УДК 517.95

О ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. А. Машинец

Белгородский государственный университет

Поступила в редакцию 11.02.2022 г.

Аннотация. Рассмотрена общая дискретная краевая задача в пространствах Соболева-Слободецкого в плоском квадранте для эллиптического псевдодифференциального уравнения. Описано ее сведение к системе интегральных уравнений и разрешимость этой системы для малых значений параметра дискретности исходя из разрешимости ее непрерывного аналога.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, периодическая волновая факторизация, аналитичность, разрешимость, дискретная краевая задача.

ON A DISCRETE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATION

A. A. Mashinetz

Abstract. A general discrete boundary value problem in Sobolev-Slobodetskii spaces in a plane quadrant for elliptic pseudo-differential equation is considered. Its reduction to a system of integral equations and solvability of the system for a small size of discreteness are described starting from a solvability of its continuous analogue.

Keywords: discrete pseudo-differential operator, periodic wave factorization, analyticity, solvability, discrete boundary value problem.

Пусть $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка на плоскости, $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1,x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ — первый квадрант, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$, $\mathbb{T}^2 = [-\pi,\pi]^2, \hbar = h^{-1}$. Мы рассматриваем функции дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$.

Мы также используем обозначения $\zeta^2 = h^{-2}((e^{ih\cdot\xi_1} - 1)^2 + (e^{ih\cdot\xi_2} - 1)^2)$ и $S(h\mathbb{Z}^2)$ для дискретного аналога пространства Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций [1, 4, 5].

Определение 1. *Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ по норме*

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где $\tilde{u}_d(\xi)$ обозначает дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2,\ \xi \in \hbar\mathbb{T}^2.$$

Пусть $A_d(\xi)$ измеримая периодическая функция, определенная в $\mathbb{R}^2$ с базисным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

Определение 2. *Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $A_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d называется следующий оператор*

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} A_d(\xi) e^{i(\tilde{y}-\tilde{x})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi,\ \tilde{x} \in K_d,$$

Здесь мы будем рассматривать символы, удовлетворяющие условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \leqslant |A_d(\xi)| \leqslant c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с положительными константами c_1, c_2 не зависящими от h. тот класс символов, удовлетворяющих этому условию, будем обозначать E_α. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется порядком дискретного псевдодифференциального оператора A_d.

Исследуется разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0,\ \tilde{x} \in K_d, \tag{2}$$

в пространстве $H^s(K_d)$ с использованием элементов многомерного комплексного анализа в пространстве $\mathbb{C}^2$. Область вида $\mathcal{T}_h(K) = \hbar\mathbb{T}^2 + iK$ называется трубчатой областью над квадрантом K. Мы будем работать с голоморфными функциями $f(x+i\tau)$ в таких областях $\mathcal{T}_h(K)$ [3].

Определение 3. *Периодическая волновая факторизация символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представлением в виде*

$$A_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) A_{d,=}(\xi),$$

где факторы $A_{d,\neq}(\xi), A_{d,=}(\xi)$ допускают голоморфное продолжение в трубчатые области $\mathcal{T}_h(K), \mathcal{T}_h(-K)$ соответственно, удовлетворяющие оценкам

$$c_1(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{æ}{2}} \leqslant |A_{d,\neq}(\xi+i\tau)| \leqslant c_1'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{æ}{2}},$$

$$c_2(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha-æ}{2}} \leqslant |A_{d,=}(\xi-i\tau)| \leqslant c_2'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha-æ}{2}},$$

с положительными константами c_1, c_1', c_2, c_2' не зависящими от h;

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2\left((e^{ih(\xi_1+i\tau_1)}-1)^2 + (e^{ih(\xi_2+i\tau_2)}-1)^2\right),\ \xi = (\xi_1,\xi_2) \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

$$\tau = (\tau_1,\tau_2) \in K.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической волновой факторизации.

Везде ниже предполагается, что имеется периодическая волновая факторизация символа $A_d(\xi)$ с индексом $æ$.

Используя методы, разработанные в [2], можно получить следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $æ - s = n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$. Тогда общее решение уравнения* (2) *имеет следующий вид*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\zeta_1^k\right)\right), \tag{3}$$

где $\tilde{c}_k(\xi_1), \tilde{d}_k(\xi_2), k = 0,1,\cdots,n-1,$ — произвольные функции из – $\tilde{H}^{s_k}(h\mathbb{T}), s_k = s - æ + k - 1/2$.

