

# АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЕБАНИЙ НА ГРАНИЦАХ ЗОН ПРОПУСКАНИЯ ВОЛН ВТОРОГО ТИПА

Т. В. Волобуева

*Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 31.01.2021 г.

**Аннотация.** Проанализированы закономерности распределения мгновенных потоков мощности при колебаниях на критических частотах второго типа в сечении цилиндрического волновода с закрепленной границей из конструкционных материалов орторомбического класса.

**Ключевые слова:** распределение энергетических потоков, критические частоты, среда орторомбического класса, волны второго типа.

## ANALYSIS OF THE ENERGY CHARACTERISTICS OF OSCILLATIONS AT THE BOUNDARIES OF THE TRANSMISSION ZONES OF THE SECOND TYPE OF WAVES

T. V. Volobueva

**Abstract.** The regularities of the distribution of instantaneous power flows during oscillations at critical frequencies of the second type in the section of a cylindrical waveguide with a fixed boundary of orthorhombic class structural materials are analyzed.

**Keywords:** distribution of energy flows, critical frequencies, orthorhombic class medium, waves of the second type.

### ВВЕДЕНИЕ

Во многих научно технических отраслях внутренняя логика развития фундаментальных исследований стимулирует углубление анализа ранее рассмотренных задач или постановку новых задач по данной проблеме. К таким актуальным с точки зрения фундаментальной и прикладной науки задачам относятся задачи, детального и достоверного учета физико-механической анизотропии материала волновода. Соответствующие прикладные задачи возникают при расчете рабочих поверхностей кристаллических акустических волноводных компонентов, в акустической дефектоскопии конструкционных элементов из кристаллических или композитных материалов, в геоакустике, авиационном машиностроении и т. д. Несмотря на широкие теоретические и прикладные исследования в данной области, проблемы анализа волноводных свойств протяженных анизотропных по физико-механическим свойствам упругих тел остаются открытыми или требуют дальнейшей разработки. Изучение энергетических характеристик волновых полей является одним из направлений исследования закономерностей формирования полей распространяющихся и краевых стоячих нормальных волн в упругих волноводах пространственной геометрии. К этой области и относится задача изучения распределений мгновенных потоков мощности по сечению волновода для отдельных мод монохроматических нормальных волн в бесконечных волноводах.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе решена задача расчета мгновенных потоков мощности на критических частотах гармонических нормальных волн второго типа в цилиндрах с жестко фиксированной боковой поверхностью орторомбического класса (монокристалл топаза) и анализируются полученные результаты.

Спектральная задача формулируется относительно амплитудной функции  $u_3$  и включает уравнения

$$(c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + \Omega^2) u_3 = 0 \quad (1)$$

и краевые условия одного из видов

$$(\sigma_{r3})_{r=1} = ((c_{55} \cos \theta \partial_1 + c_{44} \sin \theta \partial_2) u_3)_{r=1} = 0, \quad (2)$$

$$(u_3)_{r=1} = 0. \quad (3)$$

Критические частоты  $\omega_q$  нормальных волн, это частоты при которых соответствующие волновые числа мод бегущих волн  $k_q$  равны нулю.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Общая методика исследования задач определения собственных частот колебания продольного сдвига в прямолинейно ортотропных цилиндрах со свободной либо закрепленной граничной поверхностью рассматривается в работе [1].

Критические частоты, определяемые из спектральной задачи (1)-(3) называем критическими частотами нормальных волн второго типа. В волнах, принадлежащим этим модам, на критической частоте возникают только упругие перемещения в осевом направлении волновода, т. е. эти волны зарождаются на критической частоте как продольные или изгибные. Методика определения критических частот бегущих нормальных волн второго типа разработана в работе [2].

