УДК 517.972

ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОСЬМОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО*

С. А. Будочкина, Т. Х. Лыу

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Поступила в редакцию 15.02.2022 г.

Аннотация. В данной работе исследована прямая представимость обыкновенного дифференциального уравнения восьмого порядка в форме уравнений Гамильтона-Остроградского. Для этого получены необходимые и достаточные условия прямой представимости заданного уравнения в форме уравнения Лагранжа-Остроградского и построено соответствующее действие по Гамильтону-Остроградскому. Определена также вариационная структура рассматриваемого обыкновенного дифференциального уравнения восьмого порядка.

Ключевые слова: билинейная форма, потенциальный оператор, прямая вариационная формулировка, действие по Гамильтону-Остроградскому, уравнения Гамильтона-Остроградского.

AN EIGHT-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION AND HAMILTON-OSTROGRADSKII EQUATIONS

S. A. Budochkina, T. H. Luu

Abstract. In the paper, we investigate the direct representability of an eight-order ordinary differential equation in the form of Hamilton-Ostrogradskii equations. For this purpose, necessary and sufficient conditions of the direct representability of the given equation in the form of Lagrange-Ostrogradskii equation are obtained and the corresponding Hamilton-Ostrogradskii action is constructed. The variational structure of the considered ordinary differential equation of the eighth order is also determined.

Keywords: bilinear form, potential operator, direct variational formulation, Hamilton-Ostrogradskii action, Hamilton-Ostrogradskii equations.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вариационные принципы сыграли основополагающую роль в становлении и развитии механики (см., например, монографию [1] и библиографию в ней). В [2], [3], [4] излагаются классические и современные методы решения основных задач динамики. Задачи исследования вариационности дифференциальных уравнений и их представимости в форме уравнений Гамильтона являются достаточно актуальными. Отметим, что этим вопросам посвящено значительное количество работ (см., например, [1], [5–17]). Представляет значительный интерес

* Публикация частично выполнена в рамках проекта № 002092–0–000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075–15–2022–1115).

распространить некоторые изложенные в этих работах методы на исследование вопросов прямой и косвенной представимости дифференциальных уравнений с производными высших порядков в форме уравнений Лагранжа-Остроградского, построение соответствующих функционалов - действий по Гамильтону-Остроградскому и представление этих уравнений в форме уравнений Гамильтона-Остроградского. В связи с этим вопрос о вариационности одного обыкновенного дифференциального уравнения восьмого порядка и его представимости в форме уравнений Гамильтона-Остроградского приобретает особую важность, что и определило актуальность данной работы.

Основная цель настоящей работы — установить связь прямой вариационной формулировки обыкновенного дифференциального уравнения восьмого порядка с уравнениями Гамильтона-Остроградского, т.е. получить условия прямой представимости заданного уравнения в форме уравнения Лагранжа-Остроградского, построить соответствующий функционал-вариационный принцип, применить схему Остроградского [16] для представления этого уравнения в форме уравнений Гамильтона-Остроградского. Для этого также требуется определить вариационную структуру рассматриваемого обыкновенного дифференциального уравнения восьмого порядка.

Следует отметить, что метод построения функционалов, предложенный в [9], [10], [11], требует введения некоторых дополнительных операторов для операторных уравнений (функций для обыкновенных дифференциальных уравнений). Разработанный в [7] подход позволяет избежать введения таких операторов (функций), а в настоящей работе он распространен на обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка, допускающее прямую вариационную формулировку.

Далее используем обозначения и терминологию из [1], [7].

Предположим, что U, V — действительные линейные нормированные пространства.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие определение и теорема.

Определение 1. [1] Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется потенциальным на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$, если существует дифференцируемый по Гато функционал $F_N : D(F_N) = D(N) \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\delta F_N[u,h] = \Phi(N(u),h) \quad \forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N'_u).$$

В этом случае говорят, что соответствующее уравнение $N(u) = 0$ допускает прямую вариационную формулировку.

Теорема 1. [1] Пусть дифференцируемый по Гато оператор $N : D(N) \subset U \to V$ и билинейная форма $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ такие, что для любых фиксированных элементов $u \in D(N)$, $g,h \in D(N'_u)$ функция $\varepsilon \to \Phi\left(N(u + \varepsilon h),g\right)$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,1]$. Тогда для потенциальности оператора N на выпуклом множестве $D(N)$ относительно рассматриваемой билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Phi(N'_u h,g) = \Phi(N'_u g,h) \quad \forall u \in D(N), \ \ \forall g,h \in D(N'_u). \tag{1}$$

При этом функционал имеет вид

$$F_N[u] = \int_0^1 \Phi(N(u_0 + \lambda(u - u_0)),u - u_0)d\lambda + F_N[u_0], \tag{2}$$

где u_0 - фиксированный элемент из $D(N)$.

Заметим, что N'_u является производной Гато оператора N в точке $u \in D(N)$. Область $D(N'_u)$ состоит из таких элементов $h \in U$, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$ для всех достаточно малых ε.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УСЛОВИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$N(u) \equiv \sum_{i=1}^{8} a_i(t)u^{(i)}(t) + a_0(t,u(t)) = 0, \ \ t \in (t_0,t_1). \tag{3}$$

Здесь $u = u(t)-$ неизвестная функция, $a_i \in C^i[t_0,t_1]$ $(i = \overline{1,8}), a_0 \in C^1([t_0,t_1] \times \mathbb{R})-$ заданные функции.

