УДК 519.2

# РАЗВИТИЕ МЕТОДА БРАНДОНА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Л. Т. Епифанцев, А. С. Бабкин**

*Липецкий государственный технический университет*

Поступила в редакцию 05.04.2020 г.

**Аннотация**. В работе изложен подход к аппроксимации функций многих переменных и построению моделей множественной регрессии на основе метода Брандона. Авторы предлагают применять данный метод n! раз и на основе полученных функций построить новую, требуя ее минимального расхождения с табличными (экспериментальными) данными.

**Ключевые слова**: аппроксимация, функции многих переменных, регрессионный анализ, факториал.

# EVOLUTION OF THE BRANDON METHOD AS REGARDS TO APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF MANY VARIABLES

**L. T. Epifantsev, A. S. Babkin**

**Abstract**. The article presents an approach to approximating the functions of many variables and constructing multiple regression models based on the Brandon method. The authors suggest using this method n! times and based on the obtained functions build a new one. In concurrence with this, it's needed the minimum discrepancy of new function with tabular (experimental) data.

**Keywords**: approximation, functions of many variables, regression analysis, factorial.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается один из возможных подходов восстановления функции многих переменных по табличным данным, согласно которому [1], находится зависимость вида

$$y = a \cdot f_1(x_1)\, f_2(x_2) \dots . f_n(x_n)$$

где неизвестные функции $f_i(x_i)$ определяют МНК как функциональную зависимость между $y_{i+1} = y_i / f_i(x_i)$ и соответствующим фактором $x_{i+1}$. Коэффициент $a$ при объеме выборки $k$ рассчитывается как $\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} y_{ni}$.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для $m$ наблюдений функции многих переменных, как и в случае стандартной процедуры регрессионного анализа, данные принято представлять в виде таблицы

| № | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_i$ | $\dots$ | $x_n$ | $u$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_{11}$ | $x_{21}$ | $\dots$ | $x_{i1}$ | $\dots$ | $x_{n1}$ | $u_1$ |
| 2 | $x_{12}$ | $x_{22}$ | $\dots$ | $x_{i2}$ | $\dots$ | $x_{n2}$ | $u_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $j$ | $x_{1j}$ | $x_{2j}$ | $\dots$ | $x_{ij}$ | $\dots$ | $x_{nj}$ | $u_j$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $m$ | $x_{1m}$ | $x_{2m}$ | $\dots$ | $x_{im}$ | $\dots$ | $x_{nm}$ | $u_m$ |

Далее набор независимых переменных $x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n$ обозначим через $X \in R^n$, то есть $X = (x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)$, а его конкретную реализацию в j-том опыте через $X_j = (x_{1j},x_{2j},\dots,x_{ij},\dots,x_{nm})$.

Соответственно, $u_j \left(j = \overline{1,m}\right)$ есть набор значений скалярной функции векторного аргумента или набор откликов в случае множественной регрессии. Требуется аппроксимировать функцию, заданную таблично, или построить модель множественной регрессии. Иными словами – получить зависимость вида $U = f(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)$ или в сокращенной форме $U = f(X)$.

При этом необходимо добиться наилучшего приближения $U_j$ к $u_j \left(j = \overline{1,m}\right)$ в том смысле, что

$$\sum_{j=1}^{m} \left[f\left(X_j\right) - u_j\right]^2 \to \min. \tag{1}$$

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для нахождения $f\left(X_j\right)$ предлагается:

1) по методу Брандона [1] построить $n!$ функций $f_1(X),f_2(X),\dots,f_{n!}(X)$; такое количество функций диктуется числом перестановок компонент $x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n$ вектора $X$;

2) в качестве $U = f(X)$ выбрать одну из двух функций

$$U = \sum_{k=1}^{n!} \alpha_k f_k\left(X\right) \tag{2}$$

или

$$U = \beta \sqrt[n!]{\prod_{k=1}^{n!} f_k\left(X\right)}. \tag{3}$$

Параметры $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n!}$ для (2) и $\beta$ для (3) находят из условия (1). При этом для определения $\alpha_k \left(k = \overline{1\dots n!}\right)$ и $\beta$ возникают, соответственно, система $n!$ линейных алгебраических уравнений или одно линейное уравнение.

