

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ

А. А. Гребенева, В. А. Лукьяненко, Ю. А. Хазова

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

Поступила в редакцию 15.02.2022 г.

Аннотация. Рассматриваются феноменологические модели спинового горения на плоскости и кольцевой области. Открытие нестационарных эффектов, автоколебательно-го и спинового режимов распространения зоны экзотермической реакции, принадлежит Я. Б. Зельдовичу, развившему теорию горения конденсированных систем. Для задачи на всей плоскости решение строится с помощью преобразования Фурье, получено эквивалентное нелинейное интегральное уравнение. Представление уравнения в полярной системе координат в случае процессов, сосредоточенных на кольце радиуса R приводит к наиболее простому нелинейному уравнению. Для модели горения тонкостенного цилиндра проведен бифуркационный анализ и сформулированы утверждения об устойчивости и динамике рождающихся решений. Получена зависимость автомодельных циклов горения от пространственной переменной. Приводятся результаты численных расчетов.

Ключевые слова: нелинейное уравнение спинового горения, нестационарные эффекты, решения типа бегущих волн, метод Галеркина, бифуркация решений.

NON-STATIONARY REGIMES OF THE PHENOMENOLOGICAL MODEL OF SPIN COMBUSTION

A. Grebeneva, V. A. Lukianenko, Yu. A. Khazova

Abstract. The article is concerned with phenomenological models of spin combustion. The discovery of non-stationary effects, autooscillating and spin modes of exothermic reaction zone propagation has been observed by J. B. Zeldovich, who developed the theory of burning condensed systems. For the whole-plane problem, the solution is reformulated by an equivalent integral equation on the Fourier transform. For the model of burning of thin-walled cylinder bifurcation analysis was conducted and statements about stability and dynamics of emerging solutions were formulated. The dependence of automodel combustion cycles on the spatial variable is obtained. The results of numerical calculations are given.

Keywords: nonlinear equation of spin combustion, non-stationary effects, running-wave solutions, Galerkin's method, bifurcation solutions.

ВВЕДЕНИЕ

Феноменологическое уравнение спинового горения предложено А. П. Алдушиным, Я. Б. Зельдовичем и Б. А. Маломедом [1–3]

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \xi &= 2\varepsilon \left[\dot{\xi} \left(1 - \frac{4}{3}\dot{\xi}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{\xi} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta \dot{\xi}} \right], \\ \xi(x + 2\pi R, t) &= \xi(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\xi = \xi(x, t)$ – функция, описывающая фронт распространения реакции горения. Инкремент неустойчивости $0 < \varepsilon \ll 1$, $\lambda > 0$ – корреляционная длина теплопроводности связей между

соседними участками фронта, $\beta > 0$ – коэффициент нелокальной связи участков фронта. Точка означает дифференцирование по времени, а Δ – одномерный лапласиан.

В феноменологическом уравнении учитывается факт, обнаруженный экспериментально, наличия максимума в спектре инкрементов возмущений при определенной длине волны искривленного фронта реакции. В уравнении (1) учитываются режимы нестационарного распространения фронта: автоколебательная неустойчивость плоского фронта, которая стабилизируется нелинейными эффектами и режим взаимодействия тепловых слоев, примыкающих к зоне экзотермической реакции.

Структура слоев определяется скоростью и температурой прилегающего участка поверхности реакции, а также распределением температуры вдоль всего фронта реакции.

Уравнение представляет собой сингулярно возмущенное нелинейное параболическое уравнение ван-дер-полевского типа. С его помощью можно исследовать пространственные нестационарные эффекты горения полого цилиндра радиуса R . Представляет интерес динамика бегущих волн при изменении параметра R [4–7].

Динамика бегущих волн исследовалась в [5] методом квазинормальных форм. Для таких уравнений Е. П. Беланом и соавторами развит метод, в котором сочетаются метод Галеркина и метод Крылова – Боголюбова – Митропольского – Самойленко. С его помощью найден критерий устойчивости бегущих волн [4, 8], связанный с, так называемым, принципом 1:2 взаимодействия, а также установлено явление высокомодовой буферности [8, 9]. Учитывая, что поведение решений зависит от увеличения параметра R , то представляет интерес рассматривать уравнения на плоскости, а также заменить оператор $\sqrt{-\Delta}$ на псевдодифференциальный оператор $(-\Delta)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ [10].

В первом разделе работы установлена связь задачи Коши для феноменологического уравнения спинового горения на \mathbb{R}^2 с нелинейным интегральным уравнением типа свертки [11]. Во втором разделе проводится бифуркационный анализ для тонкостенного цилиндра.

1. ЗАДАЧА СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ НА ВСЕЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим задачу спинового горения на \mathbb{R}^2 с оператором $(-\Delta)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$:

$$\ddot{u} + u = 2\varepsilon \left[\dot{u} (1 - \mu \dot{u}^2) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{u} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} (-\Delta)^\alpha \dot{u} \right], \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \mu = \frac{4}{3}, \quad (2)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \dot{u}(x, y, 0) = u_1(x, y). \quad (3)$$

Оператор Лапласа Δ действует по пространственным переменным x, y .

