

ТОЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ ЗВУКА УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ С ЖИДКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ*

С. Л. Ильменков¹, С. А. Переселков², П. В. Рыбьянец²

¹ – Санкт-Петербургский государственный морской технический университет;
² – Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 02.09.2023 г.

Аннотация. Рассмотрены результаты строгого решения задачи рассеяния звука на бесконечной изотропной цилиндрической оболочке с заполнением, находящейся в безграничной жидкой среде. Решение получено в рамках динамической теории упругости с использованием уравнения движения Ламе для изотропной среды, а также разложений упругих потенциалов и звуковых давлений по фундаментальным решениям уравнения Гельмгольца в круговой цилиндрической системе координат. Граничные условия относительно напряжений и смещений формулируются для каждой из поверхностей контакта оболочки с внешней и внутренней средами. На основании этого получены системы алгебраических уравнений, позволяющих рассчитать значения рассеянного звукового давления. Вычислены и проанализированы угловые диаграммы и частотные характеристики рассеяния стационарного звукового сигнала для различных вариантов заполнения цилиндрической оболочки.

Ключевые слова: изотропная цилиндрическая оболочка, уравнение движения Ламе, граничные условия, характеристики рассеяния звука, газообразное и жидкое заполнение.

EXACT CALCULATION METHOD SOUND SCATTERING CHARACTERISTICS OF AN ELASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH LIQUID FILLING

S. L. Ilmenkov, S. A. Pereselkov, P. V. Rybyanets

Abstract. The results of a rigorous solution of the sound scattering problem on an infinite isotropic cylindrical shell with filling located in an infinite liquid medium are considered. The solution they obtained within the framework of the dynamic theory of elasticity using the Lamé equation of motion for an isotropic medium, as well as the differences of elastic potentials and sound pressures according to the fundamental solutions of the Helmholtz equation in a circular cylindrical coordinate system. Boundary conditions with respect to stresses and displacements we formulated for each of the shell contact surfaces with external and internal media. Based on this, systems of algebraic equations they obtained that allow calculating the values of the scattered sound pressure. Angular diagrams and frequency characteristics of scattering of a stationary sound signal for various filling options of a cylindrical shell are calculated and analyzed.

Keywords: isotropic cylindrical shell, Lamé equation of motion, boundary conditions, sound scattering characteristics, gaseous and liquid filling.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, <https://rscf.ru/project/23-61-10024/>

© Ильменков С. Л., Переселков С. А., Рыбьянец П. В., 2023

1. ВВЕДЕНИЕ

При оценке влияния параметров подводных аппаратов на их гидроакустические характеристики значительное внимание уделяется тонким упругим цилиндрическим оболочкам, как одному из основных элементов их конструкций [1–7]. Особый интерес представляет определение характеристик отражения звука в диапазонах низких и средних звуковых частот, где параметры таких оболочек в наибольшей степени влияют на возможность обнаружения и идентификации конкретных объектов гидроакустическими средствами.

Рассмотрим строгое решение задачи рассеяния стационарного звукового сигнала упругой бесконечной цилиндрической оболочкой, заполненной вакуумом, газом или жидкостью [5–7].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На основе принципов динамической теории упругости рассмотрим решение задачи о рассеянии гармонического звукового сигнала цилиндрической изотропной оболочкой, находящейся в безграничной жидкой среде [1-3,11].

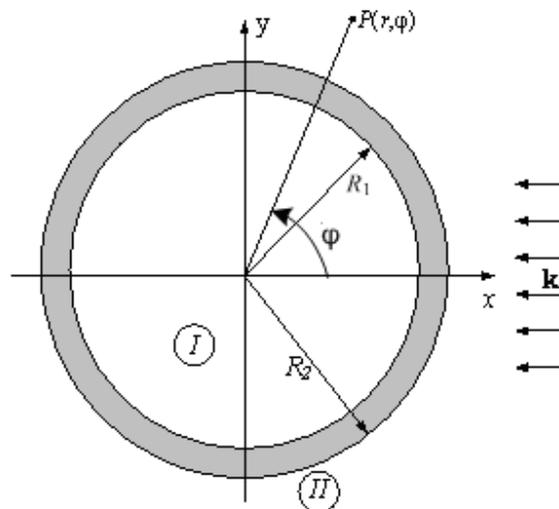


Рис. 1. Цилиндрическая изотропная оболочка в поле падающей плоской звуковой волны.

