УДК 530.145.3, 530.007

ЗАПУТАННОСТЬ В ЧИСТЫХ МНОГОКУБИТОВЫХ СИСТЕМАХ

А. В. Боева, А. Ф. Клинских

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Аннотация. В работе рассматривается явление запутывания кубитов в физических системах, находящихся в чистых состояниях. Получена формула для математического ожидания запутанности вектора состояния систем с произвольным числом кубитов. Найдены и проанализированы мгновенная и средняя запутанности для многокубитовых систем.

Ключевые слова: запутанные состояния, средняя запутанность, математическое ожидание запутанности, мгновенная запутанность, максимальная запутанность, состояния Белла, состояния Гринбергера–Хорна–Цайлингера.

ENTANGLEMENT IN PURE MULTIQUBIT SYSTEMS

A. V. Boeva, A. F. Klinskikh

Abstract. The paper considers the phenomenon of entanglement of qubits in physical systems in pure states. A formula is obtained for the mathematical expectation of the entanglement of the state vector of systems with an arbitrary number of qubits. Instantaneous and average entanglements for multi-qubit systems are found and analyzed.

Keywords: entangled states, average entanglement, mathematical expectation of entanglement, instantaneous entanglement, maximum entanglement, Bell states, Greenberger-Horne-Zeilinger states.

Квантовая запутанность — это мера квантовых корреляций, обусловленных квантовыми законами и свойствами систем [1–3]. Запутанность всей системы можно количественно описать, вычисляя для каждого кубита степень запутанности и усредняя затем по всем кубитам:

$$\tau\,(i)\; = 4\mathrm{det}(\rho_i), \tag{1}$$

где ρ_i представляет собой матрицу плотности i-го кубита, вычисленную путём взятия частичного следа по остальным кубитам. Примером запутанных состояний являются состояния Белла [1, 4]:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right). \tag{2}$$

Рассмотрим вектор состояния двухкубитовой системы:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T, \tag{3}$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию нормировки:

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 = 1. \tag{4}$$

Если система из двух кубитов запутана, то её вектор состояния не факторизуется:

$$x_0x_3 \neq x_1x_2. \tag{5}$$

Запишем матрицу плотности для системы (3):

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB\,AB}\langle\psi| = \begin{pmatrix} x_0x_0^* & x_0x_1^* & x_0x_2^* & x_0x_3^* \\ x_1x_0^* & x_1x_1^* & x_1x_2^* & x_1x_3^* \\ x_2x_0^* & x_2x_1^* & x_2x_2^* & x_2x_3^* \\ x_3x_0^* & x_3x_1^* & x_3x_2^* & x_3x_3^* \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Для нахождения запутанности кубита A выполняем свёртку матрицы плотности по переменной кубита B:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes I_{2B}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes I_{2B}. \tag{7}$$

$$\rho_B = B_0^T \rho B_0 + B_1^T \rho B_1 = \begin{pmatrix} x_0x_0^* + x_2x_2^* & x_0x_1^* + x_2x_3^* \\ x_1x_0^* + x_3x_2^* & x_1x_1^* + x_3x_3^* \end{pmatrix}. \tag{8}$$

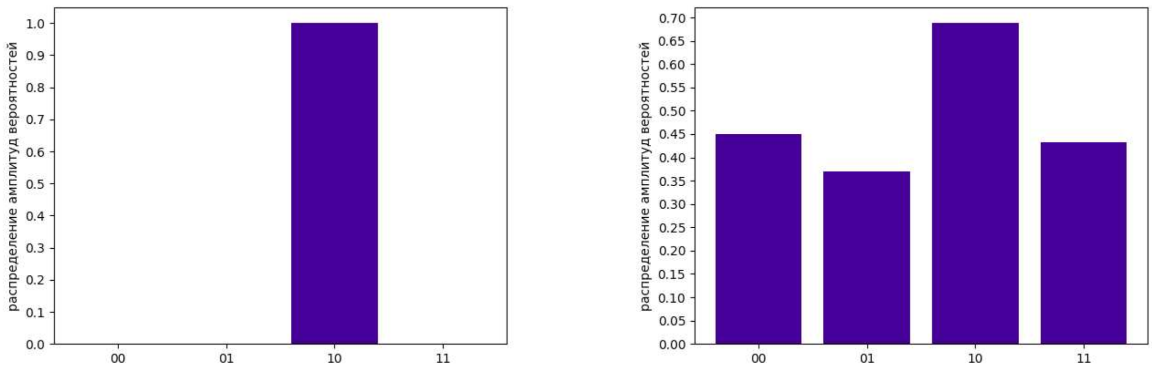

Рис. 1. *Распределение амплитуд вероятностей по состояниям.*

Среднюю по состоянию запутанность двухкубитовой системы можно вычислить по формуле [5]:

$$\tau = 4\,\det(\rho_A). \tag{9}$$

Для анализа запутанности двухкубитовой системы переходят в базис Белла. На рисунке 1(а,б) видно, что в случае, когда система максимально запутана, вклад даёт только один из столбцов, а в случае произвольно запутанной системы 4 столбца амплитуд ненулевые.

Среднюю запутанность по ансамблю можно вычислить с помощью меры Хаара [5]:

$$< \tau >= 4 \int\limits_{\Omega} det(\rho_A) d\Omega, \tag{10}$$

где $d\Omega = \frac{1}{(2\pi)^4} d\varphi_0 d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\sin^6\theta_0 d\sin^4\theta_1 d\sin^2\theta_2, 0 \leqslant \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 < 2\pi, 0 \leqslant \theta_0, \theta_1, \theta_2 < \pi/2$.

Для вычисления средней запутанности по ансамблю берётся вектор состояния в общем виде (1), где:

$$x_0 = e^{i\varphi_0}\cos\theta_0, \qquad x_1 = e^{i\varphi_1}\sin\theta_0\cos\theta_1, \qquad x_2 = e^{i\varphi_2}\sin\theta_0\sin\theta_1\cos\theta_2,$$

$$x_3 = e^{i\varphi_3}\sin\theta_0\sin\theta_1\sin\theta_2. \tag{11}$$

Для двухкубитовой системы, находящейся в состоянии с волновым вектором (3), значение средней запутанности $< \tau >$ составляет 0.4.

СРЕДНЯЯ ЗАПУТАННОСТЬ СОСТОЯНИЙ МНОГОКУБИТОВЫХ СИСТЕМ

Пусть многокубитовая система находится в состоянии, описываемом вектором состояния в гильбертовом пространстве $|\Psi>_N$. Тогда матрица плотности для этой системы:

$$\rho_N = |\Psi>_{N\,N}<\Psi|. \tag{12}$$

Матрицу плотности для первого кубита системы рассчитаем, выполнив свёртку по остальным кубитам:

$$\rho_A = tr_{N-1}(\rho_N). \tag{13}$$

Отсюда можно найти величину запутаности для кубита A:

$$4\,det\rho_A = \tau_\Psi. \tag{14}$$

В силу симметрии систем средняя запутанность по ансамблю будет равна запутанности, вычисленной для первого кубита и усредненной по всем системам:

$$<\tau>=<\tau_\Psi>. \tag{15}$$

Среднюю запутанность по ансамблю можно найти, проинтегрировав определитель матрицы плотности ρ_A по мере $d\Omega$:

$$<\tau>= 4\int\limits_\Omega det(\rho_A)d\Omega, \tag{16}$$

где $d\Omega = \frac{1}{(2\pi)^{2^n}}\Pi_{i=0}^{2^n-1}d\varphi_i\Pi_{j=0}^{2^n-2}d\sin^{2^{n+1}-2-2j}(\theta_j)$.

Таблица 1. *Математическое ожидание запутанности.*

n, число кубитов	математическое ожидание запутанности
1	0
2	$\frac{2}{5}$
3	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{14}{17}$
...	...
∞	1

В таблице 1 приведены результаты расчётов средней запутанности $<\tau>$ для многокубитовых систем. Подробности расчётов приведены в приложении.

Для n-кубитовой системы запутанность определяется по формуле:

$$<\tau>= \frac{2^n-2}{2^n+1}. \tag{17}$$

Это основной результат работы. В приложении получена формула (17).

МОДЕЛИРОВАНИЕ

Найдём среднюю запутанность в результате моделирования системы из n кубитов в произвольном чистом состоянии, параметры которого выбираются случайно.