Имеет место априорная оценка

$$||u_d||_s \leqslant const \sum_{k=0}^{n-1}([c_k]_{s_k} + [d_k]_{s_k}),$$

где $[\cdot]_{s_k}$ *обозначает норму в пространстве* $H^{s_k}(h\mathbb{T})$, *и const не зависит от* h.

С учетом теоремы 1 введем следующие граничные условия

$$\begin{aligned}&(B_{d,j}u_d)(\tilde{x}_1,0)=b_{d,j}(\tilde{x}_1),\\&(G_{d,j}u_d)(0,\tilde{x}_2)=g_{d,j}(\tilde{x}_2),\ j=0,1.\cdots,n-1,\end{aligned}\tag{4}$$

где $B_{d,j},G_{d,j}$ — дискретные псевдодифференциальные операторы порядка $\beta_j,\gamma_j\in\mathbb{R}$ с символами $\widetilde{B}_{d,j}(\xi)\in E_{\beta_j}$, $\widetilde{G}_{d,j}(\xi)\in E_{\gamma_j}$

$$(B_{d,j}u_d)(\tilde{x})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\hbar\mathbf{T}^2}\sum_{\tilde{y}\in h\mathbf{Z}^2}e^{i\xi\cdot(\tilde{x}-\tilde{y})}\widetilde{B}_{d,j}(\xi)\tilde{u}_d(\xi)d\xi,$$

$$(G_{d,j}u_d)(\tilde{x})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\hbar\mathbf{T}^2}\sum_{\tilde{y}\in h\mathbf{Z}^2}e^{i\xi\cdot(\tilde{x}-\tilde{y})}\widetilde{G}_{d,j}(\xi)\tilde{u}_d(\xi)d\xi.$$

Можно переписать граничные условия (4) в образах Фурье

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\widetilde{B}_{d,j}(\xi_1,\xi_2)\tilde{u}_d(\xi_1,\xi_2)d\xi_2=\tilde{b}_{d,j}(\xi_1),\\&\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\widetilde{G}_{d,j}(\xi_1,\xi_2)\tilde{u}_d(\xi_1,\xi_2)d\xi_1=\tilde{g}_{d,j}(\xi_2),\ j=0,1.\cdots,n-1,\end{aligned}\tag{5}$$

так что в соответствии со свойствами дискретных псевдодифференциальных операторов и свойствами следов потребуем $b_{d,j}(\tilde{x}_1)\in H^{s-\beta_j-1/2}(h\mathbb{Z})$, $g_{d,j}(\tilde{x}_2)\in H^{s-\gamma_j-1/2}(h\mathbb{Z})$. Отметим, что дискретный аналог граничных условий Неймана рассмотрен в [3].

Умножая равенство (3) на $\widetilde{B}_{d,j}(\xi_1,\xi_2)$ и $\widetilde{G}_{d,j}(\xi_1,\xi_2)$, интегрируя по отрезку $[-\hbar\pi,\hbar\pi]$ сначала по ξ_2. потом по ξ_1, с учетом условий (5) получаем следующую $(2n\times 2n)$- систему линейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\left(r_{jk}(\xi_1)\tilde{c}_k(\xi_1)+\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}l_{jk}(\xi_1,\xi_2)\tilde{d}_k(\xi_2)d\xi_2\right)=\tilde{b}_{d,j}(\xi_1)\\&\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}m_{jk}(\xi_1,\xi_2)\tilde{c}_k(\xi_1)d\xi_1+p_{jk}(\xi_2)\tilde{d}_k(\xi_2)\right)=\tilde{g}_{d,j}(\xi_2),\\&j=0,1,\dots,n-1,\end{aligned}\tag{6}$$

с неизвестными функциям $\tilde{c}_k,\tilde{d}_k$, $k=0,1,\dots,n-1$. Мы использовали следующие обозначения

$$r_{jk}(\xi_1)=\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\widetilde{B}_{d,j}(\xi)A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\zeta_2^k d\xi_2,\ p_{jk}(\xi_2)=\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\widetilde{G}_{d,j}(\xi)A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\zeta_1^k d\xi_1,$$

$$l_{jk}(\xi_1,\xi_2)=\widetilde{B}_{d,j}(\xi)A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\zeta_1^k,\ m_{jk}(\xi_1,\xi_2)=\widetilde{G}_{d,j}(\xi)A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\zeta_2^k,$$

$j,k=0,1,\dots,n-1$.