Зададим область определения оператора N (3) следующим образом:

$$D(N) = \Big\{u \in U = C^8[t_0,t_1] : u(t_0) = \varphi_1, u(t_1) = \varphi_2, u'(t_0) = \varphi_3, u'(t_1) = \varphi_4, \\ u''(t_0) = \varphi_5, u''(t_1) = \varphi_6, u'''(t_0) = \varphi_7, u'''(t_1) = \varphi_8\Big\}. \tag{4}$$

Отметим, что $V = C[t_0,t_1]$ и

$$D(N'_u) = \Big\{h \in U = C^8[t_0,t_1] : h(t_0) = 0, h(t_1) = 0, h'(t_0) = 0, h'(t_1) = 0, \\ h''(t_0) = 0, h''(t_1) = 0, h'''(t_0) = 0, h'''(t_1) = 0\Big\}.$$

Введем следующую билинейную форму:

$$\Phi(v,g) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt. \tag{5}$$

Теорема 2. Оператор N уравнения (3) является потенциальным на множестве $D(N)$ (4) относительно билинейной формы (5) тогда и только тогда, когда $\forall t \in [t_0, t_1]$ выполняются следующие условия:

$$a_7(t) - 4a'_8(t) = 0, \tag{6}$$

$$a_5(t) - 3a'_6(t) + 14a'''_8(t) = 0, \tag{7}$$

$$a_3(t) - 2a'_4(t) + 5a'''_6(t) - 28a_8^{(5)}(t) = 0, \tag{8}$$

$$a_1(t) - a'_2(t) + a'''_4(t) - 3a_6^{(5)}(t) + 17a_8^{(7)}(t) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Критерий потенциальности (1) в данном случае принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{8} a_i(t)h^{(i)}(t) + (a_0)'_u(t,u(t))h(t)\right)g(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{8} a_i(t)g^{(i)}(t) + (a_0)'_u(t,u(t))g(t)\right)h(t)dt$$

$$\forall u \in D(N), \quad \forall h,g \in D(N'_u). \tag{10}$$

Заметим, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{8} a_i(t)h^{(i)}(t)+(a_0)'_u(t,u(t))h(t)\right)g(t)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{8}(-1)^i(a_i(t)g(t))^{(i)}+(a_0)'_u(t,u(t))g(t)\right)h(t)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\Big(a_8^{(8)}(t)g(t)+8a_8^{(7)}(t)g'(t)+28a_8^{(6)}(t)g''(t)+56a_8^{(5)}(t)g'''(t)+$$
$$+70a_8^{(4)}(t)g^{(4)}(t)+56a_8'''(t)g^{(5)}(t)+28a_8''(t)g^{(6)}(t)+8a_8'(t)g^{(7)}(t)+$$

$$+a_8(t)g^{(8)}(t)-a_7^{(7)}(t)g(t)-7a_7^{(6)}(t)g'(t)-21a_7^{(5)}(t)g''(t)-$$
$$-35a_7^{(4)}(t)g'''(t)-35a_7'''(t)g^{(4)}(t)-21a_7''(t)g^{(5)}(t)-7a_7'(t)g^{(6)}(t)-$$
$$-a_7(t)g^{(7)}(t)+a_6^{(6)}(t)g(t)+6a_6^{(5)}(t)g'(t)+15a_6^{(4)}(t)g''(t)+$$

$$+20a_6'''(t)g'''(t)+15a_6''(t)g^{(4)}(t)+6a_6'(t)g^{(5)}(t)+a_6(t)g^{(6)}(t)-$$
$$-a_5^{(5)}(t)g(t)-5a_5^{(4)}(t)g'(t)-10a_5'''(t)g''(t)-10a_5''(t)g'''(t)-$$
$$-5a_5'(t)g^{(4)}(t)-a_5(t)g^{(5)}(t)+a_4^{(4)}(t)g(t)+4a_4'''(t)g'(t)+$$

$$+6a_4''(t)g''(t)+4a_4'(t)g'''(t)+a_4(t)g^{(4)}(t)-a_3'''(t)g(t)-$$
$$-3a_3''(t)g'(t)-3a_3'(t)g''(t)-a_3(t)g'''(t)+a_2''(t)g(t)+2a_2'(t)g'(t)+$$
$$+a_2(t)g''(t)-a_1'(t)g(t)-a_1(t)g'(t)+(a_0)'_u(t,u(t))g(t)\Big)h(t)dt.$$

Таким образом, из (10) получаем

$$\Phi(N'_uh,g)-\Phi(N'_ug,h)=\int_{t_0}^{t_1}\Big(a_8^{(8)}(t)g(t)+8a_8^{(7)}(t)g'(t)+28a_8^{(6)}(t)g''(t)+56a_8^{(5)}(t)g'''(t)+$$
$$+70a_8^{(4)}(t)g^{(4)}(t)+56a_8'''(t)g^{(5)}(t)+28a_8''(t)g^{(6)}(t)+8a_8'(t)g^{(7)}(t)+$$
$$+a_8(t)g^{(8)}(t)-a_7^{(7)}(t)g(t)-7a_7^{(6)}(t)g'(t)-21a_7^{(5)}(t)g''(t)-$$

$$-35a_7^{(4)}(t)g'''(t)-35a_7'''(t)g^{(4)}(t)-21a_7''(t)g^{(5)}(t)-7a_7'(t)g^{(6)}(t)-$$
$$-a_7(t)g^{(7)}(t)+a_6^{(6)}(t)g(t)+6a_6^{(5)}(t)g'(t)+15a_6^{(4)}(t)g''(t)+$$
$$+20a_6'''(t)g'''(t)+15a_6''(t)g^{(4)}(t)+6a_6'(t)g^{(5)}(t)+a_6(t)g^{(6)}(t)-$$

$$-a_5^{(5)}(t)g(t)-5a_5^{(4)}(t)g'(t)-10a_5'''(t)g''(t)-10a_5''(t)g'''(t)-$$
$$-5a_5'(t)g^{(4)}(t)-a_5(t)g^{(5)}(t)+a_4^{(4)}(t)g(t)+4a_4'''(t)g'(t)+$$
$$+6a_4''(t)g''(t)+4a_4'(t)g'''(t)+a_4(t)g^{(4)}(t)-a_3'''(t)g(t)-$$

$$- 3a_3''(t)g'(t) - 3a_3'(t)g''(t) - a_3(t)g'''(t) + a_2''(t)g(t) + 2a_2'(t)g'(t)+$$
$$+ a_2(t)g''(t) - a_1'(t)g(t) - a_1(t)g'(t) - \sum_{i=1}^{8} a_i(t)g^{(i)}(t)\Big)h(t)dt = 0$$
$$\forall h,g \in D(N_u').$$