Задачи (1) и (2)–(3) можно записать в виде эквивалентного операторного уравнения в банаховом пространстве

$$\begin{aligned} u_t &= Au, \quad u = (u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -u_1 + 2\varepsilon \left[u_2 (1 - \mu u_2^2) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta u_2 + \frac{\beta\lambda}{2\pi} (-\Delta)^\alpha u_2 \right]. \end{aligned}$$

Если в начальных условиях $u_{10}, u_{20} \in E = \{u = (u_1, u_2) : u_j \in L_2, j = 1, 2\}$, то задача имеет единственное решение, принадлежащее $L_\infty([0, T], E)$. А полугруппа $S_t(E, E)$, соответствующая $u_t = Au(E, E)$, – непрерывна. Доказательство ограниченности полугруппы $\{S_t\}$ следует из оценки

$$\|u(t)\|_E^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \leq \|u_{10}\|^2 + \|u_{20}\|^2 + \varepsilon CT.$$

Непрерывность следует из оценки

$$\|w_t\|^2 + \|w(t)\|^2 = C \left(\|w_t(0)\|^2 + \|w(0)\|^2 \right),$$

где $w = u - v$, u, v – решение задачи.

Для решения задачи (2)–(3) во всем пространстве применим двойное преобразование Фурье:

$$U(\xi, \eta, t) = (Fu)(\xi, \eta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy.$$

Действие операторов $-\Delta$, $(-\Delta)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ определяется через преобразование Фурье F (для тонкого конца через дискретное преобразование Фурье W) в гильбертовом пространстве $H^2 = W_2^2 \subset L_2$ (или H^s) в соответствии с [10].

Утверждение 1. Задача Коши (2)–(3) для нелинейного уравнения спинового горения представима в виде нелинейного интегрального уравнения вида

$$u(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}^2} (k_1(x - \xi, y - \eta, t) u_0(\xi, \eta) + k_2(x - \xi, y - \eta, t) u_1(\xi, \eta)) d\xi d\eta - \quad (4)$$

$$- 2\mu\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (k_3(x - \xi, y - \eta, t) u^3(\xi, \eta, \tau)) d\xi d\eta d\tau,$$

где $k_j(x, y, t) = F^{-1} \{K_j(\xi, \eta, t)\}(x, y, t)$, $j = 1, 2, 3$;

$$K_1(\xi, \eta, t) = e^{a(\xi, \eta)t} \left[\cos b(\xi, \eta)t - a(\xi, \eta) \frac{\sin b(\xi, \eta)t}{b(\xi, \eta)} \right]; \quad K_2(\xi, \eta, t) = K_3(\xi, \eta, t) = e^{a(\xi, \eta)t} \frac{\sin b(\xi, \eta)t}{b(\xi, \eta)};$$

$$a(\xi, \eta) = \varepsilon \left[1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{\lambda\beta}{2\pi} (\xi^2 + \eta^2)^\alpha \right] = \varepsilon \left[1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \rho^2 + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \rho^{2\alpha} \right] = \varepsilon q(\rho);$$

$$b(\xi, \eta) = \left(1 - \varepsilon^2 \left[1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{\lambda\beta}{4\pi} (\xi^2 + \eta^2)^\alpha \right]^2 \right)^{1/2} = (1 - \varepsilon^2 q^2(\rho))^{1/2},$$

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta.$$

Доказательство. Для задачи (2)–(3) во всем пространстве применим двойное преобразование Фурье:

$$U(\xi, \eta, t) = (Fu)(\xi, \eta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) e^{i(x\xi + \eta y)} dx dy.$$

В образах Фурье для (2)–(3) получаем задачу Коши с коэффициентами, зависящими от параметров ξ, η :

$$LU \equiv U_{tt} - 2\varepsilon \left(1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{\lambda\beta}{2\pi} (\xi^2 + \eta^2)^\alpha \right) U_t + U = 2\varepsilon G(\xi, \eta, t), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$U(\xi, \eta, 0) = U_0(\xi, \eta), \quad U_t(\xi, \eta, 0) = U_1(\xi, \eta),$$

где $G(\xi, \eta, t)$ обозначено преобразование Фурье $F(-\mu \dot{u}^3)$, $\mu = \frac{4}{3}$.

Зависимость от t выберем в виде $U(\xi, \eta, t) = C(\xi, \eta) e^{vt}$, тогда характеристическое уравнение линейной части имеет вид:

$$v^2 - 2\varepsilon \left[1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{\lambda\beta}{2\pi} (\xi^2 + \eta^2)^\alpha \right] v + 1 = 0. \quad (6)$$

Обозначим через $q(\rho) = 1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{\lambda\beta}{2\pi} (\xi^2 + \eta^2)^\alpha = 1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \rho^2 + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \rho^{2\alpha}$, в полярной системе координат $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$. Для корней характеристического уравнения (6):

$$v_{1,2} = \varepsilon q(\rho) \pm \sqrt{\varepsilon^2 q^2(\rho) - 1} \quad (7)$$

возможны три случая:

- 1) корни кратные и действительные, если $\varepsilon^2 q^2(\rho) - 1 = 0$;
- 2) корни различные и действительные, если $\varepsilon^2 q^2(\rho) - 1 > 0$;
- 3) корни комплексные, если $\varepsilon^2 q^2(\rho) - 1 < 0$.

Первые два случая соответствуют затухающим (или растущим) решениям. Наибольший интерес представляют комплексные корни вида

$$v = Rev \pm iImv = a \pm ib.$$

В полярной системе координата $= Rev = \varepsilon q(\rho), b = Imv = \sqrt{1 - \varepsilon^2 q^2(\rho)}$.

В случае комплексных корней (7) для характеристического уравнения (6) общее решение однородного уравнения (5) $LU = 0$ имеет вид:

$$U(\xi, \eta, t) = e^{at} (C_1(\xi, \eta) \cos bt + C_2(\xi, \eta) \sin bt) = C_1(\xi, \eta)U_1(\xi, \eta, t) + C_2(\xi, \eta)U_2(\xi, \eta, t),$$

где $U_1(\xi, \eta, t) = e^{at} \cos bt$ и $U_2(\xi, \eta, t) = e^{at} \sin bt$.