Пусть на рассматриваемую оболочку падает плоская звуковая волна единичной амплитуды и частоты ω ($\omega = 2\pi f$, f — частота сигнала в Гц) таким образом, что волновой вектор \mathbf{k} падающей волны перпендикулярен оси z оболочки (плоская задача, рисунок 1). Физические свойства материала оболочки описываются плотностью ρ и упругими постоянными Ламе λ , μ , где $\lambda = vE/(1+v)(1-2v)$; $\mu = E/2(1+v)$; E , v — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки соответственно.

Для внутренней области I рассматриваются различные варианты заполнения (вакуум, газ, жидкость), наружная область II — внешняя жидкая среда, характеризующаяся плотностью ρ_0 , скоростью звука c_0 и звуковыми давлениями в падающей волне p_i и рассеянной (отражённой) волне p_s , R_1 и R_2 — внутренний и наружный радиусы оболочки.

Поведение изотропного тела в рамках динамической теории упругости описывается системой уравнений движения (динамического равновесия) элементарного объема среды [4, 5, 12]. Использование закона Гука позволяет исключить из этих уравнений напряжения и перейти к одной неизвестной векторной функции — вектору смещения $\mathbf{u}(u_r, u_\varphi, u_z)$, имеющему три

компоненты, каждая из которых зависит от трех координат: r , φ , z . Преобразованные таким образом уравнения движения приводят к уравнению Ламе для изотропной среды при гармонической зависимости от времени:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = -\omega^2 \rho \mathbf{u}. \quad (1)$$

Используем известное представление для вектора смещения \mathbf{u} упругой среды:

$$\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \Psi, \quad (2)$$

где Φ — скалярный потенциал, характеризующий смещения, вызванные изменением объема; Ψ — векторный потенциал, описывающий смещения вихревого типа.

Подстановка (2) в (1) позволяет получить два уравнения Гельмгольца: скалярное для Φ и векторное — для Ψ :

$$\Delta \Phi + k_l^2 \Phi = 0, \quad (3)$$

$$\Delta \Psi + k_t^2 \Psi = 0, \quad (4)$$

где $k_l^2 = \omega/c_l$, $k_t^2 = \omega/c_t$ — волновые числа, скорости соответственно продольной и поперечной волн в упругой среде.

Выражения для компонент вектора смещения u_r , u_φ , u_z можно получить на основе (2) путем применения к (1) дифференциальных операторов rot и grad и формул их преобразования в цилиндрические координаты [6–8, 10, 16]:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial z}; \\ u_\varphi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}; \\ u_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \Psi_\varphi + \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

В рамках плоской постановки данной задачи переменные в уравнениях (3), (4) разделяются и все векторные потенциалы будут иметь только одну компоненту, отличную от нуля, а именно, Ψ_z , которую можно обозначить как Ψ .

Граничные условия относительно напряжений и смещений формулируются для каждой из поверхностей контакта. Для изотропной среды, в которой выполняется закон Гука, инвариантный к выбору системы координат, напряжения выражаются через постоянные Ламе и деформации. При малых деформациях в системе круговых цилиндрических координат данные компоненты деформации представляются через компоненты вектора смещения и принимают окончательный вид в зависимости от рассматриваемого варианта заполнения оболочки.

Рассмотрим первоначально полую оболочку: внутренняя область I — вакуум (волновые процессы отсутствуют).

Упругие потенциалы и звуковые давления раскладываются по фундаментальным решениям уравнения Гельмгольца в круговой цилиндрической системе координат [6, 11, 17]:

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} [B_m J_m(k_l r) + C_m N_m(k_l r)] \cos m\varphi; \quad (6)$$

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} [D_m J_m(k_t r) + F_m N_m(k_t r)] \sin m\varphi; \quad (7)$$

$$p_i = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m J_m(kr) \cos m\varphi; \quad (8)$$

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(kr) \cos m\varphi. \quad (9)$$