Это тождественно выполняется тогда и только тогда, когда

$$a_8^{(8)}(t)g(t) + 8a_8^{(7)}(t)g'(t) + 28a_8^{(6)}(t)g''(t) + 56a_8^{(5)}(t)g'''(t)+$$
$$+70a_8^{(4)}(t)g^{(4)}(t) + 56a_8'''(t)g^{(5)}(t) + 28a_8''(t)g^{(6)}(t) + 8a_8'(t)g^{(7)}(t)+$$

$$+a_8(t)g^{(8)}(t) - a_7^{(7)}(t)g(t) - 7a_7^{(6)}(t)g'(t) - 21a_7^{(5)}(t)g''(t)-$$
$$-35a_7^{(4)}(t)g'''(t) - 35a_7'''(t)g^{(4)}(t) - 21a_7''(t)g^{(5)}(t) - 7a_7'(t)g^{(6)}(t)-$$
$$-a_7(t)g^{(7)}(t) + a_6^{(6)}(t)g(t) + 6a_6^{(5)}(t)g'(t) + 15a_6^{(4)}(t)g''(t)+$$

$$+20a_6'''(t)g'''(t) + 15a_6''(t)g^{(4)}(t) + 6a_6'(t)g^{(5)}(t) + a_6(t)g^{(6)}(t)-$$
$$-a_5^{(5)}(t)g(t) - 5a_5^{(4)}(t)g'(t) - 10a_5'''(t)g''(t) - 10a_5''(t)g'''(t)-$$
$$-5a_5'(t)g^{(4)}(t) - a_5(t)g^{(5)}(t) + a_4^{(4)}(t)g(t) + 4a_4'''(t)g'(t)+$$

$$+6a_4''(t)g''(t) + 4a_4'(t)g'''(t) + a_4(t)g^{(4)}(t) - a_3'''(t)g(t)-$$
$$-3a_3''(t)g'(t) - 3a_3'(t)g''(t) - a_3(t)g'''(t) + a_2''(t)g(t) + 2a_2'(t)g'(t)+$$
$$+a_2(t)g''(t) - a_1'(t)g(t) - a_1(t)g'(t) - \sum_{i=1}^{8} a_i(t)g^{(i)}(t) = 0$$
$$\forall g \in D(N_u').$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a_8^{(8)}(t) - a_7^{(7)}(t) + a_6^{(6)}(t) - a_5^{(5)}(t) + a_4^{(4)}(t) - a_3'''(t) + a_2''(t) - a_1'(t) = 0, \tag{11}$$

$$8a_8^{(7)}(t) - 7a_7^{(6)}(t) + 6a_6^{(5)}(t) - 5a_5^{(4)}(t) + 4a_4'''(t) - 3a_3''(t) + 2a_2'(t) - 2a_1(t) = 0, \tag{12}$$

$$28a_8^{(6)}(t) - 21a_7^{(5)}(t) + 15a_6^{(4)}(t) - 10a_5'''(t) + 6a_4''(t) - 3a_3'(t) = 0, \tag{13}$$

$$56a_8^{(5)}(t) - 35a_7^{(4)}(t) + 20a_6'''(t) - 10a_5''(t) + 4a_4'(t) - 2a_3(t) = 0, \tag{14}$$

$$70a_8^{(4)}(t) - 35a_7'''(t) + 15a_6''(t) - 5a_5'(t) = 0, \tag{15}$$

$$56a_8'''(t) - 21a_7''(t) + 6a_6'(t) - 2a_5(t) = 0, \tag{16}$$

$$28a_8''(t) - 7a_7'(t) = 0, \tag{17}$$

$$8a_8'(t) - 2a_7(t) = 0. \tag{18}$$

Заметим, что условия (11) - (18) сводятся к условиям (6) - (9). □

3. ПОСТРОЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

Теорема 3. Если выполнены условия (6) - (9), то действие по Гамильтону-Остроградскому имеет вид

$$F_N[u]=\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\frac{1}{2}\bigg(17a_8^{(6)}(t)-3a_6^{(4)}(t)+a_4''(t)-a_2(t)\bigg)\big(u'(t)\big)^2+ \\ +\frac{1}{2}\bigg(17a_8^{(4)}(t)-3a_6''(t)+a_4(t)\bigg)\big(u''(t)\big)^2+ \\ +\frac{1}{2}\bigg(6a_8''(t)-a_6(t)\bigg)\big(u'''(t)\big)^2+\frac{1}{2}a_8(t)\big(u^{(4)}(t)\big)^2+B\big(t,u(t)\big)\Bigg]dt, \tag{19}$$

где

$$B\big(t,u(t)\big)=\int_0^1 a_0(t,\widetilde{u}(t,\lambda))(u(t)-u_0(t))d\lambda+B\big(t,u_0(t)\big), \tag{20}$$

$\widetilde{u}(t,\lambda)=u_0(t)+\lambda\big(u(t)-u_0(t)\big), u_0=u_0(t)-$ фиксированный элемент из $D(N), B\in C^2([t_0,t_1]\times\mathbb{R})$.

Доказательство. Если условия (6) - (9) выполнены, то по теореме 2 оператор N (3) является потенциальным на множестве $D(N)$ (4) относительно билинейной формы (5). Тогда по формуле (2) получаем

$$F_N[u]=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\Bigg[\sum_{i=1}^{8}a_i(t)\frac{\partial^i\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^i}\big(u(t)-u_0(t)\big)+a_0(t,\widetilde{u}(t,\lambda))\big(u(t)-u_0(t)\big)\Bigg]d\lambda dt+F_N[u_0].$$

Обозначим

$$J_i[u]=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_i(t)\frac{\partial^i\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^i}\big(u(t)-u_0(t)\big)d\lambda dt,\quad i=\overline{1,8}.$$