Тогда частное решение представимо в виде:

$$U_{\text{ч}} = C_1(t)e^{at} \cos bt + C_2(t)e^{at} \sin bt = C_1(t)U_1(t) + C_2(t)U_2(t).$$

Подставляя в (5), получим систему уравнений относительно $C_1'(t), C_2'(t)$:

$$\begin{aligned} C_1'U_1 + C_2'U_2 &= 0 \\ C_1'U_1' + C_2'U_2' &= 2\varepsilon G, \end{aligned}$$

где $U_1' = e^{at} (a \cos bt - b \sin bt)$, $U_2' = e^{at} (a \sin bt + b \cos bt)$.

С помощью метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ U_1' & U_2' \end{vmatrix} = U_1U_2' - U_2U_1', \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & U_2 \\ 2\varepsilon G & U_2' \end{vmatrix} = -2\varepsilon GU_2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} U_1 & 0 \\ U_1' & 2\varepsilon G \end{vmatrix} = 2\varepsilon GU_1$$

находим $C_1' = -\frac{2\varepsilon GU_2}{\Delta}$, $C_2' = \frac{2\varepsilon GU_1}{\Delta}$.

Откуда $\Delta(\xi, \eta, t) = U_1U_2' - U_2U_1' = e^{2at}b$. Найдем вид частного решения:

$$\begin{aligned} U_{\text{ч}}(t) &= 2\varepsilon \int_0^t \frac{U_1(\xi, \eta, \tau)U_2(\xi, \eta, t) - U_2(\xi, \eta, \tau)U_1(\xi, \eta, t)}{\Delta(\xi, \eta, \tau)} G(\xi, \eta, \tau) d\tau = \\ &= 2\varepsilon \int_0^t \frac{e^{a(\xi, \eta, \tau)(t-\tau)} \sin(b(\xi, \eta, \tau)(t-\tau))}{b(\xi, \eta, \tau)} G(\xi, \eta, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты C_1, C_2 из начальных условий:

$$U(\xi, \eta, 0) = C_1 = U_0, \quad U_t(\xi, \eta, 0) = C_1a + C_2b = U_1.$$

Здесь учтено, что

$$U_1 = ae^{at} \cos bt - be^{at} \sin bt|_{t=0} = a, \quad U_2 = ae^{at} \sin bt + be^{at} \cos bt|_{t=0} = b.$$

После преобразований получим, что $C_2 = \frac{U_1 - aU_0}{b}$.

Тогда общее решение уравнения (5):

$$U(\xi, \eta, t) = U_0 e^{at} \cos bt + \frac{U_1 - aU_0}{b} e^{at} \sin bt + 2\varepsilon \int_0^t \frac{e^{a(\xi, \eta, \tau)(t-\tau)} \sin(b(\xi, \eta, \tau)(t-\tau))}{b(\xi, \eta, \tau)} G(\xi, \eta, \tau) d\tau =$$

$$= U_0 \left(e^{at} \cos bt - \frac{a}{b} e^{at} \sin bt \right) + U_1 \frac{e^{at} \sin bt}{b} + 2\varepsilon \int_0^t \frac{e^{a(t-\tau)} \sin b(t-\tau)}{b} G(\xi, \eta, \tau) d\tau.$$

Решения задачи Коши (5) с правой частью $2\varepsilon G(\xi, \eta, t)$ можно представить в виде:

$$U(\xi, \eta, t) = U_0(\xi, \eta) K_1(\xi, \eta, t) + U_1(\xi, \eta) K_2(\xi, \eta, t) + 2\varepsilon \int_0^t K_3(\xi, \eta, \tau) G(\xi, \eta, t - \tau) d\tau. \quad (8)$$

Применив к (8) обратное преобразование Фурье, с учетом теоремы о свертке $F^{-1}\{KG\} = k * g$ [12], получим искомое представление (4).

В операторном виде $u = A(\dot{u}^3) + f$, где A – оператор с ядром

$$k_3(\sqrt{x^2 + y^2}, t) = k_3(r, t) = \int_0^\infty e^{a(\rho)t} \frac{\sin b(\rho)t}{b(\rho)} J_0(r\rho) \rho d\rho,$$

при вычислении которого используется интеграл $J_0(r\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta$, где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ [11]. Если $u_0(x, y) = 0$, $u_1(x, y) = 0$, получаем нелинейное уравнение $u = A(\dot{u}^3)$ или $\dot{u} = A_t(\dot{u}^3)$. Обозначив $v = \dot{u}$, приходим к уравнению $v = A_t v^3$, удобному для применения итерационных методов.

Так как ядра $k_j(x, y, t)$, $j = 1, 2, 3$ в нелинейном уравнении (4), эквивалентном задаче (2)–(3), зависят только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то запишем (4) в полярной системе координат. Обозначим через $K_j(\rho, t) = K_j(\xi, \eta, t)$, $j = 1, 2, 3$, где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $u(x, y, t) = u(r, \varphi, t)$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $u_i(\rho, \theta) = u_i(\xi, \eta)$, $i = 0, 1$. Тогда

$$\begin{aligned} k_j(x, y, t) &= F^{-1} \{K_j(\xi, \eta, t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} K_j(\xi, \eta, t) e^{-i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} K_j(\rho, t) e^{-i(x\rho \cos \theta + y\rho \sin \theta)} d\theta \rho d\rho = \int_0^\infty K_j(\rho, t) J_0(\rho\sqrt{x^2 + y^2}) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} k_j(x - \xi, y - \eta, t) &= \int_0^\infty K_j(\rho, t) J_0(\rho\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}) \rho d\rho = \\ &= \int_0^\infty K_j(\rho, t) J_0(\rho\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi + \theta)}) \rho d\rho = k_j(r, \varphi, t). \end{aligned}$$

