УДК 517.95

СЛЕДСТВИЕ ИЗ НЕРАВЕНСТВА ПЕТРЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ $\mathbb{T}$-ПСЕВДОСДВИГОВ В R_1

Ю. Н. Булатов

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Поступила в редакцию 12.02.2023 г.

Аннотация. Работа посвящена построению алгебры специального вида одномерных псевдодифференциальных операторов, включающих операторы Бесселя отрицательного параметра. Одной из важнейших задач является улучшение некоторых элементарных оценок, связанных с оператором псевдосдвига, коммутирующим с указанным выше оператором Бесселя. Это неравенство получено Л. Н. Ляховым, для изучаемых ранее j-псевдодифференциальных операторов на основе обобщенного сдвига Пуассона.

Ключевые слова: сферическая симметрия, сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, J-преобразования Бесселя, обобщенный сдвиг Пуассона–Левитана, обобщенный псевдосдвиг.

A COROLLARY FROM PETRE'S INEQUALITY FOR GENERALIZED $\mathbb{T}$-PSEUDO-SHIFTINGS IN R_1

Yu. N. Bulatov

Abstract. The work is devoted to the construction of an algebra of a special type of one-dimensional pseudodifferential operators, including Bessel operators of a negative parameter. One of the most important tasks is to improve some elementary estimates associated with the pseudoshift operator commuting with the above Bessel operator. This inequality was obtained by L. N. Lyakhov for the previously studied j-pseudodifferential operators on the basis of the generalized Poisson shift.

Keywords: spherical symmetry, Bessel singular differential operator, Bessel J-transforms, generalized Poisson–Levitan shift, generalized pseudoshift.

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе речь идет о сингулярном дифференциальном операторе Бесселя

$$B_{-\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{-\gamma}{x}\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad -\gamma < 0,$$

в области $x \in \mathrm{R}_1^+ = \{x :\ x > 0\}$ с отрицательным параметром. Сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^{n} B_{-\gamma_i},$$

слагаемые которого представляют собой операторы Бесселя с параметром $-\gamma_i \in (-1{,}0)$, изучался в [5], где решалась задача Дирихле с граничным условием на поверхности шара и это привело к новому специальному классу весовых сферических функций.

Принципиальной особенностью изучаемого здесь оператора $B_{-\gamma}$ заключается в том, что оператор, играющий роль “сдвига” и коммутирующий с оператором $B_{-\gamma}$, не принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана. Далее он будет называться $\mathbb{T}$-псевдосдвигом. Работа с этим оператором, создает особые трудности при исследовании класса сингулярных псевдодифференциальных операторов, которые включают в себя указанные выше операторы Бесселя. Этот класс сингулярных псевдодифференциальных операторов будем называть *сингулярными* J*-псевдодифференциальными операторами И. А. Киприянова* (в дальнейшем, сокращая будем писать J-ПДО).

Преобразование Бесселя, которое применяется при построении J-ПДО, основано на функциях Бесселя, удовлетворяющих сингулярному дифференциальному уравнению Бесселя $B_{-\gamma}u(x) + u(x) = 0$. Эти функции будем называть J-*функции Бесселя* и обозначать $\mathrm{J}_{\pm\mu}$, где $\mu = \frac{1+\gamma}{2}$. Эти функции в дальнейшем будут ядрами соответствующих интегральных преобразований Бесселя, используемых при построении J-ПДО.

J–Функции Бесселя использовались в работах [6], [8] для изучения уравнений с оператором Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$ и для построения специального класса сингулярных J-ПДО.

1. РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ С ПАРАМЕТРОМ $-\gamma < 0$

J-Функции Бесселя определены как линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя

$$B_{-\gamma}\ \mathrm{J}_{\pm\mu}(\lambda x) + \lambda^2 \mathrm{J}_{\pm\mu}(\lambda x) = 0, \quad -\gamma < 0.$$

Пусть $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$. Фундаментальной системой решений этого уравнения являются следующие функции:

$$\mathrm{J}_{\mu}(x) = C_1\ x^{\mu}\ J_{\mu}(x) = x^{2\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ \Gamma(1+\mu)}{m!\Gamma\left(m+1+\mu\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},\ C_1 = 2^{\mu}\Gamma(1+\mu),$$

$$\mathrm{J}_{-\mu}(x) = C_2\ x^{\mu}\ J_{-\mu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ \Gamma(1-\mu)}{m!\Gamma\left(m+1-\mu\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},\ C_2 = 2^{-\mu}\Gamma(1-\mu),$$

где J_{μ} — функция Бесселя первого рода, $\mu > \frac{1}{2}$. В отличие от [6], нам удобнее рассматривать J-функции Бесселя, с соответствующими коэффициентами, облегчающими связь этих функций с j-функциями Бесселя

$$j_{\mu}(x) = 2^{\mu}\Gamma(\mu+1)\frac{J_{\mu}(x)}{x^{\mu}}, \qquad \mu > -\frac{1}{2},$$

которые определены в работе [3], т. е. мы будем полагать $\mathrm{J}_{\mu}(x) = x^{2\mu} j_{\mu}(x)$.

Для j-функции Бесселя с параметром $\mu > -\frac{1}{2}$ в работе [3] приведены свойства и доказана следующая теорема сложения

$$j_{\mu}(tx) j_{\mu}(ty) = T_x^y j_{\mu}(tx),$$

где T_x^y — обобщенный сдвиг Пуассона:

$$T_x^y f(tx) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad \int_0^{\pi} f\left(t\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha.$$

Функции j_{μ} и J_{μ} имеют положительный индекс и связаны равенством

$$\mathrm{J}_{\mu}(x) = x^{2\mu} j_{\mu}(x),$$

из которого в [6] получена теорема сложения для J_{μ}-функций Бесселя

$$\mathrm{J}_{\mu}(xt)\mathrm{J}_{\mu}(yt) = \mathbb{T}_x^y \mathrm{J}_{\mu}(xt), \tag{1}$$

где $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$, $\mu > \frac{1}{2}$ и в равенстве (1) оператор $\mathbb{T}_x^y$, имеет следующий вид

$$\mathbb{T}_x^y f(tx) = C_\mu \ (tx)^{2\mu}(ty)^{2\mu} \int_0^\pi \frac{f\left(t\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)}{\left(t\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)^{2\mu}} \ \sin^{2\mu}\alpha \ d\alpha, \tag{2}$$

где

$$C_\mu = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)}.$$

Оператор (2) будем называть обобщенным $\mathbb{T}$-псевдосдвигом. Этот сдвиг уже не принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана, так как $\mathrm{T}_x^0 f(x) \neq f(x)$, $\quad \mathbb{T}_x^y 1 \neq 1$.

2. $\mathbb{T}$-ПСЕВДОСДВИГ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

Отметим, что особенность, возникающая в (2) при $x = y$ и при $\alpha = 0$, является слабой. Здесь приведены лишь необходимые в этой работе свойства $\mathbb{T}$-псевдосдвига, взятые из работы [6].

Свойство 1 (Самосопряжённость $\mathbb{T}$-псевдосдвига). Пусть f и g четные, для которых

$$\int_0^\infty |\ f(x)|x^{-\gamma}dx < \infty \text{ и } \int_0^\infty |\ g(x)|x^{-\gamma}dx < \infty\ ,$$

тогда

$$\int_0^\infty \mathbb{T}^y f(x) g(x) x^{-\gamma} dx = \int_0^\infty f(x)\mathbb{T}^y g(x) x^{-\gamma} dx.$$

Свойство 2 (Коммутируемость $\mathbb{T}$-псевдосдвига с сингулярным дифференциальным оператором $B_{-\gamma}$). Пусть f четная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, $0 < \gamma < 1$ и $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0,\infty)$. Тогда

$$B_{-\gamma,x}\mathbb{T}^y f(x) = \mathbb{T}^y B_{-\gamma,x} f(x).$$

Свойство 3 (Переместительность $\mathbb{T}$-псевдосдвига). Если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по J-функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}^y\mathbb{T}^z f(x) = \mathbb{T}^z\mathbb{T}^y f(x).$$