Имеем

$$J_8[u]=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_8(t)\frac{\partial^8\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^8}(u(t)-u_0(t))d\lambda dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\Bigg[a_8^{(4)}(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))+4a_8'''(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))'+ \\ +6a_8''(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))''+4a_8'(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))'''+ \\ +a_8(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))^{(4)}\Bigg]d\lambda dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\Bigg[-a_8^{(5)}(t)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))-5a_8^{(4)}(t)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))'- \\ -10a_8'''(t)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))''-6a_8''(t)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))'''+ \\ +4a_8'(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))'''+a_8(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))^{(4)}\Bigg]d\lambda dt=$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \bigg[a_8^{(6)}(t)\frac{\partial^2 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t)) + 6a_8^{(5)}(t)\frac{\partial^2 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))' +$$

$$+5a_8^{(4)}(t)\frac{\partial^2 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))'' - 10a_8'''(t)\frac{\partial^3 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))'' -$$

$$-6a_8''(t)\frac{\partial^3 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))''' + 4a_8'(t)\frac{\partial^4 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))''' +$$

$$+a_8(t)\frac{\partial^4 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))^{(4)} \bigg] d\lambda dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \bigg[- a_8^{(7)}(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t)) - a_8^{(6)}(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))' +$$

$$+6a_8^{(5)}(t)\frac{\partial^2 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))' + 5a_8^{(4)}(t)\frac{\partial^2 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))'' -$$

$$-10a_8'''(t)\frac{\partial^3 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))'' - 6a_8''(t)\frac{\partial^3 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))''' +$$

$$+4a_8'(t)\frac{\partial^4 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))''' + a_8(t)\frac{\partial^4 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))^{(4)} \bigg] d\lambda dt.$$

Аналогично,

$$J_7[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_7(t)\frac{\partial^7 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^7}(u(t)-u_0(t)) d\lambda dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \bigg[a_7^{(6)}(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t)) + a_7^{(5)}(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))' -$$

$$-5a_7^{(4)}(t)\frac{\partial^2 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))' - 4a_7'''(t)\frac{\partial^2 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))'' +$$

$$+6a_7''(t)\frac{\partial^3 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))'' + 3a_7'(t)\frac{\partial^3 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))''' -$$

$$-a_7(t)\frac{\partial^4 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))''' \bigg] d\lambda dt,$$

$$J_6[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_6(t)\frac{\partial^6 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^6}(u(t)-u_0(t)) d\lambda dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \bigg[- a_6^{(5)}(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t)) - a_6^{(4)}(t)\frac{\partial \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))' +$$

$$+ 4a_6'''(t)\frac{\partial^2 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))' + 3a_6''(t)\frac{\partial^2 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))'' -$$

$$- 3a_6'(t)\frac{\partial^3 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))'' - a_6(t)\frac{\partial^3 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))''' \bigg] d\lambda dt,$$

$$J_5[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_5(t)\frac{\partial^5 \widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^5}(u(t)-u_0(t)) d\lambda dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Big[a_5^{(4)}(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t)) + a_5'''(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))' -$$

$$- 3a_5''(t)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))' - 2a_5'(t)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))'' +$$

$$+ a_5(t)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))''\Big]d\lambda dt,$$

$$J_4[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_4(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))d\lambda dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Big[- a_4'''(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t)) - a_4''(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))' +$$

$$+ 2a_4'(t)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))' + a_4(t)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))''\Big]d\lambda dt,$$

$$J_3[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_3(t)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))d\lambda dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Big[a_3''(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t)) + a_3'(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))' -$$

$$- a_3(t)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))'\Big]d\lambda dt,$$

$$J_2[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_2(t)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))d\lambda dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Big[- a_2'(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t)) - a_2(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))'\Big]d\lambda dt,$$

$$J_1[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_1(t)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))d\lambda dt.$$

Тогда

$$F_N[u] - F_N[u_0] = \sum_{i=1}^{8} J_i[u] + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 a_0(t,\widetilde{u}(t,\lambda))(u(t)-u_0(t))d\lambda dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 \Big[\Big(- a_8^{(7)}(t) + a_7^{(6)}(t) - a_6^{(5)}(t) + a_5^{(4)}(t) - a_4'''(t) + a_3''(t) - a_2'(t) +$$

$$+ a_1(t)\Big)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t)) +$$

$$+\Big(- a_8^{(6)}(t) + a_7^{(5)}(t) - a_6^{(4)}(t) + a_5'''(t) - a_4''(t) + a_3'(t) - a_2(t)\Big)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))' +$$

$$+\Big(6a_8^{(5)}(t) - 5a_7^{(4)}(t) + 4a_6'''(t) - 3a_5''(t) + 2a_4'(t) - a_3(t)\Big)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))' +$$

$$+\Big(5a_8^{(4)}(t) - 4a_7'''(t) + 3a_6''(t) - 2a_5'(t) + a_4(t)\Big)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))'' +$$

$$+\Big(-10a_8'''(t)+6a_7''(t)-3a_6'(t)+a_5(t)\Big)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))''+$$

$$+\Big(-6a_8''(t)+3a_7'(t)-a_6(t)\Big)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))'''+$$

$$+\Big(4a_8'(t)-a_7(t)\Big)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))'''+$$

$$+a_8(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))^{(4)}+a_0(t,\widetilde{u}(t,\lambda))(u(t)-u_0(t))\Big]d\lambda dt.$$

Используя условия (6)-(9), получаем

$$F_N[u]-F_N[u_0]=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\Big[\Big(17a_8^{(6)}(t)-3a_6^{(4)}(t)+a_4''(t)-a_2(t)\Big)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))'+$$
$$+\Big(17a_8^{(4)}(t)-3a_6''(t)+a_4(t)\Big)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))''+$$
$$+\Big(6a_8''(t)-a_6(t)\Big)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))'''+a_8(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))^{(4)}+$$
$$+a_0(t,\widetilde{u}(t,\lambda))(u(t)-u_0(t))\Big]d\lambda dt. \quad (21)$$