Здесь использована формула [11]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta = J_0(\rho\sqrt{x^2 + y^2})$$

или в вещественной форме

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha R \cos \theta) \cos(\beta R \sin \theta) d\theta = J_0(R\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}).$$

Уравнение (4) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi, t) &= \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [k_1(r, \varphi + \theta, t) u_0(\rho, \theta) + k_2(r, \varphi + \theta, t) u_1(\rho, \theta)] d\theta \rho d\rho - \\
 &\quad - 2\mu\varepsilon \int_0^t \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} k_3(r, \varphi + \theta, t) \dot{u}^3(\rho, \theta, \tau) d\theta \rho d\rho d\tau = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[k_1(r, \varphi + \theta, t) \left(\int_0^{\infty} u_0(\rho, \theta) \rho d\rho \right) + k_2(r, \varphi + \theta, t) \left(\int_0^{\infty} u_1(\rho, \theta) \rho d\rho \right) \right] d\theta - \\
 &\quad - 2\mu\varepsilon \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} k_3(r, \varphi + \theta, t) \left(\int_0^{\infty} \dot{u}^3(\rho, \theta, \tau) \rho d\rho \right) d\theta d\tau.
 \end{aligned} \tag{9}$$

В формулах для $k_j(r, \varphi + \theta, t)$ функции $K_j(\rho, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 K_j(\rho, t) &= e^{\varepsilon q(\rho)t} \left[\cos(1 - \varepsilon^2 q^2(\rho))^{\frac{1}{2}} - \varepsilon q(\rho) \frac{\sin(1 - \varepsilon^2 q^2(\rho))^{\frac{1}{2}}}{(1 - \varepsilon^2 q^2(\rho))^{\frac{1}{2}}} \right], \\
 K_2(\rho, t) &= K_3(\rho, t) = e^{\varepsilon q(\rho)t} \frac{\sin(1 - \varepsilon^2 q^2(\rho))^{\frac{1}{2}}}{(1 - \varepsilon^2 q^2(\rho))^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Пусть начальные условия сосредоточены в узком кольце $R_0 \leq r \leq R_1$ или на окружности радиуса R , т. е. $u_i(\rho, \theta) = \delta(\rho - R)U_i(\theta)$, $\int_0^{\infty} u_i(\rho, \theta) \rho d\rho = RU_i(\theta)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi, t) &= R \int_{-\pi}^{\pi} [k_1(r, \varphi + \theta, t) U_0(\theta) + k_2(r, \varphi + \theta, t) U_1(\theta)] d\theta - \\
 &\quad - 2\mu\varepsilon \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} k_3(r, \varphi + \theta, t) \int_0^{\infty} \dot{u}^3(\rho, \theta, \tau) \rho d\rho d\theta d\tau,
 \end{aligned}$$

на окружности $r = R$

$$\begin{aligned}
 u(R, \varphi, t) &= R \int_{-\pi}^{\pi} [k_1(R, \varphi + \theta, t) U_0(\theta) + k_2(R, \varphi + \theta, t) U_1(\theta)] d\theta - \\
 &\quad - 2\mu\varepsilon \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} k_3(R, \varphi + \theta, t) \int_0^{\infty} \dot{u}^3(\rho, \theta, \tau) \rho d\rho d\theta d\tau, \\
 k_j(R, \varphi + \theta, t) &= \int_0^{\infty} K_j(\rho, t) J_0 \left(\rho \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi + \theta)} \right) \rho d\rho.
 \end{aligned}$$

Если u, \dot{u} равны нулю вне окружности радиуса R , то получим наиболее простые уравнения

$$\begin{aligned}
 u(R, \varphi, t) &= \\
 &= R \int_{-\pi}^{\pi} [k_1(R, \varphi + \theta, t) U_0(\theta) + k_2(R, \varphi + \theta, t) U_1(\theta)] d\theta - 2\mu\varepsilon R \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} k_3(R, \varphi + \theta, t) \dot{u}^3(R, \theta, \tau) d\theta d\tau, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} k_{i+1}(R, \varphi + \theta, t) U_i(\theta) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} K_i(\rho, t) J_0 \left(\rho \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi + \theta)} \right) U_i(\theta) d\theta \rho d\rho = \\
 &= \int_0^{\infty} K_{i+1}(\rho, t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} J_0 \left(\rho \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi + \theta)} \right) U_i(\theta) d\theta \right) \rho d\rho =
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} K_{i+1}(\rho, t) \tilde{u}_1(R, \rho, \varphi) \rho d\rho, \quad i = 0, 1,$$

$$\dot{u}(r, \varphi, t) = R \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} k_1(r, \varphi + \theta, t) U_0(\theta) + \frac{\partial}{\partial t} k_2(r, \varphi + \theta, t) U_1(\theta) \right] d\theta -$$

$$- 2\mu\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} k_3(r, \varphi + \theta, t) \left(\int_0^{\infty} \dot{u}^3(\rho, \theta, t) \rho d\rho \right) d\theta.$$

Обозначив $v = \dot{u}$, получим

$$v(r, \varphi, t) = R \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} k_1(r, \varphi + \theta, t) U_0(\theta) + \frac{\partial}{\partial t} k_2(r, \varphi + \theta, t) U_1(\theta) \right] d\theta -$$

$$- 2\mu\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} k_3(r, \varphi + \theta, t) \left(\int_0^{\infty} v^3(\rho, \theta, t) \rho d\rho \right) d\theta.$$

На окружности (тонкий цилиндр) радиуса R получим

$$v(R, \varphi, t) = R \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} k_1(R, \varphi + \theta, t) U_0(\theta) + \frac{\partial}{\partial t} k_2(R, \varphi + \theta, t) U_1(\theta) - 2\mu\varepsilon k_3(R, \varphi + \theta, t) v^3(R, \theta, t) \right] d\theta.$$

Более подробно задача на окружности радиуса R рассматриваются в следующем разделе. Также выводится эквивалентное нелинейное интегральное уравнение.