В среде программирования Python зададим N случайных векторов, для каждого из них найдём матрицу плотности одного кубита и вычислим среднюю запутанность по ансамблю. Результат расчётов для 1000 кубитов показан ниже на графике.

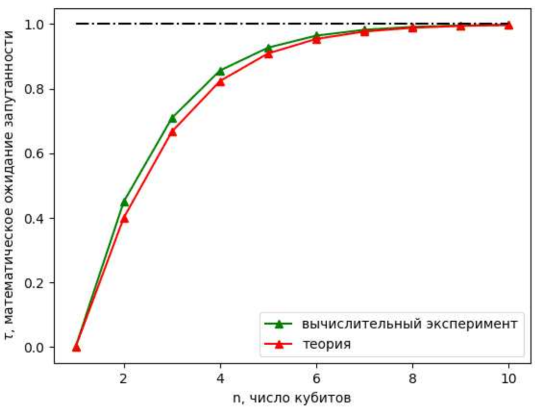

Рис. 2. *Теория и вычислительный эксперимент.*

На рисунке 1 видно, что значение средней запутанности близко к предсказанному, при усреднении по большему числу систем точность будет выше. Случайные векторы можно сгенерировать с помощью квантового процессора, что позволит минимизировать отклонения от теоретических расчётов.

МГНОВЕННАЯ ЗАПУТАННОСТЬ СОСТОЯНИЙ МНОГОКУБИТОВЫХ СИСТЕМ

Для одного кубита n-кубитовой системы можно найти значение мгновенной запутанности:

$$\tau = 4\sum_{i=0}^{2^{n-1}-2}\sum_{j=i+1}^{2^{n-1}-1}\begin{vmatrix} x_{2i} & x_{2i+1} \\ x_{2j} & x_{2j+1} \end{vmatrix}^2. \tag{18}$$

Для двухкубитовой системы формула (18) принимает простой вид:

$$\tau = 4\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}^2. \tag{19}$$

Отсюда видно, что двухкубитовая система незапутана, если выполняется условие:

$$x_0x_3 = x_1x_2. \tag{20}$$

По свойству транзитивности запутанности в случае двухкубитовой системы мгновенная запутанность равна средней.

Рассмотрим состояния Белла [6]:

$$|\Phi^+> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00> + |11>),\ |\Phi^-> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00> - |11>),$$

$$|\Psi^+> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01> + |10>),\ |\Psi^-> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01> - |10>). \tag{21}$$

По формуле (19) получаем, что запутанность этих состояний равна единице. Далее рассмотрим произвольную трёхкубитовую систему:

$$|\Psi>_{ABC} =$$

$= x_0|000> + x_1|001> + x_2|010> + x_3|011> + x_4|100> + x_5|101> + x_6|110> + x_7|111>.$

Найдём необходимую систему условий, при выполнении которых кубит C не запутан:

$$x_0x_3 = x_1x_2, \quad x_0x_5 = x_1x_4, \quad x_0x_7 = x_1x_6, \quad x_2x_5 = x_3x_4, \quad x_2x_7 = x_3x_6, \quad x_4x_7 = x_5x_6. \tag{22}$$

Для трёхкубитовой системы формула (18) принимает вид:

$$\tau = 4(\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_6 & x_7 \end{vmatrix}^2 +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_6 & x_7 \end{vmatrix}^2 +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 \end{vmatrix}^2). \tag{23}$$

Чтобы стал более понятен смысл этой формулы, поясним на примерах:

$$|\Psi>_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000> + |001> + |110>). \tag{24}$$

Значения амплитуд системы равны:

$$x_0 = x_1 = x_6 = 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 0. \tag{25}$$

Подставляя эти значения в формулу (23), получаем, что мгновенная запутанность последнего кубита этой системы равна $4/9$.