Отметим, что

$$\int_0^1\Big(17a_8^{(6)}(t)-3a_6^{(4)}(t)+a_4''(t)-a_2(t)\Big)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}(u(t)-u_0(t))'d\lambda=$$
$$=\int_0^1\Big(17a_8^{(6)}(t)-3a_6^{(4)}(t)+a_4''(t)-a_2(t)\Big)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial\lambda\partial t}d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big[\Big(17a_8^{(6)}(t)-3a_6^{(4)}(t)+a_4''(t)-a_2(t)\Big)\Big(\frac{\partial\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t}\Big)^2\Big]d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(17a_8^{(6)}(t)-3a_6^{(4)}(t)+a_4''(t)-a_2(t)\Big)\big(u'(t)\big)^2-\frac{1}{2}\Big(17a_8^{(6)}(t)-3a_6^{(4)}(t)+a_4''(t)-a_2(t)\Big)\big({u_0}'(t)\big)^2,$$

$$\int_0^1\Big(17a_8^{(4)}(t)-3a_6''(t)+a_4(t)\Big)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}(u(t)-u_0(t))''d\lambda=$$
$$=\int_0^1\Big(17a_8^{(4)}(t)-3a_6''(t)+a_4(t)\Big)\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial\lambda\partial t^2}d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big[\Big(17a_8^{(4)}(t)-3a_6''(t)+a_4(t)\Big)\Big(\frac{\partial^2\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^2}\Big)^2\Big]d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(17a_8^{(4)}(t)-3a_6''(t)+a_4(t)\Big)\big(u''(t)\big)^2-\frac{1}{2}\Big(17a_8^{(4)}(t)-3a_6''(t)+a_4(t)\Big)\big({u_0}''(t)\big)^2,$$

$$\int_0^1\Big(6a_8''(t)-a_6(t)\Big)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}(u(t)-u_0(t))'''d\lambda=\int_0^1\Big(6a_8''(t)-a_6(t)\Big)\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial\lambda\partial t^3}d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big[\Big(6a_8''(t)-a_6(t)\Big)\Big(\frac{\partial^3\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^3}\Big)^2\Big]d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(6a_8''(t)-a_6(t)\Big)\big(u'''(t)\big)^2-\frac{1}{2}\Big(6a_8''(t)-a_6(t)\Big)\big({u_0}'''(t)\big)^2,$$

$$\int_0^1 a_8(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}(u(t)-u_0(t))^{(4)}d\lambda=\int_0^1 a_8(t)\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}\frac{\partial^5\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial\lambda\partial t^4}d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[a_8(t)\left(\frac{\partial^4\widetilde{u}(t,\lambda)}{\partial t^4}\right)^2\right]d\lambda=\frac{1}{2}a_8(t)\big(u^{(4)}(t)\big)^2-\frac{1}{2}a_8(t)\big(u_0^{(4)}(t)\big)^2.$$

Учитывая (20), из (21) получаем функционал (19). □

4. СТРУКТУРА ЗАДАННОГО УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩЕГО ПРЯМУЮ ВАРИАЦИОННУЮ ФОРМУЛИРОВКУ

Теорема 4. Условия (6)–(9) выполняются тогда и только тогда, когда уравнение (3) имеет вид

$$\begin{gathered}N(u)\equiv-\left(17a_8^{(7)}(t)-3a_6^{(5)}(t)+a_4'''(t)-a_2'(t)\right)u'(t)+a_2(t)u''(t)+\\+\left(28a_8^{(5)}(t)-5a_6'''(t)+2a_4'(t)\right)u'''(t)+a_4(t)u^{(4)}(t)+\\+\left(-14a_8'''(t)+3a_6'(t)\right)u^{(5)}(t)+a_6(t)u^{(6)}(t)+\\+4a_8'(t)u^{(7)}(t)+a_8(t)u^{(8)}(t)+B_u'\big(t,u(t)\big)=0.\end{gathered}\tag{22}$$

Доказательство. Для функционала (19) имеем

$$\delta F_N[u,h]=\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\left(17a_8^{(6)}(t)-3a_6^{(4)}(t)+a_4''(t)-a_2(t)\right)u'(t)h'(t)+$$
$$+\left(17a_8^{(4)}(t)-3a_6''(t)+a_4(t)\right)u''(t)h''(t)+$$
$$+\left(6a_8''(t)-a_6(t)\right)u'''(t)h'''(t)+a_8(t)u^{(4)}(t)h^{(4)}(t)+B_u'\big(t,u(t)\big)h(t)\Bigg]dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[-\left(17a_8^{(7)}(t)-3a_6^{(5)}(t)+a_4'''(t)-a_2'(t)\right)u'(t)-\Big(17a_8^{(6)}(t)-3a_6^{(4)}(t)+a_4''(t)-a_2(t)-$$
$$-17a_8^{(6)}(t)+3a_6^{(4)}(t)-a_4''(t)\Big)u''(t)+\left(34a_8^{(5)}(t)-6a_6'''(t)+2a_4'(t)-6a_8^{(5)}(t)+a_6'''(t)\right)u'''(t)+$$
$$+\left(17a_8^{(4)}(t)-3a_6''(t)+a_4(t)-18a_8^{(4)}(t)+3a_6''(t)+a_8^{(4)}(t)\right)u^{(4)}(t)+$$
$$+\left(-18a_8'''(t)+3a_6'(t)+4a_8'''(t)\right)u^{(5)}(t)-\left(6a_8''(t)-a_6(t)-6a_8''(t)\right)u^{(6)}(t)+$$
$$+4a_8'(t)u^{(7)}(t)+a_8(t)u^{(8)}(t)+B_u'\big(t,u(t)\big)\Bigg]h(t)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[-\left(17a_8^{(7)}(t)-3a_6^{(5)}(t)+a_4'''(t)-a_2'(t)\right)u'(t)+a_2(t)u''(t)+$$
$$+\left(28a_8^{(5)}(t)-5a_6'''(t)+2a_4'(t)\right)u'''(t)+a_4(t)u^{(4)}(t)+\left(-14a_8'''(t)+3a_6'(t)\right)u^{(5)}(t)+a_6(t)u^{(6)}(t)+$$
$$+4a_8'(t)u^{(7)}(t)+a_8(t)u^{(8)}(t)+B_u'\big(t,u(t)\big)\Bigg]h(t)dt=\Phi(N(u),h)\quad\forall u\in D(N),\forall h\in D(N_u').$$