2. ГОРЕНИЕ В ТОНКОСТЕННОМ ЦИЛИНДРЕ

Остановимся подробнее на исследовании периодических решений уравнения (1) на окружности радиуса R , которое соответствует спиновым режимам горения тонкостенного цилиндра. Сделаем замену $x = \theta R$, $\xi(x, t) = \xi(\theta R, t) = u(\theta, t)$:

$$\ddot{u} + u = 2\varepsilon \left[\dot{u} \left(1 - \frac{4}{3} \dot{u}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 R^2} \Delta \dot{u} + \frac{\beta\lambda}{2\pi R^{2\alpha}} (-\Delta)^{\alpha} \dot{u} \right], \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$u(\theta + 2\pi, t) = u(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad u(\theta, 0) = u_0(\theta), \quad \dot{u}(\theta, 0) = u_1(\theta).$$
 (10)

Также могут быть заданы краевые условия, например, условия Неймана:

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\pi} = 0.$$
 (11)

Для решения задачи (10) применим дискретное преобразование Фурье W [12]:

$$u(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t) e^{in\theta} = Wu, \quad u_n = W^{-1}u.$$

Тогда $(-\Delta)^{\alpha} \dot{u} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{u}_n(t) n^{2\alpha} e^{in\theta}$, где $(-\Delta)^{\alpha}$ – псевдодифференциальный оператор, $0 < \alpha < 1$ [10, 12]. В образах Фурье для функций $u_n(t)$ получим:

$$Lu_n \equiv \ddot{u}_n - 2\varepsilon \left(1 - \frac{\lambda^2 n^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{\beta\lambda}{2\pi R^{2\alpha}} n^{2\alpha} \right) \dot{u}_n + u_n = 2\varepsilon g_n(t),$$
 (12)

где $g_n = W^{-1}G$, $G(\theta, t) = -\mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\dot{u}^3)_n e^{in\theta}$.

Для уравнения $Lu_n = 0$ соответствующее характеристическое уравнение:

$$\omega_n^2 - 2\varepsilon \left(1 - \frac{\lambda^2 n^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{\beta\lambda}{2\pi R^{2\alpha}} n^{2\alpha} \right) \omega_n + 1 = 0. \quad (13)$$

Построим решение задачи (10)–(11) для комплексных корней характеристического уравнения (13):

$$(\omega_{1,2})_n = \varepsilon \left(1 - \frac{\lambda^2 n^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{\beta\lambda}{2\pi R^{2\alpha}} n^{2\alpha} \right) \pm \sqrt{\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\lambda^2 n^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{\beta\lambda}{2\pi R^{2\alpha}} n^{2\alpha} \right)^2 - 1}, \quad (14)$$

где $(\omega_{1,2})_n = Re\omega_n \pm iIm\omega_n$, $Re\omega_n = \varepsilon q_n$, $Im\omega_n = \sqrt{1 - \varepsilon^2 q_n^2}$, $q_n = 1 - \frac{\lambda^2 n^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{\beta\lambda}{2\pi R^{2\alpha}} n^{2\alpha}$.

В случае комплексных корней (14) для характеристического уравнения (13) общее решение однородного уравнения (12) $Lu = 0$ имеет вид:

$$u_n(t) = C_{1n} e^{(\omega_1)_n t} + C_{2n} e^{(\omega_2)_n t}.$$

Тогда частное решение представимо в виде:

$$u_{\text{ч}}(t) = C_{1n}(t) e^{(\omega_1)_n t} + C_{2n}(t) e^{(\omega_2)_n t}.$$

Подставляя в (12), получим систему уравнений относительно $C'_{1n}(t)$, $C'_{2n}(t)$:

$$C'_1 e^{(\omega_1)_n t} + C'_2 e^{(\omega_2)_n t} = 0, \quad C'_1 (\omega_1)_n e^{(\omega_1)_n t} + C'_2 (\omega_2)_n e^{(\omega_2)_n t} = 2\varepsilon g_n.$$

Тогда с помощью метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{(\omega_1)_n t} & e^{(\omega_2)_n t} \\ (\omega_1)_n e^{(\omega_1)_n t} & (\omega_2)_n e^{(\omega_2)_n t} \end{vmatrix} = ((\omega_2)_n - (\omega_1)_n) e^{((\omega_1)_n + (\omega_2)_n) t},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{(\omega_2)_n t} \\ 2\varepsilon g_n & (\omega_2)_n e^{(\omega_2)_n t} \end{vmatrix} = -2\varepsilon g_n e^{(\omega_2)_n t}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{(\omega_1)_n t} & 0 \\ (\omega_1)_n e^{(\omega_1)_n t} & 2\varepsilon g_n \end{vmatrix} = 2\varepsilon g_n e^{(\omega_1)_n t}.$$

Тогда $C'_1(t) = -\frac{2\varepsilon g_n e^{(\omega_2)_n t}}{((\omega_2)_n - (\omega_1)_n) e^{((\omega_1)_n + (\omega_2)_n) t}} = -2\varepsilon g_n \frac{e^{-(\omega_1)_n t}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n}$,

$$C'_2(t) = \frac{2\varepsilon g_n e^{(\omega_1)_n t}}{((\omega_2)_n - (\omega_1)_n) e^{((\omega_1)_n + (\omega_2)_n) t}} = 2\varepsilon g_n \frac{e^{-(\omega_2)_n t}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n}.$$