Рассмотрим произвольную систему, в которой последний кубит незапутан:

$$|\Psi>_{ABC} = (a_0|00> + a_1|01> + a_2|10> + a_3|11>)(b_0|0> + b_1|1>), \tag{26}$$

Вещественные числа a_0,a_1,...b_1 удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{1}|a_ib_j|^2 = 1. \tag{27}$$

Тогда по формуле (23) найдём мгновенную запутанность последнего кубита:

$$\tau = 4(|a_0a_1b_0b_1 - a_0a_1b_0b_1|^2 + |a_0a_2b_0b_1 - a_0a_2b_0b_1|^2 + |a_0a_3b_0b_1 - a_0a_3b_0b_1|^2 +$$
$$+ |a_1a_2b_0b_1 - a_1a_2b_0b_1|^2 + |a_1a_3b_0b_1 - a_1a_3b_0b_1|^2 + |a_2a_3b_0b_1 - a_2a_3b_0b_1|^2) = 0. \tag{28}$$

Для состояний Гринберга-Хорна-Цайлингера [1, 6] мгновенная запутанность равна единице

$$\tau = 4(\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_6 & x_7 \end{vmatrix}^2 +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_8 & x_9 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_{10} & x_{11} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_{12} & x_{13} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_{14} & x_{15} \end{vmatrix}^2 +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_6 & x_7 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_8 & x_9 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_{10} & x_{11} \end{vmatrix}^2 +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_{12} & x_{13} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_{14} & x_{15} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 \end{vmatrix}^2 +$$

$$+\begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ x_8 & x_9 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ x_{10} & x_{11} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ x_{12} & x_{13} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ x_{14} & x_{15} \end{vmatrix}^2+$$

$$+\begin{vmatrix} x_6 & x_7 \\ x_8 & x_9 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_6 & x_7 \\ x_{10} & x_{11} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_6 & x_7 \\ x_{12} & x_{13} \end{vmatrix}^2+$$

$$\begin{vmatrix} x_6 & x_7 \\ x_{14} & x_{15} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_8 & x_9 \\ x_{10} & x_{11} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_8 & x_9 \\ x_{12} & x_{13} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_8 & x_9 \\ x_{14} & x_{15} \end{vmatrix}^2+$$

$$+\begin{vmatrix} x_{10} & x_{11} \\ x_{12} & x_{13} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_{10} & x_{11} \\ x_{14} & x_{15} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{14} & x_{15} \end{vmatrix}^2\Bigg). \tag{29}$$

Выше представлена формула мгновенной запутанности для четырёхкубитовой квантовой системы. Пусть система из четырёх кубитов находится в состоянии, которому отвечает волновой вектор:

$$|\Psi>_{ABCD}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|0>+|1>)(|0>+|1>)(|00>+|11>)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|0000>+|0011>+|0100>+|0111>+|1000>+|1011>+|1100>+|1111>). \tag{30}$$

Ненулевые коэффициенты этой системы равны:

$$x_0=x_3=x_4=x_7=x_8=x_{11}=x_{12}=x_{15}=\frac{1}{2\sqrt{2}}. \tag{31}$$

Подставив значения в формулу (29), найдём мгновенную запутанность кубита D системы:

$$\tau=4\cdot 16\cdot\frac{1}{64}=1.$$

Отсюда становится качественно понятно, почему при увеличении числа кубитов средняя запутанность стремится к единице. Если кубит максимально запутан хотя бы с одним из оставшихся кубитов, мгновенная запутанность равна единице, соответственно, чем больше кубитов в системе, тем больше вероятность, что рассматриваемый кубит максимально запутан с каким-либо другим кубитом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Запутанность чистых состояний квантовой системы может быть количественно охарактеризована математическим ожиданием запутанности (средней запутанностью квантовой системы). Математическое ожидание запутанности равно нулю, когда вектор состояния системы можно факторизовать на количество векторов состояния в гильбертовом пространстве, соответствующее числу кубитов в системе. С увеличением количества кубитов средняя запутанность стремится к единице. Полученные результаты могут быть использованы в квантовой криптографии, квантовых вычислениях и при моделировании квантовых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нильсен, М. Квантовые вычисления и квантовая информация / М. Нильсен, И. Чанг. — М. : МИР, 2006. — 824 с.

2. Валиев, К. А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления / К. А. Валиев // Успехи физических наук. — 2005. — Т. 175, № 31. — С. 3–39.

3. Кронберг, Д. А. Алгебраический аппарат квантовой информатики / Д. А. Кронберг, Ю. И. Ожигов, А. Ю. Чернявский. — М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009. — 56 с.

