

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ДЕКОМПОЗИЦИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ВОЛНОВОЙ ЗАДАЧИ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Ф. О. Найдюк

Воронежский государственный университет;

Ростовский государственный университет путей сообщения, филиал РГУПС в г. Воронеж

Поступила в редакцию 01.12.2021 г.

Аннотация. Исследуется задача распространения малых поперечных колебаний струны на отрезке с двумя сингулярностями. Изучение задачи использует механизм декомпозиции вспомогательной задачи на составляющие, при этом в анализе одномерной задачи применяются средства теории колебаний геометрических графов. Главной целью в исследовании является описание решения через начальные данные в виде некоторого аналога метода Даламбера. Изученная задача представляет собой по сути волновую задачу на геометрическом графе, погруженную в \mathbb{R}^1 .

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, сингулярность, геометрический граф, метод бегущих волн.

USING THE DECOMPOSITION ALGORITHM IN RESEARCH OF A WAVE PROBLEM WITH SINGULARITIES

F. O. Naydyuk

Abstract. The problem of propagation of small transverse vibrations of a string on a segment with two singularities is investigated. The study of the problem uses the mechanism of decomposition of the auxiliary problem into components, while the analysis of a one-dimensional problem uses the means of the theory of oscillations on geometric graphs. The main purpose of the study is to describe the solution through the initial data in the form of some analogue of the D'Alembert method. The studied problem is essentially a wave problem on a geometric graph immersed in \mathbb{R}^1 .

Keywords: hyperbolic equation, singularity, geometric graph, method of characteristics.

Тематика исследования дифференциальных уравнений, в общем, и эволюционных задач, в частности, на геометрических графах (пространственных сетях) не нова и изучается около полувека. Однако от этого интерес к изучению задач подобного типа несколько не ослабевает. Причиной тому является изучение необозримого количества разнообразных явлений, моделирование которых приводит к подобным задачам. Такими явлениями, например, являются: деформации и колебания струнно-стержневых систем, диффузии в сетях, распространение электрического потенциала в нейронных сетях, колебания сложных молекул и др. (см., например [1], [3], [5]).

На данный момент в обозначенной тематике получено весомое количество результатов, например: для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка изучен вопрос о разрешимости задач с краевыми условиями типа Штурма-Лиувилля и о структуре спектра, построена теория функции Грина, доказаны аналоги теорем Штурма, для некоторых начально-краевых задач получены аналоги формулы Даламбера, позволившие описать их решение и обосновать их корректность, а также другие результаты.

ПОСТАНОВКА ВОЛНОВОЙ ЗАДАЧИ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Основная цель работы — исследование в качестве задачи с сингулярными коэффициентами фактически двух задач малых поперечных колебаний на отрезке длиной 2ℓ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{yy}(y,t) = u_{tt}(y,t) \quad \left(y \in \left(0, \frac{\ell}{2}\right) \cup \left(\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right) \cup \left(\frac{3\ell}{2}, 2\ell\right) \right) \\ u(0,t) = u(2\ell,t) = 0 \\ u_y\left(\frac{\ell}{2} + 0, t\right) - u_y\left(\frac{\ell}{2} - 0, t\right) = k u\left(\frac{\ell}{2} + 0, t\right) \\ u_y\left(\frac{3\ell}{2} + 0, t\right) - u_y\left(\frac{3\ell}{2} - 0, t\right) = k u\left(\frac{3\ell}{2} + 0, t\right) \\ u(y,0) = \psi_1(y), \quad u_t(y,0) = 0 \quad (0 \leq y \leq 2\ell) \end{array} \right. \quad (t > 0) \quad , \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{yy}(y,t) = u_{tt}(y,t) \quad \left(y \in \left(0, \frac{\ell}{2}\right) \cup \left(\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right) \cup \left(\frac{3\ell}{2}, 2\ell\right) \right) \\ u_y(0,t) = u_y(2\ell,t) = 0 \\ u_y\left(\frac{\ell}{2} + 0, t\right) - u_y\left(\frac{\ell}{2} - 0, t\right) = k u\left(\frac{\ell}{2} + 0, t\right) \\ u_y\left(\frac{3\ell}{2} + 0, t\right) - u_y\left(\frac{3\ell}{2} - 0, t\right) = k u\left(\frac{3\ell}{2} + 0, t\right) \\ u(y,0) = \psi_2(y), \quad u_t(y,0) = 0 \quad (0 \leq y \leq 2\ell) \end{array} \right. \quad (t > 0) \quad . \quad (2)$$