Свойство 4 (Ассоциативность $\mathbb{T}$-псевдосдвига). Если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по J-функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}_y^z\mathbb{T}^y f(x) = \mathbb{T}^z\mathbb{T}^y f(x).$$

3. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ T-ПСЕВДОСДВИГА В R_1

Доказываемое в этом пункте работы неравенство для T-псевдосдвига ранее было получено Л. Н. Ляховым для обобщенного сдвига Пуассона, действующего по одной из переменных (см. [4]).

При изучении классических псевдодифференциальных операторов важную роль играет неравенство Петре [7]

$$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^k \leqslant\ 2^{|k|}\ \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{|k|}\ ,\ \ k \in \mathrm{R}_n, \tag{3}$$

и интегральное неравенство

$$\int\limits_0^\infty \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{-p} \left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{-q} d\eta \leqslant C\left(1+|\xi-\tau|^2\right)^{-p}, \tag{4}$$

где p и q произвольные достаточно большие числа.

Соответствующим аналогом неравенства (4) является неравенство
Л. Н. Ляхова для обобщенного сдвига Пуассона, действующего по последней переменной (см. в [4] лемму 1 и лемму 2).

Приведем формулировку этого неравенства.

Пусть $\xi=(\xi',\xi_{n+1}),\eta=(\eta',\eta_{n+1}),\tau=(\tau',\tau_{n+1})$ принадлежат пространству R^+_{n+1} и пусть $q=3p$ произвольное большое число. Тогда имеет место следующее неравенство

$$\int\limits_{\mathrm{R}^+_{n+1}} T^{\xi_{n+1}}_{\eta_{n+1}}\left(1+|\xi'-\eta'|^2+\eta^2_{n+1}\right)^{-p} T^{\eta_{n+1}}_{\tau_{n+1}}\left(1+|\eta'-\tau'|^2+\tau^2_{n+1}\right)^{-q}\eta^{-\gamma}d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\, T^{\xi_{n+1}}_{\tau_{n+1}}\left(1+|\xi'-\tau'|^2+\tau^2_{n+1}\right)^{-p}. \tag{5}$$

Необходимость в неравенствах аналогичных (4) и (5) возникает при исследовании сингулярных J-псевдодифференциальные операторов.

Теорема 1. Пусть ξ,η,τ точки пространства R^+_1 и пусть p и q произвольные достаточно большие числа. Тогда

$$\int\limits_{\mathrm{R}^+_n} \mathbb{T}^\xi_\eta\left(1+\eta^2\right)^{-p}\mathbb{T}^\eta_\tau\left(1+\tau^2\right)^{-q}\eta^{-\gamma}d\eta \quad\leqslant\quad C\quad \mathbb{T}^\xi_\tau\left(1+\tau^2\right)^{-p} \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим левую часть неравенства (6) через I. Имеем

$$I=\int\limits_{\mathrm{R}^+_1} \mathbb{T}^\xi_\eta\left(1+\eta^2\right)^{-p}\mathbb{T}^\eta_\tau\left(1+\tau^2\right)^{-q}\eta^{-\gamma}d\eta.$$

Применяя свойство самосопряжённости $\mathbb{T}$-псевдосдвига (см. свойство 1), получим

$$I=\int\limits_{\mathrm{R}^+_1} \mathbb{T}^\tau_\eta \mathrm{T}^\xi_\eta\left(1+\eta^2\right)^{-p}\left(1+\eta^2\right)^{-q}\eta^{-\gamma}d\eta.$$

Далее используем свойство переместительности оператора T-псевдосдвига, тогда

$$I=\int\limits_{\mathrm{R}^+_1} \mathbb{T}^\xi_\eta \mathbb{T}^\tau_\eta\left(1+\eta^2\right)^{-p}\left(1+\eta^2\right)^{-q}\eta^{-\gamma}d\eta.$$