4. Запрягаев, С. А. Квантовые информационные системы. Теория и практика применения / С. А. Запрягаев. — СПб. : БХВ-Петербург, 2023. — 320 с.

5. Стиб, В.-Х. Задачи и их решения в квантовых вычислениях и квантовой теории информации / В.-Х. Стиб, Й. Харди. — Москва-Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. — 296 с.

6. Griffiths, D. J. Introduction to Quantum mechanics / D. J. Griffiths, 2018. — 468 p.

REFERENCES

1. Nielsen M., Chuang I. Quantum computing and quantum information. [Nil'sen M., CHang I. Kvantovye vychisleniya i kvantovaya informaciya]. Moscow: MIR, 2006, 824 p.

2. Valiyev K.A. Quantum computers and quantum computing. [Valiev K.A. Kvantovye komp'yutery i kvantovye vychisleniya]. *Uspekhi fizicheskikh nauk — Physics-Uspekhi*, 2005, vol. 175, no. 31, pp. 3–39.

3. Kronberg D.A., Ozhigov Y.I., Chernyavskiy A.Y. Algebraic apparatus of quantum informatics. [Kronberg D.A., Ozhigov YU.I., CHernyavskij A.YU. Algebraicheskij apparat kvantovoj informatiki]. Moscow: MSU, 2009, 56 p.

4. Zapryagaev S.A. Quantum information systems. Theory and practice of aplication. [Zapryagaev S.A. Kvantovye informacionnye sistemy. Teoriya i praktika primeneniya]. Spb.: BHVPeterburg, 2023, 320 p.

5. Stib V.-H., Hardy J. Problems and their solutions in quantum computing and quantum information theory. [Stib V.-H., Hardy J. Zadachi i ih resheniya v kvantovyh vychisleniyah i kvantovoj teorii informacii]. Moscow-Izhevsk: SIC «Regular and chaotic dynamics», 2007, 296 p.

6. Griffiths D.J. Introduction to Quantum mechanics. 2018, 468 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Запишем вектор состояния системы из трёх кубитов в общем виде:

$$|\Psi>_{ABC}= (x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_7)^T, \tag{32}$$

где $x_0 = e^{i\varphi_0}\cos\theta_0$, $x_1 = e^{i\varphi_1}\sin\theta_0\cos\theta_1$, $x_2 = e^{i\varphi_2}\sin\theta_0\sin\theta_1\cos\theta_2$,

$$x_3 = e^{i\varphi_3}\sin\theta_0\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \qquad x_4 = e^{i\varphi_4}\sin\theta_0\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4,$$

$$x_5 = e^{i\varphi_5}\sin\theta_0\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_5,$$

$$x_6 = e^{i\varphi_6}\sin\theta_0\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5\cos\theta_6,$$

$$x_7 = e^{i\varphi_7}\sin\theta_0\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5\sin\theta_6.$$

Области определения углов φ, θ:

$$0 \leqslant \varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_7 < 2\pi, 0 \leqslant \theta_0,\theta_1,...,\theta_6 < \pi/2.$$

Приведём явный вид матрицы плотности для всей системы:

$$\rho_{ABC} = |\Psi>_{ABC\,ABC}<\Psi|. \tag{33}$$

$$\rho_{ABC} = \begin{pmatrix} x_0x_0^* & x_0x_1^* & x_0x_2^* & x_0x_3^* & x_0x_4^* & x_0x_5^* & x_0x_6^* & x_0x_7^* \\ x_1x_0^* & x_1x_1^* & x_1x_2^* & x_1x_3^* & x_1x_4^* & x_1x_5^* & x_1x_6^* & x_1x_7^* \\ x_2x_0^* & x_2x_1^* & x_2x_2^* & x_2x_3^* & x_2x_4^* & x_2x_5^* & x_2x_6^* & x_2x_7^* \\ x_3x_0^* & x_3x_1^* & x_3x_2^* & x_3x_3^* & x_3x_4^* & x_3x_5^* & x_3x_6^* & x_3x_7^* \\ x_4x_0^* & x_4x_1^* & x_4x_2^* & x_4x_3^* & x_4x_4^* & x_4x_5^* & x_4x_6^* & x_4x_7^* \\ x_5x_0^* & x_5x_1^* & x_5x_2^* & x_5x_3^* & x_5x_4^* & x_5x_5^* & x_5x_6^* & x_5x_7^* \\ x_6x_0^* & x_6x_1^* & x_6x_2^* & x_6x_3^* & x_6x_4^* & x_6x_5^* & x_6x_6^* & x_6x_7^* \\ x_7x_0^* & x_7x_1^* & x_7x_2^* & x_7x_3^* & x_7x_4^* & x_7x_5^* & x_7x_6^* & x_7x_7^* \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Матрицу плотности для кубита C вычислим, взяв частичный след по кубитам A и B:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes I_{2C}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes I_{2C},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes I_{2C}, \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes I_{2C}. \tag{35}$$