где $k = \omega/c_0$ — волновое число звуковой волны во внешней жидкой среде; $\varepsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\varepsilon_m = 2$ ($m \neq 0$); A_m, B_m, C_m, D_m, F_m — неизвестные коэффициенты, которые находятся из граничных условий: отсутствие нормального напряжения на границе вакуума и упругого слоя ($r = R_1$); на внешней границе упругого слоя и жидкой среды ($r = R_2$) отсутствуют касательные напряжения в упругом слое; нормальные компоненты смещения непрерывны; нормальное напряжение в упругом слое равно суммарному (дифрагированному) давлению в жидкой среде ($p_\Omega = p_i + p_s$):

$$\lambda k_i^2 \Phi + 2\mu \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - r^{-2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + r^{-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \varphi} \right) = 0 \Big|_{r=R_1}, \quad (10)$$

$$\mu \left(-2r^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} + 2r^{-2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - k_i^2 \Psi - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) = 0 \Bigg|_{\substack{r = R_1 \\ r = R_2}}, \quad (11)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + r^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \omega^2 \rho_0^{-1} \left(\frac{\partial p_i}{\partial r} + \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_2}, \quad (12)$$

$$\lambda k_i^2 \Phi + 2\mu \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - r^{-2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + r^{-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \varphi} \right) = p_i + p_s \Big|_{r=R_2}. \quad (13)$$

Подстановка разложений (6)–(9) в граничные условия (10)–(13) с использованием свойства ортогональности тригонометрических функций ($\cos m\varphi$) и ($\sin m\varphi$) позволяет получить для каждой моды m алгебраическую систему 5-го порядка для нахождения неизвестных коэффициентов разложения с фиксированным индексом. Для нахождения рассеянного давления p_s необходимо определить коэффициенты A_m , входящие в выражение (9). С использованием асимптотики для цилиндрических функций Ханкеля 1-го рода $H_m^{(1)}(kr)$ из (9) получим соотношение для угловой характеристики рассеяния $D(\varphi)$:

$$D(\varphi) = -\exp(-i\pi/4)(\pi k)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m A_m \cos m\varphi. \quad (14)$$

Коэффициенты A_m определяются из решения системы по правилу Крамера, после чего на основании (14) рассчитываются значения $|D(\varphi)$.

Перейдем к рассмотрению оболочки с жидким наполнителем. Внутренняя область I — жидкая среда или газ с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1 . Звуковое давление внутри оболочки p_1 представляется рядом:

$$p_1 = \sum_{m=0}^{\infty} G_m J_m(k_1 r) \cos m\varphi; \quad (15)$$

где G_m — неизвестные коэффициенты разложения; $k_1 = \omega/c_1$.

Соответственно изменяются граничные условия (10)–(13). В правой части граничного условия (10) появится давление p_1 , а также вводится дополнительное граничное условие (16) о непрерывности нормальных компонент вектора смещения на внутренней границе упругого слоя и жидкой среды:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + r^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \omega^2 \rho_1^{-1} \frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1}. \quad (16)$$

Подставляя разложения (6)–(9), (15) в скорректированные граничные условия и опять используя ортогональность тригонометрических функций ($\cos m\varphi$) и ($\sin m\varphi$), получим для каждой моды m алгебраическую систему 6-го порядка для нахождения неизвестных коэффициентов разложения $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, G_m$. Из решения этой системы определяются коэффициенты A_m , необходимые для расчета $|D(\varphi)|$.

3. РАСЧЕТ УГЛОВЫХ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ

В соответствии с приведенными выше соотношениями на основе разработанного программного обеспечения в среде Matlab [9] были выполнены расчеты угловых характеристик рассеяния звука $|D(\varphi)|$ в диапазоне углов наблюдения $\varphi = 0^\circ \div 360^\circ$ и частотных зависимостей $|D(0^\circ)|$ в диапазоне волновых радиусов $kR_1 = 0,95 \div 30,0$ при следующих физических параметрах оболочки и сред:

- 1) оболочка – сталь: $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\lambda = 2 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$; $\mu = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$; $c_l = 5940 \text{ м/с}$; $c_t = 3220 \text{ м/с}$;
- 2) внутренняя область I – воздух: $\rho_1 = 1,2 \text{ кг/м}^3$; $c_1 = 340 \text{ м/с}$ или вода: $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$; $c_1 = 1500 \text{ м/с}$;
- 3) наружная область II – вода.