Следовательно, уравнение (3) представляется в виде (22). С другой стороны, уравнение (22) получено из условия стационарности функционала (19). Это значит, что условия (6)–(9) выполняются. □

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАННОГО УРАВНЕНИЯ В ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО

Теорема 5. Если уравнение (3) является уравнением Лагранжа-Остроградского для функционала (19), $a_8(t) \neq 0$, то это уравнение представимо в форме уравнений Гамильтона-Остроградского

$$\begin{aligned} u'(t) = u'(t),\, u''(t) = u''(t),\, u'''(t) = u'''(t),\ u^{(4)}(t) = \frac{p_4(t)}{a_8(t)}, \\ p_1'(t) = B_u'\big(t,u(t)\big), \\ p_2'(t) = -p_1(t) + \Big(17a_8^{(6)}(t) - 3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t)\Big)u'(t), \\ p_3'(t) = -p_2(t) + \Big(17a_8^{(4)}(t) - 3a_6''(t) + a_4(t)\Big)u''(t), \\ p_4'(t) = -p_3(t) + \Big(6a_8''(t) - a_6(t)\Big)u'''(t), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} p_1(t) = \Big(17a_8^{(6)}(t) - 3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t)\Big)u'(t) - \Big(17a_8^{(5)}(t) - 3a_6'''(t) + a_4'(t)\Big)u''(t) - \\ \Big(11a_8^{(4)}(t) - 2a_6''(t) + a_4(t)\Big)u'''(t) + \Big(11a_8'''(t) - 2a_6'(t)\Big)u^{(4)}(t) + \\ + \Big(3a_8''(t) - a_6(t)\Big)u^{(5)}(t) - 3a_8'(t)u^{(6)}(t) - a_8(t)u^{(7)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(t) = \Big(17a_8^{(4)}(t) - 3a_6''(t) + a_4(t)\Big)u''(t) - \Big(6a_8'''(t) - a_6'(t)\Big)u'''(t) - \\ - \Big(5a_8''(t) - a_6(t)\Big)u^{(4)}(t) + 2a_8'(t)u^{(5)}(t) + a_8(t)u^{(6)}(t), \end{aligned}$$

$$p_3(t) = \Big(6a_8''(t) - a_6(t)\Big)u'''(t) - a_8'(t)u^{(4)}(t) - a_8(t)u^{(5)}(t),$$

$$p_4(t) = a_8(t)u^{(4)}(t).$$

Доказательство. Из (19) получаем лагранжиан

$$L\big[t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t),u^{(4)}(t)\big] = \frac{1}{2}\Big(17a_8^{(6)}(t) - 3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t)\Big)\big(u'(t)\big)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(17a_8^{(4)}(t) - 3a_6''(t) + a_4(t)\Big)\big(u''(t)\big)^2 + \frac{1}{2}\Big(6a_8''(t) - a_6(t)\Big)\big(u'''(t)\big)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}a_8(t)\big(u^{(4)}(t)\big)^2 + B\big(t,u(t)\big).$$

Тогда

$$p_4(t) = \frac{\partial L}{\partial u^{(4)}(t)} = a_8(t)u^{(4)}(t) \tag{24}$$

и

$$u^{(4)}(t) = \frac{p_4(t)}{a_8(t)}.$$

Следовательно, гамильтониан H принимает вид

$$H\big[t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t),p_1(t),p_2(t),p_3(t),p_4(t)\big] = p_1(t)u'(t) + p_2(t)u''(t) +$$
$$+ p_3(t)u'''(t) + \left\{p_4(t)u^{(4)}(t) - L\big[t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t),u^{(4)}(t)\big]\right\}\Bigg|_{u^{(4)}(t)=\frac{p_4(t)}{a_8(t)}} =$$
$$= p_1(t)u'(t) + p_2(t)u''(t) + p_3(t)u'''(t) + \frac{p_4^2(t)}{2a_8(t)} -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(17a_8^{(6)}(t) - 3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t)\Big)\big(u'(t)\big)^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(17a_8^{(4)}(t) - 3a_6''(t) + a_4(t)\Big)\big(u''(t)\big)^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(6a_8''(t) - a_6(t)\Big)\big(u'''(t)\big)^2 - B\big(t,u(t)\big).$$

Имеем

$$\frac{\partial H}{\partial p_4(t)} = \frac{p_4(t)}{a_8(t)},$$

то есть

$$\frac{\partial H}{\partial p_4(t)} = u^{(4)}(t).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial H}{\partial p_3(t)} = u'''(t), \quad \frac{\partial H}{\partial p_2(t)} = u''(t), \quad \frac{\partial H}{\partial p_1(t)} = u'(t), \quad \frac{\partial H}{\partial u(t)} = -B_u'\big(t,u(t)\big),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u'(t)} = p_1(t) - \Big(17a_8^{(6)}(t) - 3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t)\Big)u'(t),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u''(t)} = p_2(t) - \Big(17a_8^{(4)}(t) - 3a_6''(t) + a_4(t)\Big)u''(t),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u'''(t)} = p_3(t) - \Big(6a_8''(t) - a_6(t)\Big)u'''(t).$$

Отметим, что для действия по Гамильтону-Остроградскому

$$F_N[u] = \int_{t_0}^{t_1} L\big[t, u(t),u'(t),u''(t),u'''(t),u^{(4)}(t)\big]dt$$

соответствующее уравнение Лагранжа-Остроградского имеет вид

$$N(u) \equiv \frac{\partial L}{\partial u(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'(t)} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial u''(t)} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial L}{\partial u'''(t)} + \frac{d^4}{dt^4}\frac{\partial L}{\partial u^{(4)}(t)} = 0. \tag{25}$$

Перепишем (25) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u''(t)} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial u'''(t)} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial L}{\partial u^{(4)}(t)}\right) = \frac{\partial L}{\partial u(t)}. \tag{26}$$