$$\rho_C = tr_{AB}(\rho_{ABC}) = C_1^T\, \rho_{ABC}\, C_1 + C_2^T\, \rho_{ABC}\, C_2 + C_3^T\, \rho_{ABC}\, C_3 + C_4^T\, \rho_{ABC}\, C_4. \tag{36}$$

Подставляя ρ_{ABC} в (36) и упрощая выражение, получим:

$$\rho_C = \begin{pmatrix} x_0x_0^* + x_2x_2^* + x_4x_4^* + x_6x_6^* & x_0x_1^* + x_2x_3^* + x_4x_5^* + x_6x_7^* \\ x_1x_0^* + x_3x_2^* + x_5x_4^* + x_7x_6^* & x_1x_1^* + x_3x_3^* + x_5x_5^* + x_7x_7^* \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Среднюю запутанность по ансамблю находим, интегрируя определитель матрицы плотности ρ_C по мере $d\Omega$:

$$< \tau >= 4 \int\limits_{\Omega} det(\rho_C) d\Omega, \tag{38}$$

где $d\Omega = \frac{1}{(2\pi)^8} \Pi_{i=0}^{7} d\varphi_i \Pi_{j=0}^{6} d \sin^{14-2j}(\theta_j)$,

$$0 \leqslant \varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_7 < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta_0, \theta_1, ..., \theta_6 < \pi/2.$$

С учётом соотношения (37), получим:

$$< \tau >= 4 \int d\Omega (|x_0|^2|x_3|^2 + |x_0|^2|x_5|^2 + |x_0|^2|x_7|^2 + |x_1|^2|x_2|^2 + |x_2|^2|x_5|^2 +$$

$$+|x_2|^2|x_7|^2 + |x_1|^2|x_4|^2 + |x_3|^2|x_4|^2 + |x_4|^2|x_7|^2 + |x_1|^2|x_6|^2 + |x_3|^2|x_6|^2 +$$

$$+|x_5|^2|x_6|^2 - x_0x_1^*x_2^*x_3 - x_0x_1^*x_4^*x_5 - x_0x_1^*x_6^*x_7 - x_0^*x_1x_2x_3^* - x_2x_3^*x_4^*x_5 -$$

$$-x_2x_3^*x_6^*x_7 - x_0^*x_1x_4x_5^* - x_2^*x_3x_4x_5^* - x_4x_5^*x_6^*x_7 - x_0^*x_1x_6x_7^* - x_2^*x_3x_6x_7^* -$$

$$-x_4^*x_5x_6x_7^*).$$

Введём обозначения:

$$I_{0,0} = |x_0|^2|x_3|^2 d\Omega, I_{0,1} = |x_0|^2|x_5|^2 d\Omega, I_{0,2} = |x_0|^2|x_7|^2 d\Omega,$$

$$I_{0,3} = |x_1|^2|x_2|^2 d\Omega, I_{0,4} = |x_2|^2|x_5|^2 d\Omega, I_{0,5} = |x_2|^2|x_7|^2 d\Omega,$$

$$I_{0,6} = |x_1|^2|x_4|^2 d\Omega, I_{0,7} = |x_3|^2|x_4|^2 d\Omega, I_{0,8} = |x_4|^2|x_7|^2 d\Omega,$$

$$I_{0,9} = |x_1|^2|x_6|^2 d\Omega, I_{0,10} = |x_3|^2|x_6|^2 d\Omega, I_{0,11} = |x_5|^2|x_6|^2 d\Omega,$$