Исследование подобных задач осложнено наличием сразу двух сингулярностей в точках $\frac{\ell}{2}$ и $\frac{3\ell}{2}$ (см., например [4], [5]).

Основным алгоритмом исследования задач (1) и (2) выступит метод, основанный на получении их решения в виде аналога формулы Даламбера посредством их представления в терминах волновых уравнений на геометрическом графе специального вида, фактически погружённого в \mathbb{R}^1 .

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для описания алгоритма решения введённых задач (1) и (2) вкратце определимся с терминологией для начально-краевой задачи для волнового уравнения на геометрическом графе.

Определение. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ — открытые интервалы из \mathbb{R}^n такие, что $\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть \mathcal{A} — некоторое подмножество множества концов интервалов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$. Если множество

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i=1}^m \gamma_i \right) \cup \mathcal{A}$$

связно, то оно называется связным открытым геометрическим графом.

Волновым уравнением на связном открытом геометрическом графе Γ с сингулярностью будем называть (см., например [1]-[3]):

$$u_{xx}(x,t) - \sum_{z \in \mathcal{J}(\Gamma)} k_z \delta(x-z) u(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \Gamma, t > 0) \quad (3)$$

где δ — дельта-функция Дирака.

При этом смешанная (начально-краевая) задача для уравнения (3) будет иметь вид:

$$u(x + 0 \cdot h, t) = 0 \quad (x \in \partial\Gamma, h \in D(x), t \geq 0), \quad (4)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad (x \in \bar{\Gamma}), \quad (5)$$

где

$$\varphi(x) \in \tilde{C}^2(R(\Gamma)), \quad (6)$$

причём для любой $z \in \mathcal{J}(\Gamma)$ и любых $h, h_1 \in D(z)$

$$\varphi_{hh}^{++}(z) = \varphi_{h_1h_1}^{++}(z), \quad (7)$$

для $z \in \mathcal{J}(\Gamma)$

$$\sum_{h \in D(z)} \varphi_h^+(z) - k_z \varphi(z) = 0, \quad (8)$$

для $x \in \partial\Gamma$

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi_{hh}^{++}(x) = 0. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть существует $u(x,t)$ – решение задачи (3)-(5). Тогда оно единственно.

Рассмотрим граф-цикл Γ с четырьмя рёбрами длины ℓ . Смешанную задачу (3)-(5) на нём будем обозначать через $V_4(\ell; k, k, k, k; \varphi(x))$ по аналогии с [2].

Определение Класс начальных данных задачи $V_4(\ell; k, k, k, k; \varphi(x))$, определяемый условиями (6)-(8) будем обозначать через $K_4^V(\ell; k, k, k, k)$.

Определим рёбра графа-цикла Γ через введение его вершин $\gamma_i = (a_1, b_i) \cup (a_2, b_i)$, $\|\gamma_i\| = \ell$ ($i = 1, 2$), тогда

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i \neq j=1}^2 (a_j, b_i) \right) \cup \mathcal{J}(\Gamma).$$

Ориентацию на Γ можно будет определить следующим образом: $h_{ij} = \frac{1}{\|a_j - b_i\|} (a_j - b_i)$.

В этом случае, введя в рассмотрение два вспомогательных оператора

$$(P\varphi)(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi(b_i + \|x - b_i\|h_{1i}) + \varphi(b_i + \|x - b_i\|h_{2i}) \right) \quad (x \in \bar{\gamma}_i), \quad (10)$$

$$(O\varphi)(x) = (P\varphi)(x) - \varphi(x) \quad (x \in \bar{\Gamma}), \quad (11)$$

можно получить описание решения задачи (3)-(5) в новых терминах.

