УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. Эберлейн

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Поступила в редакцию 11.02.2023 г.

Аннотация. В статье рассматривается вариант задачи линейного сопряжения для эллиптического псевдодифференциального уравнения в плоском секторе. Решение ищется в пространствах Соболева–Слободецкого. Используя волновую факторизацию для эллиптического символа, мы сводим задачу сопряжения к системе одномерных линейных интегральных уравнений. При дополнительных предположениях об однородности символа мы сводим последнюю систему к системе линейных алгебраических уравнений относительно 8 неизвестных функций.

Ключевые слова: эллиптическое псевдодифференциальное уравнение, задача сопряжения, пространство Соболева-Слободецкого, волновая факторизация.

ON A CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N. V. Eberlein

Abstract. The article considers a variant of the linear conjugation problem for an elliptic pseudodifferential equation in a plane sector. The solution is sought in Sobolev–Slobodetsky spaces. Using wave factorization for an elliptic symbol, we reduce the conjugation problem to a system of one-dimensional linear integral equations. With additional assumptions on a homogeneity of the symbol, we reduce the latter system to a system of linear algebraic equations with respect to 8 unknown functions.

Keywords: elliptic pseudo-differential equation, conjugation problem, Sobolev-Slobodetsky space, wave factorization.

Рассмотрим следующую задачу в пространствах Соболева–Слободецкого H^s [1]: найти функцию

$$U(x) = \begin{cases} u_+(x), \ x \in C_+^a \\ u_-(x), \ x \in \mathbf{R}^2 \backslash \overline{C_+^a} \end{cases}$$

такую, что $u_+ \in H^s(C_+^a)$, $u_- \in H^s(\mathbf{R}^2 \backslash C_+^a)$, удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} (Au_+)(x) = 0, \ x \in C_+^a, \\ (Au_-)(x) = 0, \ x \in \mathbf{R}^2 \backslash \overline{C_+^a}, \end{cases} \tag{1}$$

где $C_+^a = \{x \in \mathbf{R}^2 : \ x_2 > a|x_1|, \, a > 0\}$, $\Gamma = \partial C_+^a$, A — эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющий условию

$$c_1 \leqslant |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leqslant c_2. \tag{2}$$

Условие (2) означает сильную эллиптичность оператора A. Такая задача впервые была рассмотрена в [2] и сведена к системе линейных интегральных уравнений. Отметим, что аналогичные задачи рассматривались в работе [3]-[5]. Автор рассмотрел специальные дополнительные условия и однородные символы, чтобы свести последнюю систему линейных интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений. Здесь мы развиваем и уточняем результаты [2] для однородных символов, применяя преобразование Меллина к полученной системе линейных интегральных уравнений.

Пусть $A(\xi)$ – измеримая функция, определенная в $\mathbf{R^2}$. Псевдодифференциальным оператором A с символом $A(\xi)$, определенным в области D, называется следующий оператор.

$$A(u)(x) = \int\limits_{\mathbf{R^2}} e^{ix\cdot\xi} A(\xi)\widetilde{u}(\xi)d\xi, \quad x \in D,$$

где знак "$\sim$"над функцией обозначает ее преобразование Фурье.

Мы введем дополнительно некоторые новые объекты, связанные с многомерным комплексным анализом.

Символ $C_+^{*_a}$ обозначает сопряженный конус для C_+^a:

$$C_+^{*_a} = \{x \in \mathbf{R}^2 : x = (x_1,x_2), ax_2 > |x_1|\},$$

$C_-^a \equiv -C_+^a, T(C_+^a)$ обозначает радиальную трубчатую область над конусом C_+^a, т.е. область в комплексном пространстве $\mathbf{C^2}$ вида $\mathbf{R}^2 + iC_+^a$.