По свойству ассоциативности оператора $\mathbb{T}$-псевдосдвига (см. свойство 4), имеем

$$I=\int\limits_{\mathrm{R}^+_1} \mathbb{T}^\xi_\tau \mathbb{T}^\tau_\eta\left(1+\eta^2\right)^{-p}\left(1+\eta^2\right)^{-q}\eta^{-\gamma}d\eta. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим отдельно $\mathbb{T}^\tau_\eta\left(1+\eta^2\right)^{-p}$:

$$\mathbb{T}^\tau_\eta\left(1+\eta^2\right)^{-p}=C_\mu\quad\int_0^\pi(\eta\tau)^{2\mu}\frac{\left(\sqrt{1+\eta^2+\tau^2-2\eta\tau\cos\alpha}\right)^{-p}}{\left(\sqrt{\eta^2+\tau^2-2\eta\tau\cos\alpha}\right)^{2\mu}}\ \sin^{2\mu}\alpha\ d\alpha.$$

Учитывая, что
$$|\eta-\tau|^2 \leqslant \ \eta^2+\tau^2-2\eta\tau \ \cos\alpha, \tag{8}$$
получим
$$\mathbb{T}^\tau_\eta \left(1+\eta^2\right)^{-p} = C_\mu \ \int_0^\pi (\eta\tau)^{2\mu} \frac{\left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{-p}}{\left(\sqrt{\eta^2+\tau^2-2\eta\tau\cos\alpha}\right)^{2\mu}} \ \sin^{2\mu}\alpha \ d\alpha.$$

Следовательно, т. к. $\mu=\frac{\gamma+1}{2}$, то
$$\mathbb{T}^\tau_\eta \left(1+\eta^2\right)^{-p} = C_\mu \int\limits_0^\pi \left(\frac{\eta\tau}{\sqrt{\eta^2+\tau^2-2\eta\tau\cos\alpha}}\right)^{\gamma+1} \left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{-p} \sin^{\gamma+1}\alpha d\alpha.$$

Минимальное значение выражение $\sqrt{\eta^2+\tau^2-2\eta\tau\cos\alpha}$ принимает при $\alpha=0$ и $\eta=\tau$. Положим $\eta=\tau$, тогда
$$\mathbb{T}^\tau_\eta \left(1+\eta^2\right)^{-p} = C_\mu \int\limits_0^\pi \left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 2(1-\cos\alpha)}}\right)^{\gamma+1} \left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{-p} \sin^{\gamma+1}\alpha d\alpha =$$
$$= C_\mu \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^{\gamma+1} \left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{-p} 2\sin^{\gamma+1}\frac{\alpha}{2}\cos^{\gamma+1}\frac{\alpha}{2} d\alpha =$$
$$= C_\mu \int\limits_0^\pi \left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{-p} \cos^{\gamma+1}\frac{\alpha}{2} d\alpha.$$

Теперь перейдём к пределу при $\alpha\to 0$. В результате
$$\mathbb{T}^\tau_\eta \left(1+\eta^2\right)^{-p} = \lim_{\alpha\to 0} \ C_\mu \int\limits_0^\pi \left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{-p} \cos^{\gamma+1}\frac{\alpha}{2} \ d\alpha =$$
$$= C_\mu \left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{-p}.$$

Теперь вернемся к основному неравенству (7). Имеем
$$I \leqslant C_\mu \mathbb{T}^\xi_\tau \int\limits_{\mathrm{R}_1^+} \left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{-p} \left(1+\eta^2\right)^{-q} \eta d\eta.$$

Из неравенства Петре (3), получим
$$\left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\tau|^2}\right)^p \leqslant \quad 2^{|p|} \left(1+|\eta-\tau|^2\right)^{|p|}, \ p\in\mathrm{R}_1,$$
следовательно
$$I \ \leqslant \ 2^{|p|} C_\mu \ \mathbb{T}^\xi_\tau \int\limits_{\mathrm{R}_1^+} \left(\frac{1+\tau^2}{1+\eta^2}\right)^{-p} \left(1+\eta^2\right)^{-q} \eta d\eta.$$