Откуда

$$C_1(t) = -\frac{2\varepsilon}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n} \int_0^t g_n(\tau) e^{-(\omega_2)_n \tau} d\tau, \quad C_2(t) = \frac{2\varepsilon}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n} \int_0^t g_n(\tau) e^{-(\omega_1)_n \tau} d\tau.$$

Найдем вид частного решения:

$$u_{\text{ч}}(t) = \frac{2\varepsilon}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n} \int_0^t \left[e^{(\omega_2)_n(t-\tau)} - e^{(\omega_1)_n(t-\tau)} \right] g_n(\tau) d\tau.$$

Общее решение:

$$u_n(t) = C_{1n} e^{(\omega_1)_n t} + C_{2n} e^{(\omega_2)_n t} + \frac{2\varepsilon}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n} \int_0^t \left[e^{(\omega_2)_n(t-\tau)} - e^{(\omega_1)_n(t-\tau)} \right] g_n(\tau) d\tau,$$

$$u(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{1n}e^{(\omega_1)_n t} + C_{2n}e^{(\omega_2)_n t}] e^{in\theta} - 2\mu\varepsilon \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_t(\theta - s, t - \tau) \dot{u}^3(s, \tau) ds d\tau.$$

Найдем коэффициенты C_1, C_2 из начальных условий:

$$u(\theta, 0) = u_0(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{1n} + C_{2n}] e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0n} e^{in\theta},$$

$$\dot{u}(\theta, 0) = u_1(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{1n}(\omega_1)_n + C_{2n}(\omega_2)_n] e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{1n} e^{in\theta}.$$

После преобразований получим, что $C_{1n} = \frac{(\omega_2)_n u_{0n} - u_{1n}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n}$, $C_{2n} = \frac{u_{1n} - (\omega_1)_n u_{0n}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n}$.

Тогда общее решение уравнения (12):

$$u(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n} \left([(\omega_2)_n u_{0n} - u_{1n}] e^{(\omega_2)_n t} - [u_{1n} - (\omega_1)_n u_{0n}] e^{(\omega_1)_n t} \right) e^{in\theta} - 2\mu\varepsilon \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_3(\theta - s, t - \tau) \dot{u}^3(s, \tau) ds d\tau.$$

Из полученных выкладок следует

Утверждение 2. Решение исходной задачи (10) для комплексных корней представимо в виде

$$U(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (K_1(\theta - s)u_0(s) + K_2(\theta - s)u_1(s)) ds - 2\mu\varepsilon \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_3(\theta - s, t - \tau) \dot{u}^3(s, \tau) ds d\tau, \quad (15)$$

где

$$(k_1)_n(t) = \frac{(\omega_2)_n e^{(\omega_2)_n t} + (\omega_1)_n e^{(\omega_1)_n t}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n}, \quad (k_2)_n(t) = \frac{e^{(\omega_2)_n t} + e^{(\omega_1)_n t}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n},$$

$$(k_3)_n(t) = \frac{sh\sqrt{\varepsilon^2 q_n^2 - 1} \cdot t}{\sqrt{\varepsilon^2 q_n^2 - 1}} e^{\varepsilon q_n t},$$

$$K_j(\theta, t) = W(k_j)_n(\theta, t), \quad j = 1, 2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_3(\theta - s, t - \tau) \dot{u}^3(s, \tau) ds d\tau = W(k_3)_n g_n, \quad \varepsilon^2 q_n^2 - 1 < 0.$$

Представление (15) позволяет находить вид приближенного решения в зависимости от малого параметра $0 < \varepsilon \ll 1$ и параметров β, λ, α .

Найдем приближенные решения (10) при $\alpha = 1/2$ с помощью метода Галеркина. Обозначим $\rho = 2\pi R\lambda^{-1}$. Согласно методу при малых колебаниях решением уравнения является функция вида:

$$u(\theta, t) = y_0(t) + y_1(t) \cos \theta + v(\theta, t), \quad (16)$$

где $y_k(t), k = 0, 1$ – периодические относительно переменной t функции, функция $v(\theta, t)$ также периодическая, кроме того обладает свойствами:

$$P_0 v := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta, t) dt = 0, \quad P_1 v := \cos \theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta, t) \cos t dt = 0, \quad P_2 v := \sin \theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta, t) \sin t dt = 0.$$

Операторы P_i , $i = 0, 1, 2$ выписаны на основании реализации условий разрешимости. Параметр $q_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{\beta\lambda}{2\pi R}$ будем рассматривать в качестве бифуркационного параметра. Ранее в работе [7] q_1 обозначено как $\alpha_1 = 1 - \rho^{-2} + \beta\rho^{-1}$ при $\rho = 2\pi R\lambda^{-1}$.

На Международной конференции имени И. Г. Петровского [6] анонсировалось построение периодического решения задачи (10):

$$u_0 = \xi_0(\theta, \tau, \varepsilon) = \cos \tau + \frac{1}{12}\varepsilon(3 \sin \tau - \sin 3\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (17)$$

где $\tau = (1 + \frac{1}{4}(1 - 6(q_1 - 1))\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2, (q_1 - 1)^2))t$.