Теорема 2. Если $u^\varphi(x,t)$ ($x \in \Gamma, t > 0$) решение задачи $V_4(\ell; k, k, k, k; \varphi(x))$, $u^{(P\varphi)}(x,t)$ и $u^{(O\varphi)}(x,t)$ соответствующие решения задач $V_4(\ell; k, k, k, k; (P\varphi)(x))$ и $V_4(\ell; k, k, k, k; (O\varphi)(x))$, то

$$u^\varphi(x,t) = u^{(P\varphi)}(x,t) + u^{(O\varphi)}(x,t), \quad (12)$$

если решения, правой части равенства (12) существуют.

Факт существования решений правой части (12) обосновывается следующим утверждением.

Теорема 3. Пусть $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $\varphi \in K_4^V(\ell; k, k, k, k)$, тогда

1) решение $u^{(P\varphi)}(x,t)$ задачи $V_4(\ell; k, k, k, k; (P\varphi)(x))$ существует, причём

$$u^{(P\varphi)}(x,t) = \begin{cases} u_1^{(P\varphi)}(x,t), & x \in \Gamma_1 \\ u_2^{(P\varphi)}(x,t), & x \in \Gamma_2 \end{cases},$$

где функция $u_j^{(P\varphi)}(x,t)$ ($j = 1, 2$) является решением задачи $B_2(\ell; k; \frac{k}{2}; (P\varphi|_{\Gamma_j})(x))$, где $(P\varphi|_{\Gamma_j})(x)$ сужение функции $(P\varphi)(x)$ на Γ_j ($j = 1, 2$),

2) решение $u^{(O\varphi)}(x,t)$ задачи $V_4(\ell; k, k, k; (O\varphi)(x))$ существует, причём

$$u^{(O\varphi)}(x,t) = \begin{cases} u_1^{(O\varphi)}(x,t), & x \in \Gamma_1 \\ u_2^{(O\varphi)}(x,t), & x \in \Gamma_2 \end{cases},$$

где функция $u_j^{(H\varphi)}(x,t)$ ($j = 1,2$) является решением задачи $B_2(\ell; k; +\infty; (O\varphi|_{\Gamma_j})(x))$, а $(O\varphi|_{\Gamma_j})(x)$ есть сужение функции $(O\varphi)(x)$ на Γ_j ($j = 1,2$).

Замечание 1. В теореме 3 через Γ_j обозначены подграфы графа-цикла Γ : $\Gamma_j = (a_j, b_1) \cup (a_j, b_2)$, ($j = 1,2$).

Замечание 2. В теореме 3 через $B_2(\ell; k; k; \varphi(x))$ обозначена задача (3)-(5) на графе-звезде по аналогии [2], решение которой представимо в виде аналога формулы Даламбера.

АЛГОРИТМ ОПИСАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

В рамках определённой выше терминологии постановка задач (1) и (2) может быть переформулирована следующим образом: на геометрическом графе с тремя рёбрами (два из которых одинаковой длины $\frac{\ell}{2}$, третье имеет длину ℓ , параллельны и сонаправлены), обозначим его за Γ'_1 , определена задача (3)-(5), в которой функция φ совпадает с ψ_1 или ψ_2 на соответствующих рёбрах и: для задачи (1) — $\partial\Gamma'_1$ состоит из двух вершин, а в двух других коэффициенты k_z равны между собой и отличны от нуля; для задачи (2) — $\partial\Gamma'_1 = \emptyset$, коэффициенты k_z в двух вершинах равны между собой и отличны от нуля, а в двух других — $k_z = 0$.

Таким образом моделями задач (1) и (2) в терминах геометрических графов могут служить малые поперечные колебания систем струн, изображённых на рисунках 1 и 2 соответственно.