Обозначим приведенные выше постоянные $2^{|p|}C_\mu$ за C. Тогда
$$I \ \leqslant \ C \ \mathbb{T}^\xi_\tau \left(1+\tau^2\right)^{-p} \int\limits_{\mathrm{R}_1^+} \left(1+\eta^2\right)^p \left(1+\eta^2\right)^{-q} \left(1+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}} d\eta =$$

$$= \ C \ \mathbb{T}_\tau^\xi \left(1+\tau^2\right)^{-p} \int\limits_{\mathrm{R}_1^+} \left(1+\eta^2\right)^{p-q+\frac{1}{2}} d\eta.$$

Поскольку p и q произвольные числа, то положим $p-q > -n-\frac{3}{2}$. Тогда

$$\int\limits_{\mathrm{R}_1^+} \mathbb{T}_\eta^\xi \left(1+\eta^2\right)^{-p} \mathbb{T}_\tau^\eta \left(1+\tau^2\right)^{-q} \eta^{-\gamma} d\eta \ \leqslant \ C \ \ \mathbb{T}_\tau^\xi \left(1+\tau^2\right)^{-p}$$

Доказательство закончено.

Теорема 2. Пусть ξ,η точки пространства R_1^+. Тогда для любых p и q

$$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^k \ \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1+\xi^2\right)^{-p} \ \leqslant \ C \ \ \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1+\xi^2\right)^{|k|-p} \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим левую часть неравенства (9) через Q. Тогда

$$Q = \left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^k \ \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1+\xi^2\right)^{-p}.$$

Согласно неравенству Петре (3), имеем

$$Q = \left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^k \ \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1+\xi^2\right)^{-p} \ \leqslant \ 2^{|k|} \ \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{|k|} \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1+\xi^2\right)^{-p} =$$

$$= 2^{|k|} \ \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{|k|} C_\mu \ \ \int_0^\pi (\xi\eta)^{2\mu} \frac{\left(\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\alpha}\right)^{-p}}{\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2-2\xi\tau\cos\alpha}\right)^{2\mu}} \ \sin^{2\mu}\alpha \ d\alpha.$$

Согласно неравенству (8), получим

$$Q \ \leqslant 2^{|k|} \ C_\mu \ \left(\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\alpha}\right)^{|k|} \ \int_0^\pi (\xi\eta)^{2\mu} \frac{\left(\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\alpha}\right)^{-p}}{\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2-2\xi\tau\cos\alpha}\right)^{2\mu}} \ \sin^{2\mu}\alpha \ d\alpha.$$

Обозначим постоянные за C. Тогда

$$Q \ \leqslant C \ \left(\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\alpha}\right)^{|k|} \ \int_0^\pi (\xi\eta)^{2\mu} \frac{\left(\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\alpha}\right)^{-p}}{\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2-2\xi\tau\cos\alpha}\right)^{2\mu}} \ \sin^{2\mu}\alpha \ d\alpha \ \leqslant$$

$$\leqslant C \ \ \int_0^\pi (\xi\eta)^{2\mu} \frac{\left(\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\alpha}\right)^{|k|-p}}{\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2-2\xi\tau\cos\alpha}\right)^{2\mu}} \ \sin^{2\mu}\alpha \ d\alpha \ \leqslant C \ \ \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1+\xi^2\right)^{|k|-p}.$$

Доказательство закончено.

Отметим также, что из неравенства (8) аналогично доказательству теоремы 2 получим весьма полезное для теории J-ПДО неравенство

$$\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{|k|} \mathrm{T}_\xi^\eta \left(1+\xi^2\right)^{-p} \ \leqslant \ \ C \ \ \mathrm{T}_\xi^\eta \left(1+\xi^2\right)^{|k|-p}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведены линейно независимые решения сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma}\ \mathrm{J}_{\pm\mu}(\lambda x)+\lambda^2\mathrm{J}_{\pm\mu}(\lambda x)=0$, и теорема сложения для J_μ-функций Бесселя. Приведен коммутирующий с оператором $B_{-\gamma}$ $\mathbb{T}$-псевдосдвиг. Доказаны интегральные неравенства для $\mathbb{T}$-псевдосдвига в R_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киприянов, И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 200 с.