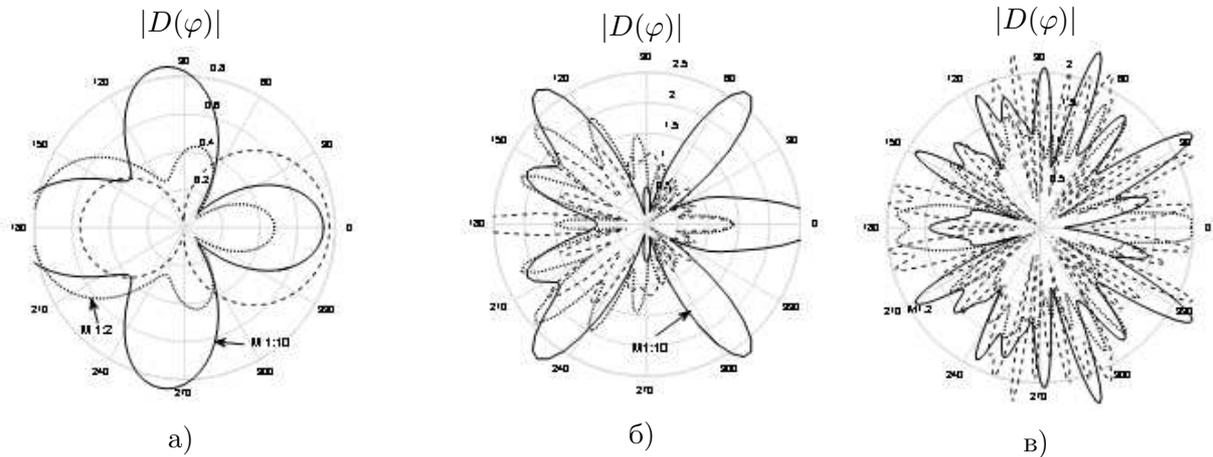


Рис. 2. Модули угловых характеристик рассеяния $|D(\varphi)|$ при $h = 0,002$.

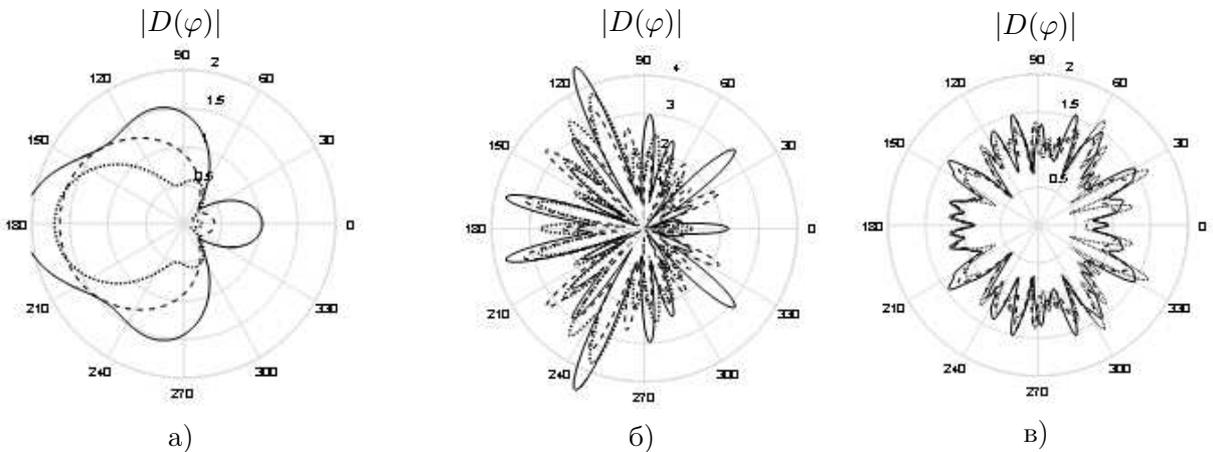


Рис. 3. Модули угловых характеристик рассеяния $|D(\varphi)|$ при $h = 0,02$.

Введем следующие обозначения: $h = (R_2 - R_1)/R_1$ — относительная толщина оболочки; kh — волновая толщина оболочки.

Рассмотрим основные результаты расчетов. Так, на рисунках 2 и 3 представлены модули угловых характеристик рассеяния оболочки $|D(\varphi)|$ при $kR_1 = 3,0$ (а); $kR_1 = 10,0$ (б); $kR_1 = 30,0$ (в) и $h = 0,002; 0,02$. Соответственно, значения kh составляют: 0,0012; 0,006; 0,012 (Рис. 2), 0,012; 0,06; 0,12 (Рис. 3). Направление падающей плоской звуковой волны соответствует $\varphi = 0^0$.

Варианты заполнения оболочки обозначены как: воздух (пунктирная линия); вода (штриховая линия); вакуум (сплошная линия).

Как следует из представленных результатов, уровни сигнала, рассеянного поллой оболочкой, превышают уровни сигналов при других вариантах заполнения в среднем на 3-20 дБ в зависимости от значений φ и kR_1 . Кроме того, для поллой оболочки рассеяние в поперечных направлениях соизмеримо с рассеянием в теневой области, а для случаев газового и жидкого заполнения преобладает акустически “мягкий” тип рассеяния.

