

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

В. Н. Колодежнов

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
"Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"*

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Аннотация. Рассмотрена реологическая модель нелинейной вязкопластической жидкости. Эта модель на трех смежных диапазонах изменения скорости сдвига демонстрирует три различных варианта механического поведения: течение с постоянным значением вязкости, дилатантное, а также псевдопластическое поведение. Получено решение задачи о течении жидкости такого рода в окрестности неограниченного цилиндра, который равномерно вращается под действием приложенного крутящего момента. В ходе решения основную область течения делили на отдельные зоны, в каждой из которых реализуется один из вариантов механического поведения жидкости на соответствующем диапазоне изменения скорости сдвига. При этом предполагалось, что границы раздела этих зон не известны заранее. Для наиболее общей схемы течения, когда реализуются все три зоны течения, получены выражения для распределения скорости.

Ключевые слова: реологическая модель, нелинейная вязкопластическая жидкость, касательное напряжение, скорость сдвига.

MODELING THE FLOW OF A NONLINEAR VISCOPLASTIC FLUID NEAR A ROTATING CYLINDER

V. N. Kolodezhnov

Abstract. A rheological model of a nonlinear viscoplastic fluid is considered. This model demonstrates three different types of mechanical behavior in three adjacent shear rate ranges: constant viscosity flow, dilatant flow, and pseudoplastic behavior. A solution to the problem of a fluid flow of this kind in the vicinity of an unbounded cylinder, which rotates uniformly under the action of an applied torque, is obtained. During the solution, the main flow area was divided into separate zones, in each of which one of the variants of the mechanical behavior of the fluid is realized in the corresponding range of shear rate changes. It was assumed that the boundaries between these zones are not known in advance. For the most general flow scheme, when all three flow zones are realized, expressions for the velocity distribution are obtained.

Keywords: rheological model, nonlinear viscoplastic fluid, shear stress, shear rate.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наряду с традиционными жидкостями, отличающимися постоянным значением вязкости, хорошо известны и неньютоновские жидкости [1], для которых характерно монотонное изменение вязкости в зависимости от скорости сдвига. Применительно к одномерным течениям для так называемых псевдопластических жидкостей их вязкость монотонно снижается по мере увеличения скорости сдвига, а для дилатантных жидкостей, наоборот, наблюдается ее

монотонное возрастание. Моделирование механического поведения таких сплошных сред проводится на основе достаточно простых степенных законов зависимости вязкости от скорости сдвига.

Более сложный вид зависимости вязкости от скорости сдвига демонстрируют суспензии мелкодисперсных частиц твердой фазы. Главное отличие поведения таких жидкостей заключается в немонотонном характере зависимости вязкости от скорости сдвига [2–7], когда по мере ее возрастания имеет место последовательная смена диапазонов убывания и возрастания вязкости.

Концентрированные суспензии мелкодисперсных частиц при определенных сочетаниях их размеров и объемной концентрации нередко демонстрируют в своем поведении еще одно отличие от традиционных неньютоновских дилатантных или псевдопластических жидкостей. Оно заключается в том, что при приближении скорости сдвига к некоторому критическому значению степень крутизны кривой течения, характеризующая эффективную наблюдаемую вязкость среды, начинает резко возрастать. При этом, для некоторых видов суспензий такое возрастание вязкости по своей величине может происходить на один — два порядка и более, что можно интерпретировать, как проявление эффекта “упрочнения” или “отвердевания” сплошной среды.

Изменение характера механического поведения жидкости может быть учтено на основе комбинированных реологических моделей, которые предполагают использование на каждом отдельном диапазоне изменения скорости сдвига соответствующей функциональной зависимости для описания кривой течения (зависимости касательного напряжения от скорости сдвига). При этом, естественно, на границах раздела отдельных диапазонов изменения скорости сдвига должны выполняться условия сопряжения для вводимых функциональных зависимостей.

В [8, 9] были рассмотрены нелинейно-вязкие жидкости, которые на трех характерных диапазонах изменения скорости сдвига демонстрируют немонотонное изменение вязкости. Предложены функции для аппроксимации такой зависимости, которая характеризуется двумя экстремумами типа минимум и максимум в областях, соответственно, сравнительно небольших и достаточно больших значений скорости сдвига. Для жидкости с такой реологической моделью рассмотрена задача о ее течении в цилиндрическом канале.

Вращательное течение в зазоре между коаксиальными цилиндрами для нелинейно-вязкой жидкости, поведение которой также подчиняется соответствующей комбинированной реологической модели, было рассмотрено в работе [10]. При этом в реологическую модель дополнительно было заложено условие неограниченного возрастания вязкости (условие “отвердевания”) при приближении скорости сдвига к некоторому критическому значению.