Перенос энергии, обусловленный нормальными волновыми движениями, характеризуют компоненты вектора потока мощности  $P_r, P_\theta, P_3$ , которые применительно к рассматриваемому случаю могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} P_r &= -(\sigma_{rr}^{(R)} u_r^{(R)} + \sigma_{r\theta}^{(R)} u_\theta^{(R)} + \sigma_{r3}^{(R)} u_3^{(R)})_{k_q=0} = -\sigma_{r3}^{(R)} u_3^{(R)} = \\ &= -\frac{i\omega}{4} (\sigma_{r3} \bar{u}_3 - \bar{\sigma}_{r3} u_3 + \bar{\sigma}_{r3} \bar{u}_3 e^{-2i\omega t} - \sigma_{r3} u_3 e^{-2i\omega t}), \\ P_\theta &= -(\sigma_{r\theta}^{(R)} u_r^{(R)} + \sigma_{\theta\theta}^{(R)} u_\theta^{(R)} + \sigma_{\theta 3}^{(R)} u_3^{(R)})_{k_q=0} = -\sigma_{\theta 3}^{(R)} u_3^{(R)} = \\ &= -\frac{i\omega}{4} (\sigma_{\theta 3} \bar{u}_3 - \bar{\sigma}_{\theta 3} u_3 + \bar{\sigma}_{\theta 3} \bar{u}_3 e^{-2i\omega t} - \sigma_{\theta 3} u_3 e^{-2i\omega t}) \\ P_3 &= -(\sigma_{r3}^{(R)} u_r^{(R)} + \sigma_{\theta 3}^{(R)} u_\theta^{(R)} + \sigma_{33}^{(R)} u_3^{(R)})_{k_q=0} = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Индексом (R) в соотношениях (4) отмечены реальные значения напряжений и перемещений, представляющих собой действительные функции координат и времени.

Уравнение колебаний (1) может быть проинтегрировано методом аффинного преобразования координат исходной области. В цилиндрических координатах  $(r, \varphi)$ , вводимых в аффинно-преобразованной области  $0\xi_1\xi_2$ , имеем  $\xi_1 = x_1, \xi_2 = (\mu_1 x_1 + x_2)\mu_2^{-1}, r e^{i\varphi} = \xi_1 + i\xi_2$ . Используем представления для  $u_3$ , полученные в [2]:

$$u_3 = \sum_n A_n J_n(\Omega r) \cos n\varphi$$

и формулы, следующие из определяющих соотношений (соотношений закона Гука для среды орторомбического класса):

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}\partial_1 u_1 + c_{12}\partial_2 u_2 + c_{13}\partial_3 u_3, \\ \sigma_{22} &= c_{12}\partial_1 u_1 + c_{22}\partial_2 u_2 + c_{23}\partial_3 u_3, \\ \sigma_{33} &= c_{13}\partial_1 u_1 + c_{23}\partial_2 u_2 + c_{33}\partial_3 u_3, \\ \sigma_{23} &= c_{44}(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2), \\ \sigma_{13} &= c_{55}(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1), \\ \sigma_{12} &= c_{66}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1),\end{aligned}$$

и соотношений дифференцирования базисных решений обобщенных метатармонических уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_1} J_n(\Omega r) \sin n\varphi &= \frac{\Omega}{2}(J_{n-1}(\Omega r) \sin(n-1)\varphi - J_{n+1}(\Omega r) \sin(n+1)\varphi), \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} J_n(\Omega r) \cos n\varphi &= \frac{\Omega}{2}(J_{n-1}(\Omega r) \cos(n-1)\varphi - J_{n+1}(\Omega r) \cos(n+1)\varphi), \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} J_n(\Omega r) \sin n\varphi &= \frac{\Omega}{2}(J_{n-1}(\Omega r) \cos(n-1)\varphi - J_{n+1}(\Omega r) \cos(n+1)\varphi), \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} J_n(\Omega r) \cos n\varphi &= -\frac{\Omega}{2}(J_{n-1}(\Omega r) \sin(n-1)\varphi - J_{n+1}(\Omega r) \sin(n+1)\varphi),\end{aligned}$$

получаем следующее выражение для комплексных амплитудных составляющих напряжений  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  как функции полярных координат в аффинно-преобразованной области поперечного сечения:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= c_{55} \frac{\Omega}{2} \left[ \sum_n A_n(J_{n-1})(\Omega r) \cos(n-1)\varphi - J_{n+1}(\Omega r) \cos(n+1)\varphi \right], \\ \sigma_{23} &= c_{44} \frac{\Omega}{2\mu_2} \left[ \sum_n A_n(-J_{n-1})(\Omega r) \sin(n-1)\varphi - J_{n+1}(\Omega r) \sin(n+1)\varphi \right].\end{aligned}$$