Таким образом, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. *Краевая задача* (2),(4) *однозначно разрешима в пространстве* $H^s(K_d)$ *с данными* $b_{d,j} \in H^{s-\beta_j-1/2}(h\mathbb{Z}_+, g_{d,j} \in H^{s-\gamma_j-1/2}(h\mathbb{Z}_+$ *тогда и только тогда, когда система* (6) *имеет единственное решение* $\widetilde{c}_k,\widetilde{d}_k \in \widetilde{H}^{s_k}(\hbar\mathbb{T})$, $j,k = 0,1,\dots,n-1$.

Далее рассмотрим непрерывную краевую задачу, соответствующую рассмотренной дискретной краевой задаче (2), (4). Пусть A — псевдодифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \widetilde{A}(\xi)e^{i\xi(y-x)}u(y)dyd\xi$$

с символом $\widetilde{A}(\xi)$ удовлетворяющим условию:

$$|\widetilde{A}(\xi)| \sim (1+|\xi|)^{\alpha} \tag{7}$$

и допуская волновую факторизацию относительно K

$$\widetilde{A}(\xi) = A_{\neq}(\xi)\cdot A_{=}(\xi).$$

с индексом æ таким, что $æ - s = n+\delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$ [2].

Пусть еще $B_j,G_j, j = 0,1,\dots,n-1$ – псевдодифферциальные операторы с символами $\widetilde{B}_j(\xi),\widetilde{G}_j(\xi)$ удовлетворяющими условию (7) при β_j,γ_j вместо α. Следующая краевая задача

$$\begin{aligned} &(Au)(x) = 0,\ x \in K,\\ &(B_ju)(x_1,0) = b_j(x_1),\\ &(G_ju)(0,x_2) = g_j(x_2),\ j = 0,1,\dots,n-1 \end{aligned} \tag{8}$$

является непрерывным аналогом дискретной граничной задачи (2),(4).

Специальный выбор дискретного оператора A_d и дискретных граничных функций $b_{d,j}, g_{d,jd}$ по данным краевой задачи (8) позволяет получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $s-\beta_j > 3, s-\gamma_j > 3, j = 0,1,\dots,n-1$. *Из однозначной разрешимости задачи (8) следует однозначная разрешимость задачи (2), (4) при достаточно малых* h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, В. Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное / В. Б. Васильев // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — 2019. — С. 160–164.

2. Vasil'ev, V. B. Wave factorization of elliptic symbols: Theory and applications / V. B. Vasil'ev. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

3. Mashinets, A. A. On discrete Neumann problem in a quadrant / A. A. Mashinets, A. V. Vasilyev, V. B. Vasilyev // Lobachevskii J. Math. — 2023. — V. 44, № 3. — P. 1011–1021.

4. Vasilyev, A. V. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space / A. V. Vasilyev, V. B, Vasilyev // Math. Model. Anal. — 2018. — V. 23, № 3. — P. 492–506.

5. Vasilyev, V. B. Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization / V. B. Vasilyev // Integral Methods in Science and Engineering. — 2017. — V. 1. — P. 315–324.

REFERENCES

1. Vasilyev V.B. Operators and equations: discrete and continuous. [Vasil'ev V.B. Operatory i uravneniya: diskretnoe i nepreryvnoe]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki — Journal of Mathematical Sciences*, 2019, pp. 160–164.

2. Vasil'ev V.B. Wave factorization of elliptic symbols: Theory and applications, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

3. Mashinets A.A., Vasilyev A.V., Vasilyev V. B. On discrete Neumann problem in a quadrant, Lobachevskii J. Math, 2023, vol. 4, no. 3, pp. 1011–1021.

4. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space, Math. Model. Anal., 2018, vol. 23, no. 3, pp. 492–506.

5. Vasilyev V.B. Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization. Integral Methods in Science and Engineering, 2017, vol. 1, pp. 315–324.

Машинец Анастасия Александровна, аспирант кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный университет, Белгород, Россия
E-mail: 711012@bsu.edu.ru

Mashinetz Anastasia Aleksandrovna, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod state university, Belgorod, Russia
E-mail: 711012@bsu.edu.ru