Дальнейшие исследования показали, что после прохождения бифуркационного параметра через критическое значение $q_1 = 1$, от решения (17) ответвляется пара периодических решений:

$$u_1 = \xi_1^\pm(\theta, \tau, \varepsilon) = \sqrt{3 - 2q_1} \cos \tau \pm 2\sqrt{q_1 - 1} \sin \tau \cos \theta + O(\varepsilon). \quad (18)$$

Спектр системы имеет вид:

$$\{q_1 - 1, q_1 - 3, \dots, q_k - 1, q_k - 3, \dots\}, \text{ при } k = 1, 2, \dots$$

Исследуя динамику периодических структур и проведя бифуркационный анализ, можно сформулировать утверждение:

Утверждение 3. Решение уравнения (10), представленное в виде (17), является устойчивым при $q_1 < 1$. После прохождения через критическое значение параметра $q_1 = 1$ решение теряет свою устойчивость, рождается пара других устойчивых периодических решений (18). Пара ответвляющихся решений (17) существует только на интервале (1; 1,5).

Численный анализ устойчивости иллюстрирует зависимость динамики решений от параметра β (который содержится в q_1). Его изменения приводят к изрезанности волн.

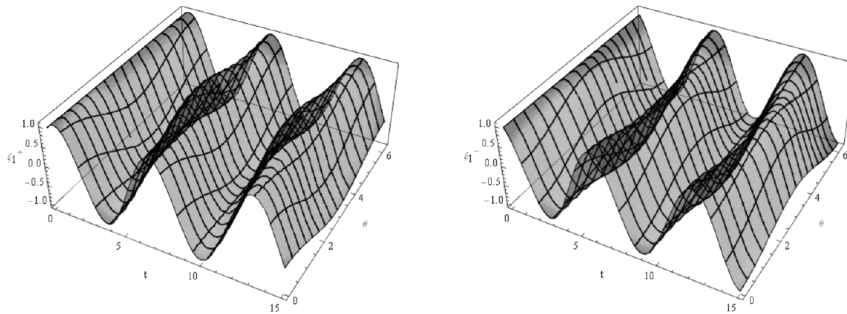


Рис. 1. Решения ξ_1^\pm при $q_1 = 1,06$.

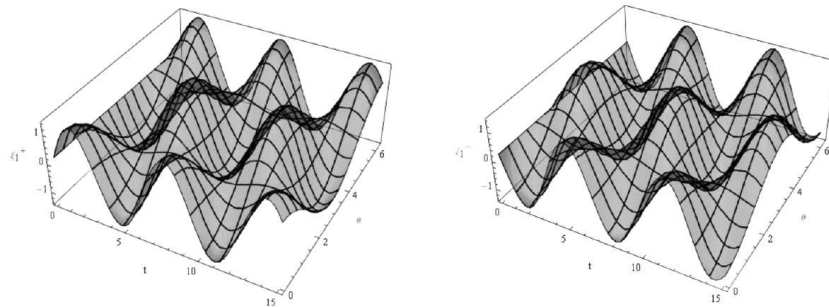


Рис. 2. Решения ξ_1^\pm при $q_1 = 1,48$.

Так как $q_1 = 1 - \rho^{-2} + \beta\rho^{-1}$, то q_1 монотонно возрастает на промежутке $(0, \beta/2)$ и монотонно убывает на промежутке $(\beta/2, \infty)$. Динамика системы (10) при возрастании ρ зависит от величины β . Кроме того, $q_1 = q_1(\rho) \rightarrow 1$ при $\rho \rightarrow \infty$. То есть можем сделать вывод, что параметр ρ также является бифуркационным, его критическим значением является $\rho = \beta^{-1}$.

На рис. 1–2 представлено поведение автомодельных режимов $\xi_1^\pm(\theta, t, \varepsilon)$ при фиксированном значении параметра $\rho = 1,4$ и параметре $\beta = 0,8$ (рис. 1) и $\beta = 1,4$ (рис. 2), для которых характерна зависимость амплитуды колебаний от величины коэффициента нелокальной связи β и пространственной переменной θ .

Утверждение 4. Увеличивая значения параметра β при фиксированном ρ , увеличивает максимальное значение амплитуды A (коэффициент при $\cos \theta$). К аналогичной ситуации приводит увеличение параметра ρ при фиксированном β , – это объясняется амплитудной турбулентностью, скачкообразным характером зависимости амплитуды автомодельных циклов от пространственной переменной θ . Вблизи бифуркационного значения $\rho = \beta^{-1}$ амплитуда принимает постоянное значение равное 1, что соответствует амплитуде синфазной волны $\xi_0 = \cos t + O(\varepsilon)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены основные задачи теории горения, автоколебательный и спиновый режимы распространения фронта реакции для феноменологической модели спинового горения с псевдодифференциальным оператором $(-\Delta)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ на плоскости и тонкостенном цилиндре.

Впервые с помощью двойного преобразования Фурье, когда зона горения вся плоскость, исходная задача приводится к нелинейному интегральному уравнению с ядрами, зависящими от функции Бесселя. Показано использование уравнения в полярной системе координат для процессов горения в кольцевой области. Для области тонкостенного цилиндра проведен анализ периодических решений уравнения спинового горения, в результате исследования сформулировано утверждение об устойчивости решения в зависимости от значения бифуркационного параметра, а также утверждение о динамике рождающихся решений в зависимости от коэффициента нелокальной связи участков фронта. Дальнейший интерес представляет изучение феноменологического уравнения спинового горения на полуплоскости, полосе и исследование спинового режима в тонкостенном цилиндре при произвольной степени α оператора Лапласа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алдушин, А. П. К феноменологической теории спинового горения / А. П. Алдушин, Я. Б. Зельдович, Б. А. Маломед // ДАН СССР. – 1980. – Т. 251, № 5. – С. 1102–1106.
2. Алдушин, А. П. Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения / А. П. Алдушин, Б. А. Маломед // Физ. гор. и взрыва. – 1981. – Т. 17, № 1. – С. 3–12.
3. Зельдович, Я. Б. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах (обзор) Я. Б. Зельдович, Б. А. Маломед // Известия высших учебных заведений. – 1982. – Т. XXV, № 6. – С. 591–618.
4. Белан, Е. П. О динамике бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения / Е. П. Белан // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – С. 857.
5. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. – М. : Физматлит, 2005. – 432 с.
6. Хазова, Ю. А. Периодическое решение уравнения спинового горения / Ю. А. Хазова, А. А. Гребенева // Международная конференция И. Г. Петровского: Тезисы докладов. – Москва, 2022. – С. 193–194.