Для

$$\begin{aligned}
p_1(t) = \frac{\partial L}{\partial u'(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u''(t)} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial u'''(t)} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial L}{\partial u^{(4)}(t)} = \\
= \left(17a_8^{(6)}(t) - 3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t)\right)u'(t) - \\
-\left(17a_8^{(5)}(t) - 3a_6'''(t) + a_4'(t)\right)u''(t) - \left(17a_8^{(4)}(t) - 3a_6''(t) + a_4(t)\right)u'''(t) + \\
+\left(6a_8^{(4)}(t) - a_6''(t)\right)u'''(t) + 2\left(6a_8'''(t) - a_6'(t)\right)u^{(4)}(t) + \left(6a_8''(t) - a_6(t)\right)u^{(5)}(t) - \\
-a_8'''(t)u^{(4)}(t) - 3a_8''(t)u^{(5)}(t) - 3a_8'(t)u^{(6)}(t) - a_8(t)u^{(7)}(t) = \\
= \left(17a_8^{(6)}(t) - 3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t)\right)u'(t) - \\
-\left(17a_8^{(5)}(t) - 3a_6'''(t) + a_4'(t)\right)u''(t) - \left(11a_8^{(4)}(t) - 2a_6''(t) + a_4(t)\right)u'''(t) + \\
+\left(11a_8'''(t) - 2a_6'(t)\right)u^{(4)}(t) + \left(3a_8''(t) - a_6(t)\right)u^{(5)}(t) - \\
-3a_8'(t)u^{(6)}(t) - a_8(t)u^{(7)}(t)
\end{aligned} \tag{27}$$

из (26) получаем

$$p_1'(t) = \frac{\partial L}{\partial u(t)},$$

поэтому в данном случае

$$p_1'(t) = B_u'\big(t,u(t)\big).$$

Таким образом,

$$p_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial u(t)}.$$

Для

$$\begin{aligned} p_2(t) = \frac{\partial L}{\partial u''(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u'''(t)} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial u^{(4)}(t)} = \\ = \left(17a_8^{(4)}(t) - 3a_6''(t) + a_4(t)\right)u''(t) - \\ -\left(6a_8'''(t) - a_6'(t)\right)u'''(t) - \left(6a_8''(t) - a_6(t)\right)u^{(4)}(t) + \\ +a_8''(t)u^{(4)}(t) + 2a_8'(t)u^{(5)}(t) + a_8(t)u^{(6)}(t) = \\ = \left(17a_8^{(4)}(t) - 3a_6''(t) + a_4(t)\right)u''(t) - \\ -\left(6a_8'''(t) - a_6'(t)\right)u'''(t) - \left(5a_8''(t) - a_6(t)\right)u^{(4)}(t) + \\ +2a_8'(t)u^{(5)}(t) + a_8(t)u^{(6)}(t) \end{aligned} \tag{28}$$

из (27) получаем

$$p_2'(t) = \frac{\partial L}{\partial u'(t)} - p_1(t),$$

то есть

$$p_2'(t) = \left(17a_8^{(6)}(t) - 3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t)\right)u'(t) - p_1(t).$$

Следовательно,

$$p_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial u'(t)}.$$

Для

$$p_3(t) = \frac{\partial L}{\partial u'''(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u^{(4)}(t)} = \left(6a_8''(t) - a_6(t)\right)u'''(t) - a_8'(t)u^{(4)}(t) - a_8(t)u^{(5)}(t) \tag{29}$$

из (28) получаем

$$p_3'(t) = \frac{\partial L}{\partial u''(t)} - p_2(t) = \left(17a_8^{(4)}(t) - 3a_6''(t) + a_4(t)\right)u''(t) - p_2(t),$$

или

$$p_3'(t) = -\frac{\partial H}{\partial u''(t)}.$$

Для $p_4(t)$ (24) из (29) получаем

$$p_4'(t) = \frac{\partial L}{\partial u'''(t)} - p_3(t) = \left(6a_8''(t) - a_6(t)\right)u'''(t) - p_3(t),$$

то есть

$$p_4'(t) = -\frac{\partial H}{\partial u'''(t)}.$$

Таким образом, уравнение (3) с потенциальным оператором N представлено в форме уравнений Гамильтона-Остроградского (23). $\square$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка допускает прямое представление в форме уравнения Лагранжа-Остроградского, построен соответствующий функционал - действие по Гамильтону-Остроградскому и исследована представимость заданного уравнения в форме уравнений Гамильтона-Остроградского. Также определена вариационная структура обыкновенного дифференциального уравнения восьмого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчин, В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем / В. М. Савчин. — Москва : Изд-во УДН, 1991. — 237 с.

2. Галиуллин, А. С. Аналитическая динамика: учеб. пособие для студентов вузов / А. С. Галиуллин. — Москва : Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1998. — 441 с.

3. Козлов, В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике / В. В. Козлов // УМН. — 1983. — Т. 38, вып. 1(229). — С. 3–67.

4. Козлов, В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике / В. В. Козлов. — Ижевск : Удмуртский гос. университет, 1995.

5. Филиппов, В. М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов / В. М. Филиппов, В. М. Савчин, С. Г. Шорохов // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. матем. Нов. достиж. — 1992. — Т. 40. — С. 3–176.

6. Будочкина, С. А. О представлении одного операторного уравнения с первой производной по времени в форме Bu-гамильтонова уравнения / С. А. Будочкина // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 175–185.

7. Budochkina, S. A. On the potentiality of a class of operator relative to local bilinear forms / S. A. Budochkina, E. S. Dekhanova // Ural Mathematical Journal. — 2021. — V. 7, № 1. — P. 26–37.

8. Будочкина, С. А. О Bu-гамильтоновых уравнениях в механике систем с бесконечным числом степеней свободы / С. А. Будочкина, В. М. Савчин // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 439, № 4. — С. 583–584.

9. Budochkina, S. A. On direct variational formulations for second order evolutionary equations / S. A. Budochkina, V. M. Savchin // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — V. 3, № 4. — P. 23–34.

10. Савчин, В. М. О структуре вариационного уравнения эволюционного типа со второй производной по t / В. М. Савчин, С. А. Будочкина // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 1. — С. 118–124.