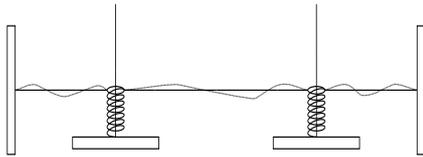


Рис. 1. Система из трёх струн. Конец (начало) первой (третьей) струны совмещён с подпружиненным, невесомым кольцом, которое может перемещаться только в вертикальном направлении по несгибаемой спице (без трения). Крайние вершины жёстко закреплены.

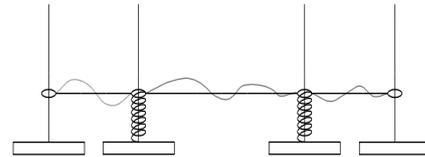


Рис. 2. Система из трёх струн. Конец (начало) первой (третьей) струны совмещён с подпружиненным, невесомым кольцом, которое может перемещаться только в вертикальном направлении по несгибаемой спице (без трения). Крайние вершины соединены с невесомыми колечками, которые свободно (без трения) могут перемещаться в вертикальном направлении по несгибаемой спице.

Для определённости обозначим рёбра графа Γ'_1 следующим образом:

$$R(\Gamma'_1) = (c, b_1) \cup (b_1, a_1) \cup (a_1, e),$$

тогда коэффициенты $k_z = k > 0$ определены в вершинах b_1 и a_1 .

Если использовать введённое выше обозначение графа-цикла Γ , то Γ можно представить как объединение двух графов Γ'_1 и Γ'_2 , где Γ'_2 — "зеркальное" отражение графа Γ'_1 относительно прямой ce ($c \in (a_2, b_1)$, $e \in (a_1, b_2)$, $\|c - b_1\| = \|e - b_2\| = \frac{\|a_1 - b_1\|}{2}$).

Рассмотрим две задачи $V_4(\ell; k, k, k; \varphi_1(x))$ и $V_4(\ell; k, k, k; \varphi_2(x))$, где начальные данные $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определены через начальные данные задач (1) и (2) следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \psi_1 \left(\frac{\ell}{2} + \|x - b_1\| \right), & x \in [b_1, a_1] \\ -\psi_1 \left(\frac{\ell}{2} + \|x - a_2\| \right), & x \in [a_2, b_2] \\ \psi_1 \left(\|x - \frac{b_1 + a_2}{2}\| \right), & x \in (b_1, c) \\ -\psi_1 \left(\|x - \frac{b_1 + a_2}{2}\| \right), & x \in (a_2, c) \\ \psi_1 \left(2\ell - \|x - \frac{a_1 + b_2}{2}\| \right), & x \in (a_1, e) \\ -\psi_1 \left(2\ell - \|x - \frac{a_1 + b_2}{2}\| \right), & x \in (e, b_2) \end{cases}, \quad (13)$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \psi_2 \left(\frac{\ell}{2} + \|x - b_1\| \right), & x \in [b_1, a_1] \\ \psi_2 \left(\frac{\ell}{2} + \|x - a_2\| \right), & x \in [a_2, b_2] \\ \psi_2 \left(\|x - \frac{b_1 + a_2}{2}\| \right), & x \in (b_1, a_2) \\ \psi_2 \left(2\ell - \|x - \frac{a_1 + b_2}{2}\| \right), & x \in (a_1, b_2) \end{cases}. \quad (14)$$

Пусть $u^{\varphi_1}(x, t)$ и $u^{\varphi_2}(x, t)$ ($x \in \Gamma$) – решения задач $V_4(\ell; k, k, k; \varphi_1(x))$ и $V_4(\ell; k, k, k; \varphi_2(x))$ соответственно.

Обозначим через $u_j^{\varphi_i}(x, t)$ – сужение решения задачи $V_4(\ell; k, k, k; \varphi_i(x))$ на Γ'_j ($i = 1, 2, j = 1, 2$).

Теорема 4. Решение задач (1) и (2) существует, причём $u(x, t) = u_1^{\varphi_1}(x, t)$, – решение задачи (1), а $v(x, t) = u_1^{\varphi_2}(x, t)$, – решение задачи (2) ($x \in \Gamma'_1$).