При $kh = 0,01 - 0,02$ (см. Рис. 2,в и 3,б) превышения уровней рассеянного сигнала для поллой оболочки по сравнению с другими вариантами заполнения не превосходят 1-3 дБ. В диапазоне $kh = 0,02 - 0,04$ это превышение составляет 5%-10%, а при дальнейшем росте волновой толщины эта величина уменьшается до 3%-5% (см. Рис. 3,в). Отмеченная тенденция может объясняться увеличением жесткости и уменьшением деформируемости заполненных оболочек. Для жидкого заполнения, кроме того, можно отметить и влияние присоединенной массы внутренней жидкости, соответствующего определенному возрастанию толщины оболочки.

Более детальное представление о влиянии типа заполнителя на величину рассеянного сигнала позволяют получить частотные зависимости уровней модулей обратного рассеяния $20 \lg |D(0^0)|$, дБ, представленные на рис. 4-6. Обозначения линий соответствуют рис. 2, 3.

Приведенные частотные зависимости показывают, что формирование упругих резонансов происходит, в основном при $kR_1 > 4$, пространственные резонансы совпадения в некоторых случаях проявляются и при $kR_1 = 2; 3$.

Результаты также позволяют проанализировать физические явления, связанные с возникновением периферических (поверхностных) волн, которые могут распространяться как в виде волн типа Шолте-Стоунли в жидкости, так и в виде упругих волн типа Лэмба в материале оболочки [13, 15, 18]. При распространении таких волн по замкнутому контуру оболочки может укладываться целое число длин их полувольт и происходит согласование фаз в точке возбуждения, что приводит к резонансам амплитуд рассеянного сигнала. Вид полученных частотных зависимостей показывает, что для случая жидкого заполнителя вероятность таких фазовых согласований значительно выше.

Для поллой оболочки резонансы волн типа Шолте-Стоунли могут проявляться, например, при $kR_1 = 7,5; 10; 14, 20$ и т. д., резонансы упругих волн типа Лэмба — в диапазонах $kR_1 = 7 - 9; 14 - 17$ и т. д. Наличие жидкого заполнителя понижает значения резонансных частот — соответственно до $kR_1 = 4; 7,5$ и т. д., и способствует большей изрезанности частотных зависимостей, одной из возможных причин которой можно считать формирование во внутренней области I рефрагированных волн. В диапазоне $h \leq 0,002$ уровни отраженных сигналов с увеличением h в два раза уменьшаются в среднем на 3-6 дБ, особенно это заметно на резонансах; при $h \geq 0,01$ эти уровни определяются, главным образом, упругими свойствами материала стенки, влияние типа заполнителя при этом существенно снижается.

Для оболочки, заполненной водой или воздухом, различия в уровнях отраженных сигналов при изменении h проявляются практически лишь в диапазоне $kR_1 > 12 - 15$ и, в основном, заключаются в росте в среднем на 2-3 дБ при удвоении h (за исключением резонансов, вызванных согласованием фаз при $kR_1 \approx 15; 20, 25$, где такие различия могут возрастать до 10 дБ).

$20 \lg |D(0^0)|, \text{дБ}$

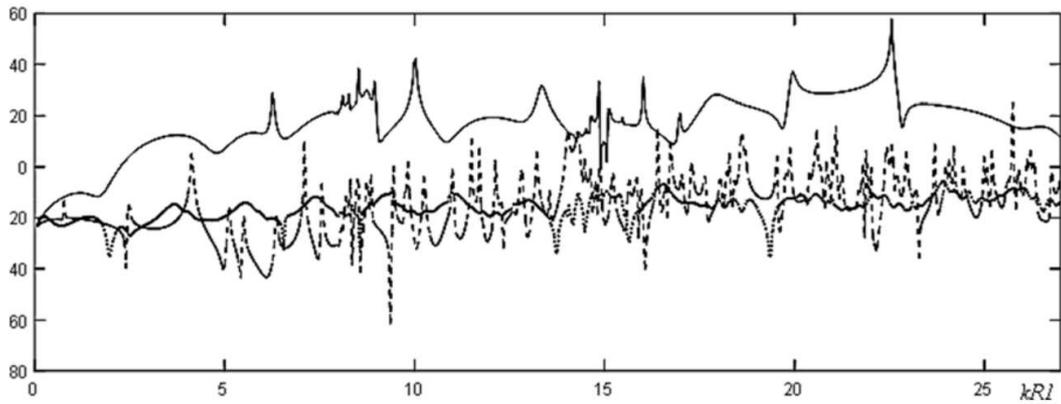


Рис. 4. Уровни модулей частотных зависимостей обратного рассеяния при $h = 0,0005$.
 $20 \lg |D(0^0)|, \text{дБ}$