$$I_{1,0} = x_0x_1^*x_2^*x_3 d\Omega, I_{1,1} = x_0x_1^*x_4^*x_5 d\Omega, I_{1,2} = x_0x_1^*x_6^*x_7 d\Omega,$$

$$I_{1,3} = x_0^*x_1x_2x_3^* d\Omega, I_{1,4} = x_2x_3^*x_4^*x_5 d\Omega, I_{1,5} = x_2x_3^*x_6^*x_7 d\Omega,$$

$$I_{1,5} = x_0^*x_1x_4x_5^* d\Omega, I_{1,6} = x_2^*x_3x_4x_5^* d\Omega, I_{1,7} = x_4x_5^*x_6^*x_7 d\Omega,$$

$$I_{1,9} = x_0^*x_1x_6x_7^* d\Omega, I_{1,10} = x_2^*x_3x_6x_7^* d\Omega, I_{1,11} = x_4^*x_5x_6x_7^* d\Omega$$

Углы $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_6$ изменяются от 0 до 2π, поэтому $I_{1,0} = I_{1,1} = ... = I_{1,11} = 0$.

Так как $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\ \cos x\, dx = \frac{1}{2}$ и $I(m,n) = \frac{n-1}{m+n} I(m,n-2) = \frac{m-1}{m+n} I(m-2,n)$, получим: $I_{0,0} = I_{0,1} = ... = I_{0,11} = \frac{1}{9 \cdot 8}$. Отсюда находим среднюю запутанность для трёхкубитовой системы:

$$< \tau >_3 = 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9 \cdot 8} = \frac{2}{3}. \tag{39}$$

Аналогично можно найти среднюю запутанность по ансамблю для четырёхкубитовой системы:

$$< \tau >_4 = 4 \int\limits_{\Omega} det(\rho_D) d\Omega, \tag{40}$$

где $d\Omega = \frac{1}{(2\pi)^{16}} \Pi_{i=0}^{15} d\varphi_i \Pi_{j=0}^{14} d \sin^{30-2j}(\theta_j)$.

Матрица плотности для одного кубита ρ_C имеет вид:

$$\rho_D = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{7} x_{2i} x_{2i}^* & \sum\limits_{i=0}^{7} x_{2i} x_{2i+1}^* \\ \sum\limits_{i=0}^{7} x_{2i+1} x_{2i}^* & \sum\limits_{i=0}^{7} x_{2i+1} x_{2i+1}^* \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Подставляя в (40), получим:

$$< \tau >_4 = 4 (\sum_{i=0}^{55} I_{0,i} + \sum_{i=0}^{55} I_{1,i}) d\Omega, \tag{42}$$

Учитывая $I_{1,0} = I_{1,1} = ... = I_{1,55} = 0$. $I_{0,0} = I_{0,1} = ... = I_{0,55} = \frac{1}{17 \cdot 16}$, а также выражение (42), найдём значение для средней запутанности:

$$< \tau >_4 = 4 \cdot 56 \cdot \frac{1}{17 \cdot 16} = \frac{14}{17}. \tag{43}$$

Для системы из n кубитов получится $2^{n-1} \cdot (2^{n-1} - 1)$ интегралов со значением 0 и столько же интегралов со значением $\frac{1}{(2^n+1) \cdot 2^n}$. Таким образом, запутанность для такой системы можно определить по формуле:

$$< \tau >_n = 4 \cdot 2^{n-1} \cdot (2^{n-1} - 1) \cdot \frac{1}{(2^n + 1) \cdot 2^n}. \tag{44}$$

Упростив выражение (44), получим формулу:

$$< \tau > = \frac{2^n - 2}{2^n + 1}.$$

Боева Анастасия Валерьевна, студент физического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: anastasiavaleri555@gmail.com

Boeva Anastasiya Valeryevna, year student of the Physical faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: anastasiavaleri555@gmail.com

Клинских Александр Федотович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры цифровых технологий факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: klinskikh@phys.vsu.ru

Klinskikh Alexander Fedotovich, Doctor of Physical and Mathematical sciences, Professor, Professor of the Department of Digital technologies Computer science faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: klinskikh@phys.vsu.ru