На основе этих выражений, используя соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{r3} &= \sigma_{13} \cos(\Theta) + \sigma_{23} \sin(\Theta), \\ \sigma_{\Theta 3} &= -\sigma_{13} \sin(\Theta) + \sigma_{23} \cos(\Theta), \\ \sigma_{r3} &= \operatorname{Re}(\sigma_{r3} e^{-i\omega t}), \\ \sigma_{\Theta 3} &= \operatorname{Re}(\sigma_{\Theta 3} e^{-i\omega t}),\end{aligned}$$

получаем возможность расчета по формулам (4) величин ненулевых компонентов вектора потока мощности  $P_r, P_\Theta$ , характеризующие движение энергетических потоков в монохроматической волне в произвольный момент времени на критической частоте  $\Omega$ .

Для рассматриваемых моментов времени формулы (4) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}P_r &= \omega \operatorname{Im} \sigma_{r3} \operatorname{Re} u_3, \\ P_\Theta &= \omega \operatorname{Im} \sigma_{\Theta 3} \operatorname{Re} u_3.\end{aligned}$$

На рис. 1 а)-д) представлены результаты расчетов, характеризующие распределение по сечению волновода величины потока мощности  $P_r$  для волн с критическими частотами типа  $C_0$

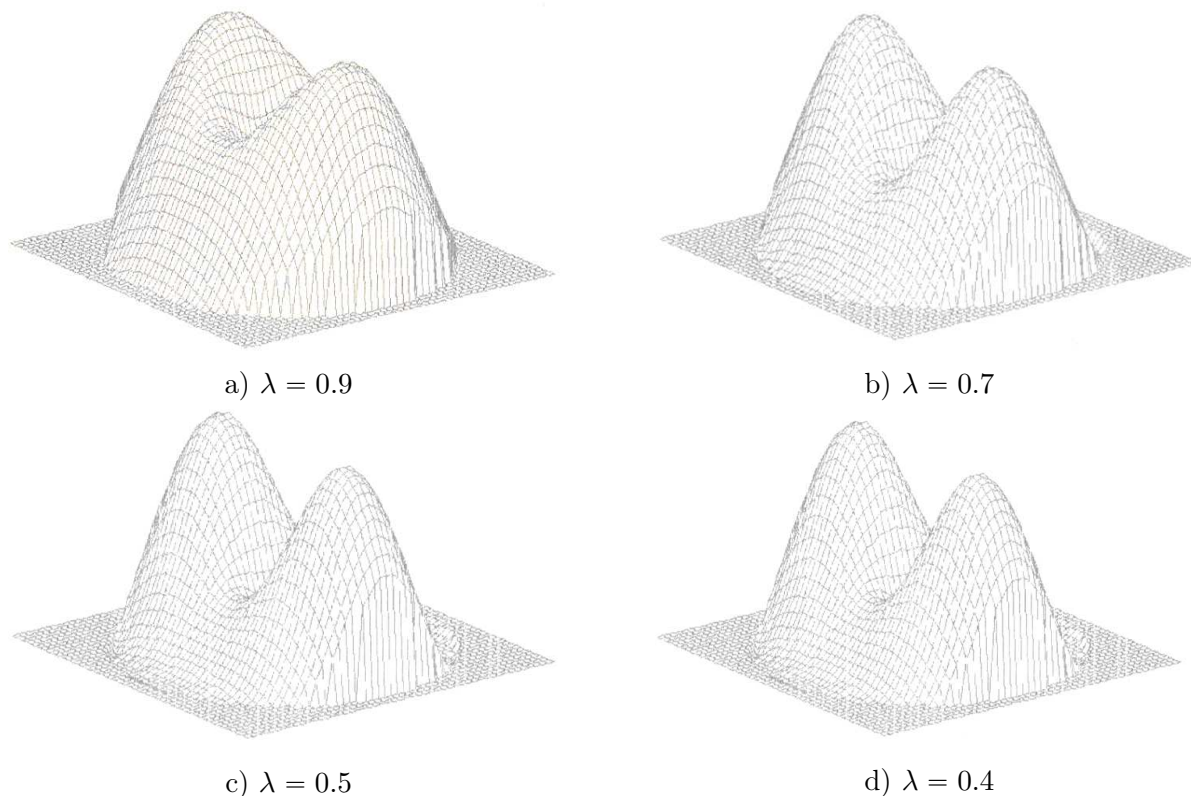


Рис. 1. Распределение компонентов потока мощности  $P_r|_{t=\pi/2\omega}$  в сечении ортотропного волновода с различными показателями  $\lambda$  при колебании на критической частоте  $C_0$ .

(критическая частота второго типа) в момент времени  $t = \frac{\pi}{2\omega} + m\frac{\pi}{2\omega}$  ( $m = \overline{0, \infty}$ ) для различных значений  $\lambda$ . Здесь  $\alpha$  — мера механической анизотропии для волноводов орторомбического класса,  $\lambda = \sqrt{c_{44}/c_{55}}$ .