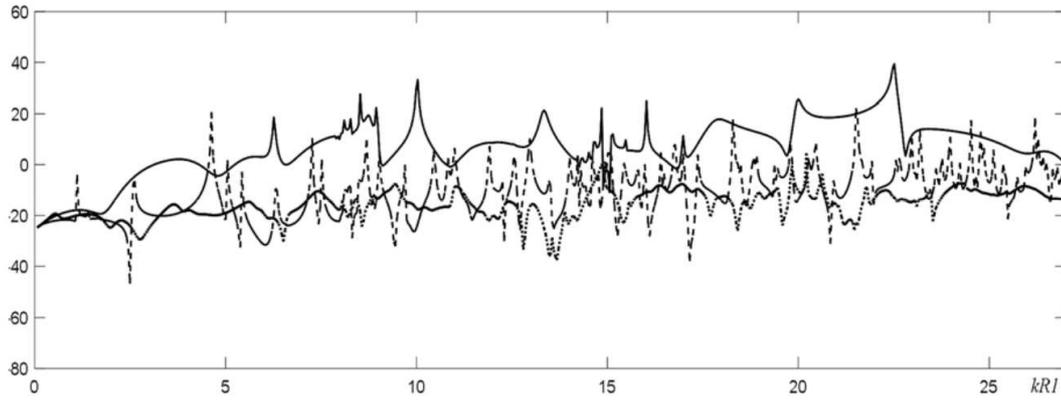


Рис. 5. Уровни модулей частотных зависимостей обратного рассеяния при $h = 0,002$.
 $20 \lg |D(0^0)|, \text{дБ}$

