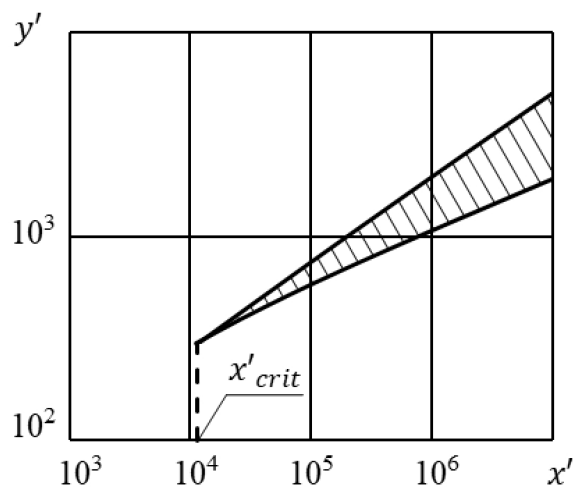


Рис. 1. Область иницирования начала перехода.

Здесь штриховкой отмечена область  $G$ , внутри которой ожидается иницирование начала перехода. Естественно, что в первую очередь речь идет о крайней левой точке (острый “носик” заштрихованной области) с координатой  $x'_{crit} \approx 1.142 \cdot 10^4$ . Этот результат заметно меньше известных экспериментальных значений на уровне  $x'_{crit} \approx (3.5 \div 5) \cdot 10^5$ , которые приводятся в [20]. Известны и более высокие значения этого параметра, получаемые на основе специально поставленных экспериментов за счет снижения начальной степени турбулентности набегающего потока до чрезвычайно низкого уровня порядка 0.0002 [21].

Однако, принимая во внимание замечание, сделанное в конце третьего раздела, заметим, что такое расхождение является приемлемым и может рассматриваться, как нижняя (с соответствующим запасом) оценка для положения критической точки иницирования начала перехода.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен подход к прогнозированию начала ламинарно-турбулентного перехода на основе гипотезы о пороговом подключении фактора поперечной вязкости. Представлены эмпирические условия перехода, накладываемые на соответствующие безразмерные комплексы, которые построены исключительно на основе инвариантных величин для полей скорости и давления. Последнее обстоятельство указывает на универсальность таких условий в том смысле, что они, по сути, без изменения своего вида могут быть использованы для широкого круга схем течения (течения в каналах различного профиля, пленочные течения, обтекания

профилей и т.п.), базируясь лишь на основе известных полей скорости и давления, формирующихся для этих течений.

Реализация предлагаемого подхода на примере известной задачи Блазиуса о начале перехода в пограничном слое на пластине, обтекаемой параллельным потоком, продемонстрировала удовлетворительное согласие с известными экспериментальными данными.