Определение. Волновой факторизации символа $A(\xi)$ относительно конуса C_+^a называется его представлением в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где множители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ определены для всех допустимых значений $\xi \in \mathbf{R^2}$, кроме, быть может, точек $\{\xi \in \mathbf{R}^2 : \xi_1^2 = a^2\xi_2^2\}$;

2) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(C_+^{*_a})$, $T(C_-^{*_a})$ соответственно с оценками

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \leqslant c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm æ},$$

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \leqslant c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - æ)}, \quad \forall \tau \in C_+^{*_a}$$

Число $æ \in \mathbf{R}$ называется индексом волновой факторизации символа $A(\xi)$.

Всюду ниже предполагается, что волновая факторизация существует, и рассматривается случай $æ - s = 1 + \delta$, $|\delta| < \frac{1}{2}$, для простоты полагаем $a = 1$.

Тогда в соответствии с выводами [1] общие решения уравнений (1) имеет следующий вид

$$\widetilde{u}_+(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\Big(\widetilde{c}_0(\xi_1 - \xi_2) + \widetilde{d}_0(\xi_1 + \xi_2)\Big), \tag{3}$$

$$\widetilde{u}_-(\xi) = A_{=}^{-1}(\xi)\Big(\widetilde{r}_0(\xi_1 - \xi_2) + \widetilde{q}_0(\xi_1 + \xi_2)\Big), \tag{4}$$

где c_0, d_0, r_0, q_0 произвольные функции одной переменной, $c_0, d_0 \in H^{s_0}(\mathbf{R}_+)$, $r_0, q_0 \in H^{s_0}(\mathbf{R}_-)$, $s_0 = s - æ - \frac{1}{2}$.

Имеется четыре произвольные функции c_0, d_0, r_0, q_0 из соответствующих пространств Соболева–Слободецкого. Выберем дополнительные условия особым образом, связывая граничные значения u_+, u_- линейными соотношениями.

Делаем замену переменных

$$\begin{cases} t_1 = \xi_1 - \xi_2 \\ t_2 = \xi_1 + \xi_2 \end{cases}$$

и обозначаем

$$\widetilde{U}_+(t) \equiv \widetilde{u}_+\left(\frac{t_2+t_1}{2},\frac{t_2-t_1}{2}\right), \quad \widetilde{U}_-(t) \equiv \widetilde{u}_-\left(\frac{t_2+t_1}{2},\frac{t_2-t_1}{2}\right),$$

$$a_{\neq}(t) = A_{\neq}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\frac{t_2-t_1}{2}\right), \quad a_{=}(t) = A_{=}\left(\frac{t_2+t_1}{2},\frac{t_2-t_1}{2}\right),$$

$$\widetilde{c}_0(\xi_1-\xi_2) \equiv C(t_1), \quad \widetilde{d}_0(\xi_1+\xi_2) \equiv D(t_2), \quad \widetilde{r}_0(\xi_1-\xi_2) \equiv R(t_1), \quad \widetilde{q}_0(\xi_1+\xi_2) \equiv Q(t_2)$$

Далее, мы перепишем уравнения (3), (4) в следующем виде

$$\widetilde{U}_+(t) = a_{\neq}^{-1}(t)(C(t_1)+D(t_2)),$$

$$\widetilde{U}_-(t) = a_{=}^{-1}(t)(R(t_1)+Q(t_2)),$$

Теперь мы выбираем следующие граничные условия для уравнений (1):

$$\theta \cdot u_{+|\partial C_+^a} + \omega \cdot u_{-|\partial C_+^a} = \mu, \quad \eta \cdot \left(\frac{\partial u_+}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} + \gamma \cdot \left(\frac{\partial u_-}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} = \nu, \tag{5}$$

где θ, ω, η, γ – определенные комплексные числа, принимающие два разных значения на сторонах угла ∂C_+^a. Обозначим θ_k, ω_k, η_k, γ_k, $k = 1{,}2$, их различные значения на сторонах угла.