Доказательство будет проведено в рамках обозначенной выше терминологии теорем 2–3.

Покажем, что и $\varphi_1(x)$, и $\varphi_2(x)$ из класса $K_4^V(\ell; k, k, k)$:

1) $\varphi_j(x) \in \tilde{C}^2(R((\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2) \setminus (\Gamma'_1 \cap \Gamma'_2)))$ по построению, так как $\psi_j(y)$ дважды непрерывно дифференцируема;

кроме того, $\forall (h, \eta \in D(c))$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} \varphi_j(c + \varepsilon h) = \begin{cases} \pm \psi_1(0) = 0, & j = 1 \\ \psi_2(0), & j = 2 \end{cases},$$

$$(\varphi_1)_h^+(c) = \psi_1'(0) = -(-\psi_1'(0)) = (\varphi_1)_\eta^+,$$

$$\sum_{h \in D(c)} (\varphi_2)_h^+(c) = \psi_2'(0) - \psi_2'(0) = 0 - 0 = 0,$$

$$(\varphi_1)_{hh}^{++}(c) = \left(\pm \psi_1''(0) = 0 \right) = (\varphi_1)_{\eta\eta}^{++}(c),$$

$$(\varphi_2)_{hh}^{++}(c) = \psi_2''(0) = (\varphi_2)_{\eta\eta}^{++}(c)$$

(аналогично показывается для вершины e , меняется лишь значение аргумента функции $\psi(y)$ с 0 на 2ℓ);

2) $(\varphi_j)_{hh}^{++}(b_1) = \psi_j'' \left(\frac{\ell}{2} - 0 \right) = \psi_j'' \left(\frac{\ell}{2} + 0 \right) = (\varphi_j)_{\eta\eta}^{++}(b_1) \forall (h, \eta \in D(b_1))$ для $j = 1, 2$ (аналогичное условие выполняется в вершине a_2 для $j = 2$, а для $j = 1$ с точностью до знака минуса);

$(\varphi_j)_{hh}^{++}(a_1) = \psi_j'' \left(\frac{3\ell}{2} - 0 \right) = \psi_j'' \left(\frac{3\ell}{2} + 0 \right) = (\varphi_j)_{\eta\eta}^{++}(a_1) \forall (h, \eta \in D(a_1))$ для $j = 1, 2$ (аналогичное условие выполняется в вершине b_2 для $j = 2$, а для $j = 1$ с точностью до знака минус).

$$3) \sum_{h \in D(b_1)} (\varphi_j)_h^+(b_1) - k \varphi_j(b_1) = \psi_j' \left(\frac{\ell}{2} + 0 \right) - \psi_j' \left(\frac{\ell}{2} - 0 \right) - k \psi_j \left(\frac{\ell}{2} \right) = 0$$

для $j = 1, 2$ (аналогичное условие выполняется в вершине a_2 для $j = 2$, а для $j = 1$ с точностью до знака минус);

$\sum_{h \in D(a_1)} (\varphi_j)_h^+(a_1) - k \varphi_j(a_1) = \psi_j' \left(\frac{3\ell}{2} + 0 \right) - \psi_j' \left(\frac{3\ell}{2} - 0 \right) - k \psi_j \left(\frac{3\ell}{2} \right) = 0$ для $j = 1, 2$ (аналогичное условие выполняется в вершине b_2 для $j = 2$, а для $j = 1$ с точностью до знака минус);

На основе вышеизложенного можно утверждать, что $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат классу $K_4^V(\ell; k, k, k)$.

Опираясь на утверждения теорем 2 – 3, можно сделать вывод, что решения задач $V_4(\ell; k, k, k; \varphi_1(x))$ и $V_4(\ell; k, k, k; \varphi_2(x))$ существуют и представимы в форме аналога формулы Даламбера, а следовательно существуют и их сужения на Γ'_1 , представимые в такой же форме.