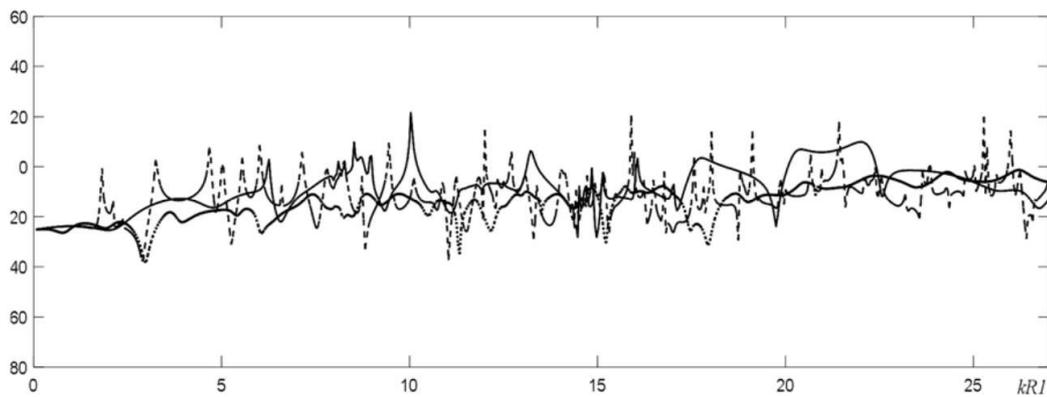


Рис. 6. Уровни модулей частотных зависимостей обратного рассеяния при $h = 0,01$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом выполненной работы является получение систем алгебраических уравнений для строгого решения задачи рассеяния звука изотропной цилиндрической оболочки с заполнителем. Решение базируется на основе принципов динамической теории упругости и сформулированных граничных условий на поверхностях контакта оболочки с внешней средой и заполнителем. Вычислены и проанализированы угловые диаграммы и частотные зависимости рассеяния стационарного звукового сигнала на рассматриваемой оболочке, находящейся в жидкости, при различных вариантах ее заполнения. Установлены диапазоны волновых размеров и относительных толщин оболочки, в которых наблюдается наиболее существенное влияние типа заполнителя на характеристики рассеяния звука. Отмечена возможная физическая природа резонансов амплитуд рассеянного сигнала при различных вариантах заполнения оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильменков, С. Л. Рассеяние стационарного звукового сигнала системой вязкоупругих цилиндрических слоев / С. Л. Ильменков // Сборник трудов Военно-морского политехнического института “Неделя военной науки”. — Санкт-Петербург : ВМПИ, 2016. — С. 228–233.
2. Ильменков, С. Л. Решение задачи рассеяния стационарного и импульсного звуковых сигналов на многослойной изотропной цилиндрической оболочке / С. Л. Ильменков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 28–38.
3. Ильменков, С. Л. Строгое решение задачи дифракции звука на системе упругих и вязкоупругих цилиндрических слоев / С. Л. Ильменков // Морские интеллектуальные технологии. — 2017. — Т. 1, № 1(35). — С. 60–66.
4. Клещев, А. А. Основы гидроакустики: монография / А. А. Клещев, И. И. Клюкин. — Ленинград : Судостроение, 1987. — 224 с.
5. Шендеров, Е. Л. Излучение и рассеяние звука: монография / Е. Л. Шендеров. — Ленинград : Судостроение, 1989. — 301 с.
6. Клещев, А. А. Гидроакустические рассеиватели: монография / А. А. Клещев. — Санкт-Петербург : Прима, 2011. — 267 с.
7. Клещев, А. А. Рассеяние звука упругой сжатой сфероидальной оболочкой / А. А. Клещев // Акустический журнал. — 1975. — Т. 24, № 6. — С. 938–940.
8. Kleshchev, A. A. Against phase velocities of elastic waves in thin transversely isotropic cylindrical shell / A. A. Kleshchev // Open Journal of Acoustics. — 2013. — V. 3, № 3. — P. 67–71.
9. Ильменков, С. Л. Расчет угловых и частотных характеристик рассеяния звука на системе упругих и вязкоупругих цилиндрических слоев: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / С. Л. Ильменков. — № 2017616815. — 2017.
10. Хенл, Х. Теория дифракции / Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестфаль. — М. : Мир, 1964.
11. Клещев, А. А. Гидроакустические рассеиватели / А. А. Клещев. — СПб. : Судостроение, 1992.
12. Клещев, А. А. Дифракция и распространение волн в упругих средах и телах / А. А. Клещев. — СПб. : Влас, 2002.
13. Клещев, А. А. Дифракция, излучение и распространение упругих волн / А. А. Клещев. — СПб. : Профпринт, 2006.
14. Ильменков, С. Л. Метод расчета фазовых скоростей трехмерных изгибных волн различных мод в изотропной цилиндрической оболочке, контактирующей с жидкостью / С. Л. Ильменков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 29–37.

15. Векслер, Н. Д. Выделение резонансов в задачах рассеяния акустических волн упругими оболочками / Н. Д. Векслер // Акустический журнал. — 1992. — Т. 38, № 3. — С. 421–426.
16. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики: монография / В. С. Владимиров. — Москва : Наука, 1976. — 512 с.
17. Ильменков, С. Л. Развитие методов решения граничных задач гидроакустики: монография / С. Л. Ильменков. — Санкт-Петербург : СПбГМТУ, 2020. — 190 с.
18. Ильменков, С. Л. Влияние заполнения цилиндрических оболочек на фазовые скорости трёхмерных изгибных волн / С. Л. Ильменков, А. А. Клещев // Сборник трудов XXII-й сессии Российского акустического общества. — Москва : ГЕОС, 2010. — Т. 4. — С. 239–242.