2. Киприянов, И. А. Об одном классе псевдодифференциальных операторов / И. А. Киприянов, Л. Н. Ляхов // Доклады Академии наук СССР. — 1974. — Т. 218, № 2. — С. 278–280.

3. Левитан, Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. –1951. — Т. 6, вып. 2 (42). — С. 102–143.

4. Ляхов, Л. Н. Граничные задачи для B-эллиптических уравнений / Л. Н. Ляхов. — Минск, Беларусь, Белорусский ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт, автореф. канд. диссерт., 1982. — 20 с.

5. Ляхов, Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для b-гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.

6. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δв-оператора Киприянова / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654–1665.

7. Peetre, J. Another approach to elliptic boundary problems / J. Peetre // Comm. Pure. Appl. Math. — 1961. — V. 14. — C. 711–731.

8. Lyakhov, L. N. Kipriyanov Singular Pseudodifferential Operators Generated by Bessel $\mathbb{J}$-Transform / L. N. Lyakhov, S. A. Roshchupkin, Y. N. Bulatov // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — V. 269, № 2. — P. 205–216.

REFERENCES

1. Kipriyanov I.A. Singular elliptic boundary value problems. [Kipriyanov I.A. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi]. Moscow, 1997, 200 p.

2. Kipriyanov I.A., Lyakhov L.N. On a class of pseudodifferential operators. [Kipriyanov I.A., Lyahov L.N. Ob odnom klasse psevdodifferencial'nyh operatorov]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1974, vol. 218, no. 2, pp. 278–280.

3. Levitan B.M. Decomposition into series and Fourier integrals by Bessel functions. [Levitan B.M. Razlozhenie v ryady i integraly Fur'e po funkciyam Besselya]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1951, vol. 6, iss. 2 (42), pp. 102–143.

4. Lyakhov L.N. Boundary value problems for B-elliptic equations. Minsk, Belarus, Belarusian Order of the Red Banner of Labor Polytechnic Institute, abstract of the candidate's dissertation. [Lyahov L.N. Granichnye zadachi dlya V-ellipticheskih uravnenij. Minsk, Belarus', Belorusskij ordena Trudovogo Krasnogo Znameni politekhnicheskij institut, avtoreferat kandidatskoj dissertacii]. 1982, 20 p.

5. Lyakhov L. N., Sanina E. L. The Kipriyanov-Beltrami operator with negative dimension of Bessel operators and the Dirichlet singular problem for the b-harmonic equation. [Lyahov L. N., Sanina E. L. Operator Kipriyanova–Bel'trami s otricatel'noj razmernost'yu operatorov Besselya i singulyarnaya zadacha Dirihle dlya b-garmonicheskogo uravneniya]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1610–1620.

6. Lyakhov L.N., Bulatov Yu.N., Roshchupkin S.A., Sanina E.L. Pseudo-shift and fundamental

solution of the Δb-operator of Kipriyanov. [Lyahov L. N., Bulatov YU.N., Roshchupkin S.A., Sanina E. L. Psevdosdvig i fundamental'noe reshenie Δv-operatora Kipriyanova]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 12, pp. 1654–1665.

7. Peetre J. Another approach to elliptic boundary problems. Comm. Pure. Appl. Math., 1961, vol. 14, pp. 711–731.

8. Lyakhov L.N., Roshchupkin S.A., Bulatov Y.N. Kipriyanov Singular Pseudodifferential Operators Generated by Bessel $\mathbb{J}$-Transform. Journal of Mathematical Sciences, 2023, vol. 269, no. 2, pp. 205–216.

Булатов Ю. Н., аспирант, Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия
E-mail: y.bulatov@bk.ru

Bulatov Yu. N., postgraduate student, Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
E-mail: y.bulatov@bk.ru