Рассмотрим частный случай, когда $n = 2$. Здесь удобнее положить $x_1 \equiv x$, $x_2 = y$. Тогда $X = (x,y)$, а $X_j = (x_j,y_j)$. Таблица в этом случае примет вид

| № | $x$ | $y$ | $u$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | $y_1$ | $u_1$ |
| 2 | $x_2$ | $y_2$ | $u_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $j$ | $x_j$ | $y_j$ | $u_j$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $m$ | $x_m$ | $y_m$ | $u_m$ |

Пусть теперь $\varphi(X) = \varphi(x,y)$ и $g(X) = g(x,y)$ те функции, которые найдены по методу Брандона [1]. Введем обозначения $\Phi_j = \varphi(x_j,y_j)$ и $G_j = g(x_j,y_j)$.

Для функции $U = f(X)$ имеем два представления

$$U = \alpha_1\varphi(X) + \alpha_2 g(X) \tag{4}$$

или

$$U = \beta\sqrt{\varphi(X)\cdot g(X)}. \tag{5}$$

Утверждение. Наилучший аппроксимирующий результат для (4) и (5) соответствует следующим значениям параметров $\alpha_1$, $\alpha_2$ для (4) и $\beta$ для (5)

$$\alpha_1 = \frac{(u,\Phi)\cdot||G||^2 - (u,G)\cdot(\Phi,G)}{||\Phi||^2\cdot||G||^2 - (\Phi,G)^2}, \tag{6}$$

$$\alpha_2 = \frac{(u,G)\cdot||\Phi||^2 - (u,\Phi)\cdot(\Phi,G)}{||\Phi||^2\cdot||G||^2 - (\Phi,G)^2}, \tag{7}$$

$$\beta = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} u_j\cdot\sqrt{\varphi_j\cdot g_j}}{(\Phi,G)}\quad, \tag{8}$$

где $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_m)$, $G = (G_1,G_2,\ldots,G_m)$, $||\Phi||,||G||$ — нормы векторов.

Вопрос о том, которая из функций (4) или (5) дает меньшую невязку проверяется их сравнением.

Отметим то преимущество предлагаемого подхода, что каждый раз при построении любой из функций $f_k(X)$ исследователь имеет дело с определением параметров функций только одной переменной. При этом поле корреляции представляется наглядно исследователю, который с большей легкостью может выбирать форму кривой на каждом из $n$ шагов. Более того, при дальнейшем определении параметров $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n!}$ предложенный метод позволяет добиться отражения всех особенностей функции $U : R^n \to R$ в большей степени, чем при однократном применении метода Брандона.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brandon, D. B. Developing Mathematical Models for Computer Control / D. B. Brandon // Instrument Society of America Journal. — 1959. — № 6. — p. 70–73.

## REFERENCES

1. Brandon D.B. Developing Mathematical Models for Computer Control. Instrument Society of America Journal, 1959, no. 6, p. 70–73.

*Епифанцев Леонид Трофимович, старший преподаватель кафедры Высшей математики Липецкого государственного университета, Липецк, Россия*

*Epifantsev Leonid Trofimovich, senior lecturer at the Department of Higher Mathematics of Lipetsk State University, Lipetsk, Russia*

*Бабкин Александр Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры оборудования и процессов машиностроительных производств, Липецкий государственный университет, Липецк, Россия*
*E-mail: bas-43@yandex.ru*

*Babkin Aleksandr Sergeevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Equipment and Processes of Engineering Production, Lipetsk State University, Lipetsk, Russia*
*E-mail: bas-43@yandex.ru*