Заданные функции μ, ν определены только на ∂C_+^a. Если мы используем приведенную выше замену переменных, преобразующую C_+^aв первый квадрант, это означает, что мы знаем значения $\mu_2(y_1)$, $\nu_2(y_1)$ на луче $[0,+\infty)\times\{0\}$, и значения $\mu_1(y_2)$, $\nu_1(y_2)$ на луче $\{0\}\times[0,+\infty)$. Следовательно, известны их преобразования Фурье

$$\widetilde{\mu}_2(y_1), \quad \widetilde{\nu}_2(y_1), \quad \widetilde{\mu}_1(y_2), \quad \widetilde{\nu}_1(y_2)$$

Тогда в соответствии со свойствами преобразования Фурье мы получаем следующую (4×4)-систему линейных интегральных уравнений второго рода относительно неизвестных функций C, D, R, Q одной переменной

$$\left\{\begin{array}{c}
\theta_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)C(t_1)dt_1 + \theta_1 D(t_2)a_1(t_2)+ \\
+\omega_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)R(t_1)dt_1 + \omega_1 Q(t_2)b_1(t_2) = \widetilde{\mu}_1(t_2), \\
\theta_2 C(t_1)a_2(t_1) + \theta_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)D(t_2)dt_2+ \\
+\omega_2 R(t_1)b_2(t_1) + \omega_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)Q(t_2)dt_2 = \widetilde{\mu}_2(t_1), \\
\eta_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t_1 a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)C(t_1)dt_1 + \eta_1 D(t_2)A_1(t_2)+ \\
+\gamma_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t_1 a_{=}^{-1}(t_1,t_2)R(t_1)dt_1 + \gamma_1 Q(t_2)B_1(t_2) = i\widetilde{\nu}_1(t_2), \\
\eta_2 C(t_1)A_2(t_1) + \eta_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t_2 a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)D(t_2)dt_2+ \\
+\gamma_2 R(t_1)B_2(t_1) + \gamma_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t_2 a_{=}^{-1}(t_1,t_2)Q(t_2)dt_2 = i\widetilde{\nu}_2(t_1).
\end{array}\right., \tag{6}$$

в которой коэффициенты $a_1,a_2,b_1,b_2,A_1,A_2,B_1,B_2$ вычисляются по элементам волновой факторизации.

Сформулируем основные результаты следующим образом.

Теорема 1. Пусть μ, ν – заданные функции из пространств $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R})$, $H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbf{R})$ соответственно, а μ_j, ν_j, $j = 1{,}2$ – их сужения на $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}_\pm)$, $H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbf{R}_\pm)$ соответственно. Тогда задача сопряжения (1), (5) имеет единственное решение u_+, u_- тогда и только тогда, когда система линейных интегральных уравнений (6) имеет единственное решение $C, D, R, Q \in \widetilde{H}^{s-æ+1/2}(\mathbf{R})$.

Теорема 2. Пусть $æ = \frac{\alpha}{2}$ и множители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ – однородные функции порядка $\alpha/2$ и дифференцируемы, $b_j(t_{3-j}) \neq 0$, $B_j(t_{3-j}) \neq 0$, $j = 1{,}2$, $\forall t_1{,}t_2 \neq 0$. Тогда система (6) эквивалентна некоторой неоднородной (8×8)-системе линейных алгебраических уравнений.