Аналогичные распределения потока мощности  $P_\theta$  представлены на рис. 2.

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОБЫ

Для изотропного волновода форма распределения компонентов потока мощности  $P_r$  является осесимметричной. Расчеты, представленные на рис. 1 демонстрируют эффекты “отклонения от осесимметричности”, вызванные влиянием меры прямолинейной анизотропии материала волновода. Для точек сечения волновода, близких к осевым направлениям наблюдаем ярко выраженное изменение соотношения между потоками мощности. Для точек сечения волновода, близких к оси  $Ox_2$ , вдоль которой модуль сдвига уменьшается при уменьшении  $\lambda$ , поток мощности  $P_r$  возрастает. Для направления с увеличивающимся модулем сдвига величина потока  $P_r$  уменьшается. Эта тенденция сохраняется на всем исследованном интервале изменения величины ( $0.4 \leq \lambda \leq 1.0$ ).

Для изотропного волновода компонента  $P_\theta$  тождественно нулевая. Для ортотропного волновода распределение потока мощности  $P_\theta$ , изображенные на рис. 2 отражают эффекты появления энергетических потоков  $P_\theta$  на критической частоте  $C_0$ . Произведенные расчеты иллюстрируют, что потоки мощности  $P_\theta$  локализуются в областях, близких к направлениям упругой симметрии (координатным направлениям) для волноводов с малыми значениями параметра  $\lambda$  (т. е. из материалов с большой мерой сдвиговой анизотропии). Для графической интерпретации расчетов использовался пакет Matlab. Экспериментальные табличные