7. Шиян, О. В. Анализ автомодельных режимов горения вдоль полосы / О. В. Шиян // Динамические системы. — 2011. — Вып. 29, № 1. — С. 131–144.
8. Самойленко, А. М. Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения / А. М. Самойленко, Е. П. Белан // Доклады РАН. — 2006. — Т. 406, № 6. — С. 738–741.
9. Колесов, А. Ю. Явление буферности в теории горения / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // ДАН. — 2004. — Т. 396, № 2. — С. 170–173.
10. Тейлор, М. Псевдодифференциальные операторы / М. Тейлор. — М. : Мир, 1985. — 472 с.
11. Коренев, Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б. Г. Коренев. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
12. Гахов, Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. — М. : Наука, 1978. — 296 с.

REFERENCES

1. Aldushin, A.P., Zel'dovich, Ya.B. and Malomed, B.A., A Remark on the Phenomenological Theory of Spin Combustion. [Aldushin A. P., Zel'dovich YA. B., Malomed B. A. K fenomenologicheskoy teorii spinovogo gorenija]. *DAN SSSR — Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 251, no. 5, pp. 1102–1106.
2. Aldushin A.P., Malomed B.A. Phenomenological Description of Nonstationary Inhomogeneous Combustion Waves. [Алдушин А.П., Маломед Б.А. Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения]. *Fiz. Goren. Vzryva — Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 3–12.
3. Zel'dovich, Ya.B. and Malomed, B.A., Complex Wave Regimes in Distributed Dynamical Systems. [Zel'dovich YA.B., Malomed B.A. Slozhnye volnovye rezhimy v raspredelennyh dinamicheskikh sistemah (obzor)]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij — News of higher educational institutions*, 1981, vol. 15, no. 6, pp. 591–618.
4. Belan E.P. The dynamics of rotating waves of the phenomenological equation of spin combustion. [Belan E.P. O dinamike begushchih voln fenomenologicheskogo uravneniya spinovogo gorenija]. *Differencial'nye uravneniya — Differential equations*, 2005, vol. 41, pp. 857.
5. Mishchenko E.F., Sadovnichii V.A., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Avtovolnovye protsessy v nelineinykh sredakh s diffuziei (Self-Similar Processes in Nonlinear Media with Diffusion). [Mishchenko E.F., Sadovnichij V.A., Kolesov A.YU., Rozov N.H. Avtovolnovye processy v nelinejnyh sredah s diffuziej]. Moscow, 2005, 432 p.
6. Khazova, Yu.A., Grebeneva, A.A., Periodic solution of the spin combustion equation. [Hazova YU.A., Grebeneva A.A. Periodicheskoe reshenie uravneniya spinovogo gorenija]. International Conference dedicated to I.G. Petrovskii, XXIV Joint Session, 2022, pp. 193–194.
7. Shiyan O.V. Analysis of auto-oscillation model of burning on the strip. [SHiyan O.V. Analiz avtomodel'nyh rezhimov gorenija vdol' polosy]. *Dinamicheskie sistemy — Dynamic systems*, 2011, iss. 29, no. 1, pp. 131–144.
8. Samoilenko A.M., Belan E.P. Dynamics of Traveling Waves of the Phenomenological Equation of Spin Combustion. [Samojlenko A.M., Belan E.P. Dinamika begushchih voln fenomenologicheskogo uravneniya spinovogo gorenija]. *Doklady RAN — Dokl. Akad. Nauk*, 2006, vol. 406, no. 6, pp. 738–741.
9. Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. The Buffer Phenomenon in Combustion Theory. [Kolesov A.YU., Rozov N.H. YAvlenie bufernosti v teorii gorenija]. *Doklady RAN — Dokl. Akad. Nauk*, 2004, vol. 396, no. 2, pp. 170–173.
10. Taylor M. Pseudo Differential Operators. [Tejlor M. Psevdodifferencial'nye operatory]. Moscow: Mir, 1985, 472 p.

11. Korenev B.G. An Introduction to the Theory of Bessel Functions. [Korenev B.G. Vvedenie v teoriyu besselevykh funkcij]. Moscow: Nauka, 1971, 288 p.

12. Gakhov F.D. m Chersky Yu.I. Convolution Type Equations. [Gahov F.D., CHerskiy YU.I. Uravneniya tipa svertki]. Moscow: Nauka, 1978, 296 p.

Лукьяненко Владимир Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, Симферополь, Российская Федерация
E-mail: art-inf@yandex.ru

Lukianenko Vladimir, Associate Professor, Department of Mathematical analysis, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation
E-mail: art-inf@yandex.ru

Хазова Юлия Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, Симферополь, Российская Федерация
E-mail: khazova.yuliya@hotmail.com

Khazova Yulia, Associate Professor, Department of Mathematical analysis, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation
E-mail: khazova.yuliya@hotmail.com

Гребенева Анастасия Андреевна, магистрант, кафедра математического анализа Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, Симферополь, Российская Федерация
E-mail: agrebeneva2001@gmail.com

Grebeneva Anastasia, MSC, Department of Mathematical analysis, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation
E-mail: agrebeneva2001@gmail.com