Матрица $A(\lambda)$ упомянутой системы имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix}
\theta_1\widehat{k}_{11}(\lambda) & \theta_1\widehat{k}_{21}(\lambda) & \theta_1 l_{11} & 0 & \omega_1\widehat{m}_{11}(\lambda) & \omega_1\widehat{m}_{21}(\lambda) & \omega_1 & 0 \\
\theta_1\widehat{k}_{12}(\lambda) & \theta_1\widehat{k}_{22}(\lambda) & 0 & \theta_1 l_{12} & \omega_1\widehat{m}_{12}(\lambda) & \omega_1\widehat{m}_{22}(\lambda) & 0 & \omega_1 \\
\theta_2 l_{21} & 0 & \theta_2\widehat{n}_{11}(\lambda) & \theta_2\widehat{n}_{21}(\lambda) & \omega_2 & 0 & \omega\widehat{p}_{11}(\lambda) & \omega_2\widehat{p}_{21}(\lambda) \\
0 & \theta l_{22} & \theta_2\widehat{n}_{12}(\lambda) & \theta_2\widehat{n}_{22}(\lambda) & 0 & \omega_2 & \omega_2\widehat{p}_{12}(\lambda) & \omega_2\widehat{p}_{22}(\lambda) \\
\eta_1\widehat{K}_{11}(\lambda) & \eta_1\widehat{K}_{21}(\lambda) & \eta_1 L_{11} & 0 & \gamma_1\widehat{M}_{11}(\lambda) & \gamma_1\widehat{M}_{21}(\lambda) & \gamma_1 & 0 \\
\eta_1\widehat{K}_{12}(\lambda) & \eta_1\widehat{K}_{22}(\lambda) & 0 & \eta_1 L_{12} & \gamma_1\widehat{M}_{12}(\lambda) & \gamma_1\widehat{M}_{22}(\lambda) & 0 & \gamma_1 \\
\eta_2 L_{21} & 0 & \eta_2\widehat{N}_{11}(\lambda) & \eta_2\widehat{N}_{21}(\lambda) & \gamma_2 & 0 & \gamma_2\widehat{P}_{11}(\lambda) & \gamma_2\widehat{P}_{21}(\lambda) \\
0 & \eta_2 L_{22} & \eta_2\widehat{N}_{21}(\lambda) & \eta_2\widehat{N}_{22}(\lambda) & 0 & \gamma_2 & \gamma_2\widehat{P}_{12}(\lambda) & \gamma_2\widehat{P}_{22}(\lambda)
\end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы $A(\lambda)$ строятся с использованием данных задачи сопряжения (1), (5), коэффициентов волновой факторизации и преобразования Меллина (крышка над функцией).

Теорема 3. В предположениях теоремы 2 условие

$$inf|\det A(\lambda)| > 0, \quad \Re\lambda = \frac{1}{2}$$

является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости задачи (1), (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи / В. Б. Васильев. — М. : КомКнига, 2010. — 135 с.

2. Vasilyev, V. B. On some transmission problems in a plane corner / V. B. Vasilyev // Tatra Mt. Math. Publ. — 2015. — V. 63. — P. 291–301.

3. Borsuk, M. Transmission Problems for Elliptic Second-Order Equations in Non-Smooth Domains / M. Borsuk. — Basel: Birkhäuser, 2010.

4. Эскин, Г. И. Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными / Г. И. Эскин // Тр. ММО. — 1970. — № 21. — С. 245–292.

5. Эскин, Г. И. Краевые зада чи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Г. И. Эскин. — М. : Наука, 1973.

REFERENCES

1. Vasiliev V.B. Multipliers of Fourier integrals, pseudo-differential equations, wave factorization, boundary value problems. [Vasil'ev V.B. Mul'tiplikatory integralov Fur'e, psevdodifferencial'nye uravneniya, volnovaya faktorizaciya, kraevye zadachi]. Moscow, 2010, 135 p.

2. Vasilyev V.B. On some transmission problems in a plane corner. Tatra Mt. Math. Publ, 2015, vol. 63, pp. 291–301.

3. Borsuk M, Transmission Problems for Elliptic Second-Order Equations in Non-Smooth Domains. Basel: Birkhäuser, 2010.

4. Eskin G.I. The conjugation problem for equations of the main type with two independent variables. [Eskin G.I. Zadacha sopryazheniya dlya uravnenij glavnogo tipa s dvumya nezavisimymi peremennymi]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva — Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 1970, no. 21, pp. 245–292.

5. Eskin G.I. Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations. [Eskin G.I. Kraevye zadachi dlya ellipticheskih psevdodifferencial'nyh uravnenij]. Moscow: Nauka, 1973.

Эберлейн Николай Владимирович, аспирант Белгородского национального исследовательского университета, Белгород, Россия
E-mail: eberlein92@mail.ru

Eberlein Nikolay Vladimirovich, postgraduate student of the Belgorod state university, Belgorod, Russia
E-mail: eberlein92@mail.ru