Возможность локализации для произвольного потока того места в области течения, где выполняются рассматриваемые условия (19), (20), создает предпосылки для подготовки в дальнейшем технических предложений по управлению процессом начала перехода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линейные задачи теории гидродинамической устойчивости и численные методы их решения / Р. В. Бирих, Р. Н. Рудаков, П. В. Трусов, А. И. Швейкин. — Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 2009. — 75 с.
2. Корнилов, В. И. Проблемы снижения турбулентного трения активными и пассивными методами (Обзор) / В. И. Корнилов // Теплофизика и аэромеханика. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 183–208.
3. Седов, Л. И. Изобретение физических моделей (Выступление перед участниками Конгресса по механике в Канаде 17 мая 1971 г.) / Л. И. Седов // Размышления о науке и об ученых / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1980. — С. 119–123.
4. Седов, Л. И. О перспективных направлениях и задачах в механике сплошных сред / Л. И. Седов // Прикладная математика и механика. — 1976. — Т. 40, вып. 6. — С. 963–980.
5. Rose, H. Elementary Mechanics of Fluids / H. Rose. — N. Y. : Dover Publications, 1946. — 376 p.
6. Ryan, N. W. Transition from laminar to turbulent flow in pipes / N. W. Ryan, M. Johnson // AIChE J. — 1959. — V. 5, № 4. — P. 433–435.
7. Hanks, R. W. The Laminar-Turbulent Transition for flow in Pipes, Concentric Annuli and Parallel Plates / R. W. Hanks // A. I. Ch. E. Journal. — 1963. — V. 9, № 1. — P. 45–48.
8. Артюшков, Л. С. Переход от ламинарного течения к турбулентному для степенных чисто-вязких неньютоновских жидкостей / Л. С. Артюшков // Труды ЛКИ. — 1974. — Вып. 89. — С. 19–24.
9. Колодежнов, В. Н. Об одном безразмерном комплексе для моделирования течений вязкой неньютоновской жидкости / В. Н. Колодежнов // Современные проблемы механики и прикладной математики: Сборник трудов международной школы-семинара. В 2 ч. Ч. 1. — Воронеж, 2005. — С. 166–168.
10. Dou, H. S. Mechanism of flow instability and transition to turbulence / H. S. Dou // International Journal Non-Linear Mechanics. — 2006. — V. 41(4). — P. 512–517.
11. Tao, J. J. Local Reynolds number and thresholds of transition in shear flows / J. J. Tao, S. Y. Chen, W. D. Su // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. — 2013. — V. 56, iss. 2. — P. 263–269.
12. Dou, H. S. Origin of Turbulence. Energy Gradient Theory / H. S. Dou. — Singapore : Springer. — 2022. — 513 p.
13. Dou, H. S. No existence and smoothness of solution of the Navier-Stokes equation / H. S. Dou // Entropy. — 2022. — V. 24 (3). — P. 339.
14. Литвинов, В. Г. Движение нелинейно вязкой жидкости / В. Г. Литвинов. — М. : Наука, 1982. — 376 с.
15. Kolodezhnov, V. N. An interpretation of the Laminar-Turbulent Transition Startup against the Consideration of the Transverse Viscosity Factor / V. N. Kolodezhnov // Journal of Physics. Conference Series. — 2018. — V. 973 (012009). — P. 1–15.
16. Kolodezhnov, V. N. Modeling of the initial stage of secondary flows formation for a fluid,

the rheological model of which implies a threshold "addition" of the transverse viscosity factor / V. N. Kolodezhnov // Journal of Physics. Conference Series. — 2019. — V. 1203 (012013). — P. 1–10.

17. Structure evolution at early stage of boundary-layer transition: simulation and experiment / X. Y. Jiang et al. // Journal of Fluid Mechanics. — 2020. — V. 890: A11–1–35.

18. Dou, H. S. Stability of boundary layer flow based on energy gradient theory / H. S. Dou, W. Xu, B. C. Khoo // Modern Physics Letters. B. — 2018. — V. 32, № 12. 1840003. — P. 1–5.

19. Dou, H. S. Transition of laminar flow to turbulence in boundary layer on a flat plate / H. S. Dou // Technical Report, Zhejiang\_Sci-Tech University. 2021.

20. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. — М. : Наука, 1974. — 712 с.

21. Subauer, G. B. Laminar boundarylayer oscillations and stability of laminar flow / G. B. Subauer, H. K. Skramstad // Journal of the Aeronautic Sciences. — 1947. — V. 14, № 2. — P. 69–78.

## REFERENCES

1. Biriĥ R.V., Rudakov R.N., Trusov P.V., Shvejĥin A.I. Linear problems of the theory of hydrodynamic stability and numerical methods for their solution. [Biriĥ R.V., Rudakov R.N., Trusov P.V., Shvejĥin A.I. Linejnye zadachi teorii gidrodinamicheskoj estojchivosti i chislennye metody ih reshenija]. Perm: PSTU, 2009, 75 p.

2. Kornilov V.I. Problems of Reducing Turbulent Friction by Active and Passive Methods (Review). [Kornilov V.I. Problemy snizhenija turbulentnogo trenija aktivnymi I passivnymi metodami (Obzor)]. *Teplofizika i aeromehanika — Thermophysics and Aeromechanics*, 2005, vol. 12, no. 2, pp. 183–208.

3. Sedov L.I. The invention of physical models (Speech to the participants of the Congress on Mechanics in Canada on May 17, 1971). Reflections on science and scientists. [Sedov L.I. Izobretenie fizicheskikh modelej (Vystuplenie pered uchastnikami Kongressa po mehanike v Kanade 17 maja 1971 g). Razmyshlenija nauke b ob uchenyh]. Moskva: Nauka, 1980, pp. 119–123.