И, наконец, убедимся, что $u_1^{\varphi^i}(x, t)$ ($x \in \Gamma'_1$) при $i = 1$ является решением задачи (1), а при $i = 2$ – решением задачи (2).

Заметим, что $u_1^{\varphi^i}(x, t)$ удовлетворяет волновому уравнению (3) и принадлежит $\tilde{C}^2(R(\Gamma'_1))$ по переменной x при любом $t > 0$.

Кроме того, $u_1^{\varphi^1}(z + 0 \cdot h, t) = 0$ при $z \in \{c, e\} = \partial\Gamma'_1$ для задачи (1), а

$$\sum_{h \in D(z)} (u_1^{\varphi^2})_h^+(z, t) - 0 \cdot u_1^{\varphi^2}(z, t) = \sum_{h \in D(z)} (u_1^{\varphi^2})_h^+(z, t) = 0$$

при $z \in \{c, e\} \subset \mathcal{J}(\Gamma)$ для задачи (2).

Для завершения доказательства остаётся использовать утверждение теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.
2. Найдюк, Ф. О. Исследование волнового уравнения с сингулярностью на несимметричном графе / Ф. О. Найдюк // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2021. — № 1. — С. 110–116.
3. Покорный, Ю. В. Волновое уравнение на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских // Докл. РАН. — 2003. — Т. 388, № 1. — С. 16–18.
4. Найдюк, Ф. О. Формула продолжения начальных данных в решении Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода / Ф. О. Найдюк, В. Л. Прядиев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2004. — № 1. — С. 115–122.
5. Найдюк, Ф. О. Описание профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке с краевыми условиями первого или второго рода — на одном конце и третьего рода или присоединённой массы — на другом / Ф. О. Найдюк, В. Л. Прядиев, С. М. Ситник // Черноземный альманах научных исследований. Сер. : Фундаментальная математика. — 2005. — С. 53–68.

REFERENCES

1. Pokornyj Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Diffe-

rencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

2. Naydyuk F.O. Study of the wave equation with a singularity on a nonsymmetric graph. [Najdyuk F.O. Issledovanie volnovoogo uravneniya s singulyarnost'yu na nesimmetrichnom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 110–116.

3. Pokorniy Yu.V., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V. Wave equation on a spatial network. [Pokorniy YU.V., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V. Volnovoe uravnenie na prostranstvennoj seti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2003, vol. 388, no. 1, pp. 16–18.

4. Naydyuk F.O., Pryadiev V.L. The formula for continuing the initial data in the d'Alembert solution for the wave equation on a segment with a boundary condition of the third kind. [Najdyuk F.O., Pryadiev V.L. Formula prodolzheniya nachal'nyh dannyh v reshenii Dalambera dlya volnovoogo uravneniya na otrezke s kraevym uslovиеm tret'ego roda]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2004, no. 1, pp. 115–122..

5. Naydyuk F.O., Pryadiev V.L., Sitnik S.M. Description of the forward and backward wave profiles for the wave equation on a segment with boundary conditions the first or second kind at one end and the third kind or attached mass at the other. [Najdyuk F.O., Pryadiev V.L., Sitnik S.M. Opisanie profilej pryamoj i obratnoj voln dlya volnovoogo uravneniya na otrezke s kraevymi usloviyami pervogo ili vtorogo roda — na odnom konce i tret'ego roda ili prisoedinyonnoj massy — na drugom]. *CHernozemnyj al'manah nauchnyh issledovaniy. Seriya Fundamental'naya matematika — Chernozem almanac of scientific research. Series Fundamental Mathematics*, 2005, pp. 53–68.

*Найдюк Филипп Олегович, кандидат физ.-мат. наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; Ростовский государственный университет путей сообщения, филиал РГУПС в г. Воронеж, Воронеж, Россия
E-mail: xakepph@yandex.ru*

*Naidyuk Philip Olegovich, candidate of physics and mathematics. Sci., Voronezh State University, Voronezh, Russia; Rostov State University of Railway Transport, branch of RSUPS in Voronezh, Voronezh, Russia
E-mail: xakepph@yandex.ru*