REFERENCES

1. Ilmenkov S.L. Scattering of a stationary sound signal by a system of viscoelastic cylindrical layers. [Ильменков С.Л. Рассеяние стационарного звукового сигнала системой вязкоупругих цилиндрических слоев]. Proceedings of the Naval Polytechnic Institute "Week of Military Science", St. Petersburg: VMPI, 2016, pp. 228–233.
2. Ilmenkov S.L. Solving the problem of scattering stationary and pulsed sound signals on a multilayer isotropic cylindrical shell. [Ильменков С.Л. Решение задачи рассеяния стационарного и импульсного звуковых сигналов на многослойной изотропной цилиндрической оболочке]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 28–38.
3. Ilmenkov S.L. Strict solution of the problem of sound diffraction on a system of elastic and viscoelastic cylindrical layers. [Ильменков С.Л. Строгое решение задачи дифракции звука на системе упругих и вязкоупругих цилиндрических слоев]. *Morskije intellektual'nye tekhnologii — Marine intellectual technologies*, 2017, vol. 1, no. 1(35), pp. 60–66.
4. Kleshchev A.A. Fundamentals of hydroacoustics. [Клещев А.А. Основы гидроакустики]. Leningrad: Shipbuilding, 1987, 224 p.
5. Shenderov E.L. Radiation and scattering of sound. [Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука]. Leningrad: Shipbuilding, 1989, 301 p.
6. Kleshchev A.A. Hydroacoustic diffusers. [Клещев А.А. Гидроакустические рассеиватели]. St. Petersburg: Prima, 2011, 267 p.
7. Kleshchev A.A. Sound scattering by an elastic compressed spheroidal shell. [Клещев А.А. Рассеяние звука упругой сжатой сферической оболочкой]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustic Journal*, 1975, vol. 24, no. 6, pp. 938–940.
8. Kleshchev A.A. Against phase velocities of elastic waves in thin transversely isotropic cylindrical shell. *Open Journal of Acoustics*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 67–71.
9. Ilmenkov S.L. Calculation of angular and frequency characteristics of sound scattering on a system of elastic and viscoelastic cylindrical layers. [Ильменков С.Л. Расчет угловых и частотных характеристик рассеяния звука на системе упругих и вязкоупругих цилиндрических слоев: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ]. Certificate of state registration of a computer program, no. 2017616815, 2017.
10. Henl H., Maue A., Westpfal K. Theory of diffraction. [Хенл Г., Мауэ А., Вестпфал К. Теория дифракции]. Moscow: Mir, 1964.
11. Kleshchev A.A. Hydroacoustic diffusers. [Клещев А.А. Гидроакустические рассеиватели]. Saint Petersburg: Shipbuilding, 1992.
12. Kleshchev A.A. Diffraction and propagation of waves in elastic media and materials. [Клещев А.А. Дифракция и распространение волн в упругих средах и телах]. St. Petersburg: Vlas, 2002.
13. Kleshchev A.A. Diffraction, radiation and propagation of elastic waves. [Клещев А.А. Дифракция, излучение и распространение упругих волн]. St. Petersburg: Profprint, 2006.

14. Ilmenkov S.L. Method for calculating phase velocities of three-dimensional bending waves of various modes in an isotropic cylindrical shell in contact with a liquid. [Ильменков С.Л. Метод расчета фазовых скоростей трехмерных изгибных волн различных мод в изотропной цилиндрической оболочке, контактирующей с жидкостью]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 29–37.

15. Veksler N.D. Isolation of resonances in problems of acoustic wave scattering by elastic shells. [Veksler N.D. Выделение резонансов в задачах рассеяния акустических волн упругими оболочками]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustic Journal*, 1992, vol. 38, no. 3, pp. 421–426.

16. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. [Vladimirov V.S. Уравнения математической физики]. Moscow: Nauka, 1976, 512 p.

17. Ilmenkov S.L. Development of methods for solving boundary problems of hydroacoustics. [Ильменков С.Л. Развитие методов решения граничных задач гидроакустики]. St. Petersburg: SPbGMTU, 2020, 190 p.

18. Ilmenkov S.L., Kleshev A.A. The effect of filling cylindrical shells on the phase velocities of three-dimensional bending waves. [Ильменков С.Л., Кleshchev A.A. Влияние заполнения цилиндрических оболочек на фазовые скорости трехмерных изгибных волн]. Proceedings of the XXII session of the Russian Acoustic Society, Moscow: GEOS, 2010, vol. 4, pp. 239–242.

Ильменков Сергей Львович, доктор технических наук, профессор кафедры судовой автоматизации и измерений, СПбГМТУ, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ilms@rambler.ru

Ilmenkov Sergey Lvovich, The Professor, Department of Marine Automation and Measurement, Saint-Petersburg State Marine Technical University, Saint-Petersburg, Russia
E-mail: ilms@rambler.ru

Переселков Сергей Алексеевич, доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математической физики и информационных технологий ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: pereselkov@yandex.ru

Pereselkov Sergey Alexeevich, Head of the Department of Mathematical Physics and Information Technology, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: pereselkov@yandex.ru

Рыбьянец Павел Викторович, аспирант кафедры математической физики и информационных технологий ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: pavel-rybjanec@rambler.ru
Тел.: +7(473)220-87-48

Rybyanets Pavel Viktorovich, Postgraduate Student, Department of Mathematical Physics and Information Technology, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: pavel-rybjanec@rambler.ru
Tel.: +7(473)220-87-48