4. Sedov L.I. On perspective directions and problems in continuum mechanics. [Sedov L.I. O perspektivnyh napravlenijah i zadachah v mehanike cploshnyh sred]. *Prikladnaja matematika i mehanika — Applied mathematics and mechanics*, 1976, vol. 40, iss. 6, pp. 963–980.

5. Rose H. Elementary Mechanics of Fluids. N.Y.: Dover Publications, 1946, 376 p.

6. Ryan N.W., Johnson M.. Transition from laminar to turbulent flow in pipes. *AIChE J.* 1959, vol. 5, no. 4, pp. 433–435.

7. Hanks R.W. The Laminar-Turbulent Transition for flow in Pipes, Concentric Annuli and Parallel Plates. *A.I.Ch.E. Journal*, 1963, vol. 9, no. 1, pp. 45–48.

8. Artyushkov L.S. Transition from laminar to turbulent flow for power-law purely viscous non-Newtonian fluids. [Artyushkov L.S. Perehod ot laminarnogo techenija k turbulentnomu dlja stepennyh chisto-vjazkih nen'utonovsrih zhidkostej]. *Trudy Leningradskogo korabkestroitel'nogo instituta — Proceedings of LSI*, 1974, iss. 89, pp. 19–24.

9. Kolodezhnov V.N. On one dimensionless complex for modeling the flows of a viscous non-Newtonian fluid. [Kolodezhnov V.N. Ob odnom bezrazmernom komplekse dlja modelirovanija techenij vjazkoj ntn'utonovskoj zhidkosti]. *Sovremennye problem mehaniki i prikladnoj matematiki: Sbornik trudov mezhdunarodnoj shkoly-seminara — Modern problems of mechanics and applied mathematics: Proceedings of the international school-seminar*, Part 1. Voronezh, 2005. pp. 166–168.

10. Dou H.S. Mechanism of flow instability and transition to turbulence. *International Journal Non-Linear Mechanics*, 2006, vol. 41(4), pp. 512–517.

11. Tao J.J., Chen S.Y., Su W.D. Local Reynolds number and thresholds of transition in shear flows. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2013, vol. 56, iss. 2, pp. 263–269.

12. Dou H.S. Origin of Turbulence. Energy Gradient Theory. Singapore: Springer, 2022, 513 p.

13. Dou H.S. No existence and smoothness of solution of the Navier-Stokes equation. *Entropy*, 2022, vol. 24 (3), p. 339.
14. Litvinov W.G. Motion of a non-linearly viscous fluid. [Litvinov W.G. Dvizhenie nelinejno vjazkoy zhidkosti]. Moskva: Nauka, 1982, 376 p.
15. Kolodezhnov V.N. An interpretation of the Laminar-Turbulent Transition Startup against the Consideration of the Transverse Viscosity Factor. *Journal of Physics. Conference Series*, 2018, vol. 973 (012009), pp. 1–15.
16. Kolodezhnov V.N. Modeling of the initial stage of secondary flows formation for a fluid, the rheological model of which implies a threshold "addition" of the transverse viscosity factor. *Journal of Physics. Conference Series*, 2019, vol. 1203 (012013), pp. 1–10.
17. Jiang X.Y., Lee C.B., Chen X., Smith C.R., Linden P.F.. Structure evolution at early stage of boundary-layer transition: simulation and experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, vol. 890: A11–1–35.
18. Dou H.S., Xu W., Khoo B.C. Stability of boundary layer flow based on energy gradient theory. *Modern Physics Letters. B*, 2018, vol. 32, no. 12, 1840003. pp. 1–5.
19. Dou H.S. Transition of laminar flow to turbulence in boundary layer on a flat plate. Technical Report, Zhejiang\_Sci-Tech University, 2021.
20. Schlichting G. Theory of the boundary layer. [Schlichting G. Teorija pograničnogo sloja]. Moskva: Nauka, 1974, 712 p.
21. Subauer G.B., Skramstad H.K. Laminar boundarylayer oscillations and stability of laminar flow. *Journal of the Aeronautic Sciences*, 1947, vol. 14, no. 2, pp. 69–78.

*Колодежнов Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", Воронеж, Россия  
E-mail: kvn117@mail.ru*

*Kolodezhnov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Military Educational and Scientific Center of the Air Force "Air Force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia  
E-mail: kvn117@mail.ru*