11. Савчин, В. М. О существовании вариационного принципа для операторного уравнения со второй производной по "времени" / В. М. Савчин, С. А. Будочкина // Математические заметки. — 2006. — Т. 80, № 1, С. 87–94.

12. Budochkina, S. A. On indirect variational formulations for operator equations / S. A. Budochkina, V. M. Savchin // Journal of Function Spaces and Applications. — 2007. — V. 5, № 3. — P. 231–242.

13. Попов, А. М. Условия потенциальности дифференциально-разностных уравнений / А. М. Попов // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 3. — С. 422–424.

14. Tleubergenov, M. I. On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion / M. I. Tleubergenov, G. T. Ibraeva // Eurasian Mathematical Journal. — 2019. — V. 10, № 2. — P. 93–102.

15. Tonti, E. Variational formulation for every nonlinear problem / E. Tonti // International Journal of Engineering Science. — 1984. — V. 22, № 11–12. — P. 1343–1371.

16. Остроградский, М. В. Полное собрание трудов. В 3 т. Т. 2 / М. В. Остроградский. — Киев, 1961. — 360 с.

17. Савчин, В. М. Метод Остроградского и обратные задачи механики: автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 / Савчин Владимир Михайлович; УДН им. П.Лумумбы. — Москва, 1984. — 125 с.

REFERENCES

1. Savchin V.M. Mathematical methods of mechanics of infinite-dimensional non-potential systems. [Savchin V.M. Matematicheskie metody mekhaniki beskonechnomernyh nepotencial'nyh sistem]. Moskva: Izd-vo UDN, 1991, 237 p.

2. Galiullin A.S. Analytical dynamics: textbook for university students. [Galiullin A.S. Analiticheskaya dinamika: ucheb. posobie dlya studentov vuzov]. Moskva: Izd-vo Ros. un-ta druzhby narodov, 1998, 441 p.

3. Kozlov V.V. Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics. [Kozlov V.V. Integriruemost' i neintegriruemost' v gamil'tonovoj mekhanike]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1983, vol. 38, iss. 1(229), pp. 3–67.

4. Kozlov V.V. Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics. [Kozlov V.V. Simmetrii, topologiya i rezonansy v gamil'tonovoj mekhanike]. Izhevsk: Udmurtskij gos. universitet, 1995.

5. Filippov V.M., Savchin V.M., Shorokhov S.G. Variational principles for nonpotential operators. [Filippov V.M., Savchin V.M., Shorokhov S.G. Variacionnye principy dlya nepotencial'nyh operatorov]. *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovr. probl. matem. Nov. dostizh — Results of science and technology. Series: Modern problems of mathematics. Latest achievements*, 1992, vol. 40, pp. 3–176.

6. Budochkina S.A. On a representation of an operator equation with first time derivative in the form of a Bu-Hamiltonian equation. [Budochkina S.A. O predstavlenii odnogo operatornogo uravneniya s pervoj proizvodnoj po vremeni v forme Bu-gamil'tonova uravneniya]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 175–185.

7. Budochkina S.A., Dekhanova E.S. On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms. Ural Mathematical Journal, 2021, vol. 7, iss. 1, pp. 26–37.

8. Budochkina S.A., Savchin V.M. On Bu-Hamiltonian equations in mechanics of infinite-dimensional systems. [Budochkina S.A., Savchin V.M. O Bu-gamil'tonovyh uravneniyah v mekhanike sistem s beskonechnym chislom stepenej svobody]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2011, vol. 439, no. 4, pp. 583–584.

9. Budochkina S.A., Savchin V.M. On direct variational formulations for second order evolutionary equations. Eurasian Mathematical Journal, 2012, vol. 3, iss. 4, pp. 23–34.

10. Savchin V.M., Budochkina S.A. On the structure of a variational equation of evolution type with the second t-derivative. [Savchin V.M., Budochkina S.A. O strukture variacionnogo uravneniya evolyucionnogo tipa so vtoroj proizvodnoj po t]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 118–124.

11. Savchin V.M., Budochkina S.A. On the existence of a variational principle for an operator equation with the second derivative with respect to "time". [Savchin V.M., Budochkina S.A. O sushchestvovanii variacionnogo principa dlya operatornogo uravneniya so vtoroj proizvodnoj po "vremeni"]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2006, vol. 80, no. 1, pp. 87–94.

12. Budochkina S.A., Savchin V.M. On indirect variational formulations for operator equations. Journal of Function Spaces and Applications, 2007, vol. 5, iss. 3, pp. 231–242.

13. Popov A.M. Potentiality conditions for differential-difference equations. [Popov A.M. Usloviya potencial'nosti differencial'no-raznostnyh uravnenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 422–424.

14. Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion. Eurasian Mathematical Journal, 2019, vol. 10, iss. 2, pp. 93–102.

15. Tonti E. Variational formulation for every nonlinear problem. International Journal of Engineering Science, 1984, vol. 22, iss. 11–12, pp. 1343–1371.

16. Ostrogradsky M.V. Complete Works. V. 3, vol. 2. [Ostrogradskij M.V. Polnoe sobranie trudov V 3 t. T. 2]. Kiev, 1961, 360 p.

17. Savchin V.M. Ostrogradsky method and inverse problems of mechanics. abstract dis. ... cand. Phys.-Math. Sciences: 01.02.01. [Savchin V.M. Metod Ostrogradskogo i obratnye zadachi mekhaniki: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.02.01]. UDN im. P. Lumumby, Moskva, 1984, 125 p.

Будочкина Светлана Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент Математического института им. С. М. Никольского Российского университета дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: budochkina-sa@rudn.ru

Budochkina Svetlana Aleksandrovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, S. M. Nikol'skii Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: budochkina-sa@rudn.ru

Лыу Тхи Хуен, аспирант Математического института им. С. М. Никольского Российского университета дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: luuthihuyen250393@gmail.com

Luu Thi Huyen, postgraduate student, S. M. Nikol'skii Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: luuthihuyen250393@gmail.com