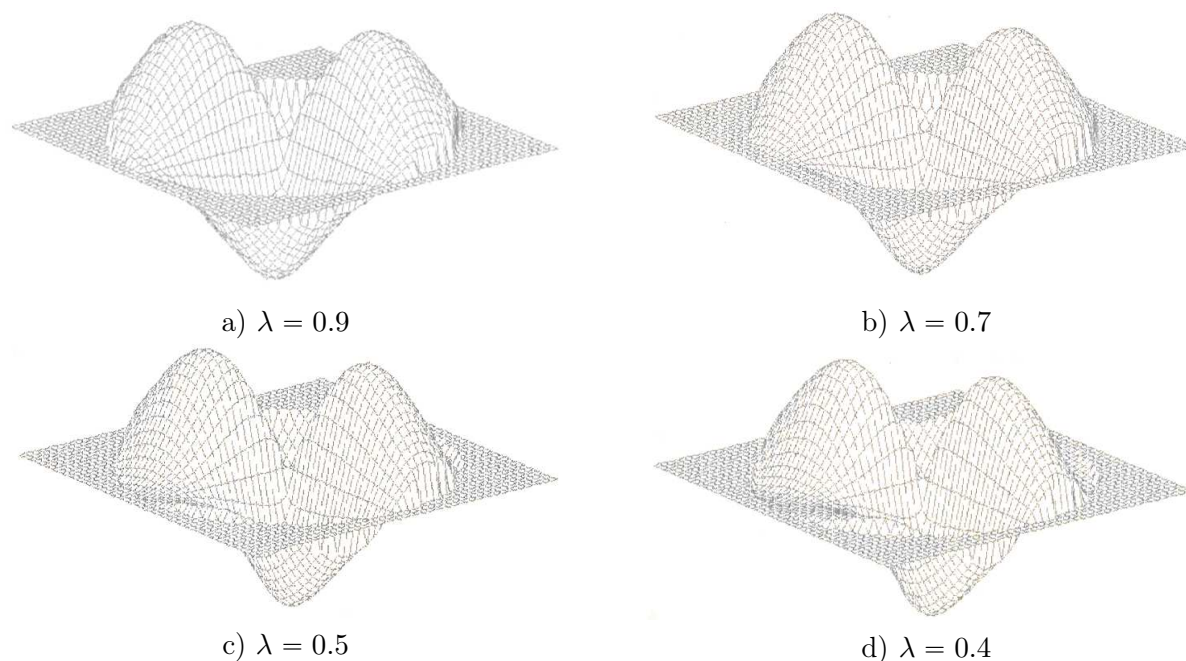


Рис. 2. Распределение компонентов потока мощности  $P_{\theta}|_{t=\pi/2\omega}$  в сечении ортотропного волновода с различными показателями  $\lambda$  при колебании на критической частоте  $C_0$ .

значения физико-механических постоянных для образующих рассматриваемые волноводы материалов даны, в частности, в работах [3, 4].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проанализировано влияния физико-механических свойств волновода из реальных конструкционных материалов на закономерности распределения мгновенных потоков мощности в процессе колебаний на критических частотах второго типа в цилиндрическом волноводе с закрепленной боковой поверхностью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Космодамианский, А. С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А. С. Космодамианский, В. И. Сторожев. — Киев : Наук. Думка., 1985. — 176 с.
2. Волобуева, Т. В. Критические частоты распространения волн в прямолинейно-ортотропных цилиндрических волноводах / Т. В. Волобуева, В. И. Сторожев // Теорет. и прикл. механика. — 1996. — Вып. 26. — С. 87–95.
3. Хангтингтон, Г. Упругие постоянные кристаллов / Г. Хангтингтон // Успехи физ. наук. — 1961. — Т. 74, № 2. — С. 303–352.
4. Хангтингтон, Г. Упругие постоянные кристаллов / Г. Хангтингтон // Успехи физ. наук. — 1961. — Т. 74, № 3. — С. 462–520.

## REFERENCES

1. Kosmodamiansky A.S., Storozhev V.I. Dynamic problems of elasticity theory for anisotropic media. [Kosmodamianskiy A.S., Storozhev V.I. Dinamicheskie zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnyh sred]. Kyiv: Nauk. Dumka, 1985, 176 p.
2. Volobueva T.V., Storozhev V.I. Critical frequencies of wave propagation in rectilinear-orthotropic cylindrical waveguides. [Volobueva T.V., Storozhev V.I. Kriticheskie chastoty

rasprostraneniya voln v pryamolinejno-ortotropnyh cilindricheskih volnovodah]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika — Theoretical and applied mechanics*, 1996, vol. 26, pp. 87–95.

3. Huntington G. Elastic constants of crystals. [Huntington G. Uprugie postoyannye kristallov]. *Uspekhi fizicheskikh nauk — Physics-Uspekhi*, 1961, vol. 74, no. 2, pp. 303–352.

4. Huntington G. Elastic constants of crystals. [Huntington G. Uprugie postoyannye kristallov]. *Uspekhi fizicheskikh nauk — Physics-Uspekhi*, 1961, vol. 74, no. 3, pp. 462–520.

Волобуева Т. В., Воронежский государственный технический университет, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры систем управления и информационных технологий в строительстве, Воронеж, Россия  
E-mail: tv190470@yandex.ru

Volobueva T. V., Voronezh state technical University, candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor of management systems and information technologies in construction department, Voronezh, Russia  
E-mail: tv190470@yandex.ru