В [11] для описания механического поведения некоторых жидкостей была рассмотрена сравнительно простая модель комбинированного типа для зависимости вязкости от скорости сдвига. В рамках этой модели на двух крайних диапазонах изменения скорости сдвига предполагается, что вязкость принимает постоянные, хотя и различные значения, а на промежуточном диапазоне предлагается вариант линейной зависимости вязкости от скорости сдвига.

Еще одна реологическая модель нелинейной вязкопластической жидкости с тремя вариантами механического поведения (соответственно, с постоянным значением вязкости, а также дилатантным и псевдопластическим поведением) на трех различных диапазонах изменения скорости сдвига была рассмотрена в работе [12]. При этом посредством введения предела текучести в этой модели проведен учет пластических свойств среды. С привлечением такой модели было получено решение задачи об установившемся течении жидкости такого рода в цилиндрическом канале.

Для описания поведения жидкостей с немонотонным изменением вязкости в принципе

могут быть введены в рассмотрение и реологические зависимости, описываемые в рамках единой, но несколько более сложной функции. Пример такой единой зависимости эффективной вязкости от интенсивности напряжений на всем диапазоне ее изменения предложен в [13]. Для жидкостей с такой реологической моделью в этой же работе были рассмотрены задачи о вращательном течении в зазоре между коаксиальными цилиндрами и поступательном течении Пуазейля в плоском канале. Дальнейшее развитие результатов этой работы было представлено в [14], где была рассмотрена задача о течении в плоском диффузоре.

В данной работе рассмотрена задача об установившемся вращательном течении нелинейной вязкопластической жидкости в окрестности вращающегося цилиндра. При этом предполагалось, что реология жидкости, заполняющей все пространство, учитывает пластические свойства и описывается моделью комбинированного типа из работы [15] с тремя вариантами различного поведения на отдельных диапазонах изменения скорости сдвига.

2. РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Некоторые виды суспензий [2] мелкодисперсных частиц демонстрируют наличие трех характерных диапазонов механического поведения, на каждом из которых реализуется свой, вполне конкретный вариант зависимости вязкости и касательного напряжения от скорости сдвига.

В диапазоне сравнительно небольших значений модуля скорости сдвига кривая течения (график зависимости касательного напряжения τ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$) имеет практически линейный вид. Такая ситуация в первом приближении соответствует постоянному значению вязкости. Если дополнительно учитывать фактор пластических свойств жидкой компоненты суспензии, то здесь также необходимо учесть то обстоятельство, что модуль касательного напряжения должен превышать предел текучести τ_p .

Второму диапазону изменения скорости сдвига соответствует уже другой вариант механического поведения суспензии. При превышении модулем скорости сдвига некоторого порогового уровня $\dot{\gamma}_0$ зависимость принимает нелинейный вид и вязкость среды начинает возрастать подобно тому, как это имеет место для дилатантных жидкостей. Такой вариант изменения вязкости сохраняется вплоть до еще одного порогового значения скорости сдвига $\dot{\gamma}_{\max}$. При таком значении модуля скорости сдвига вязкость принимает некоторое максимальное значение μ_{\max} .

Далее, при превышении модулем скорости сдвига порогового значения $\dot{\gamma}_{\max}$ реализуется третий вариант механического поведения суспензии, когда функция $|\tau|(|\dot{\gamma}|)$ остается монотонно возрастающей по нелинейному закону, но вязкость суспензии при этом начинает снижаться по мере увеличения модуля скорости сдвига. Такой режим является характерным для псевдопластических жидкостей.

Учитывая три различных варианта механического поведения сплошной среды на трех диапазонах изменения модуля скорости сдвига в [15] была рассмотрена реологическая модель, которая может быть представлена соотношением вида

$$|\tau| = \begin{cases} \tau_p + \mu_0 \cdot |\dot{\gamma}|; & 0 \leq |\dot{\gamma}| \leq \dot{\gamma}_0; \\ \tau_1 - k_1 \cdot (\dot{\gamma}_1 - |\dot{\gamma}|)^{n_1}; & \dot{\gamma}_0 < |\dot{\gamma}| \leq \dot{\gamma}_{\max}; \\ \tau_2 + k_2 \cdot (|\dot{\gamma}| - \dot{\gamma}_2)^{n_2}; & |\dot{\gamma}| > \dot{\gamma}_{\max}; \end{cases} \quad (1)$$

где τ_p , τ_1 , τ_2 , μ_0 , k_1 , k_2 , $\dot{\gamma}_0$, $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\gamma}_2$, $\dot{\gamma}_{\max}$, n_1 , n_2 , — параметры реологической модели, на которые накладываются следующие ограничения

$$\tau_2 < \tau_1; \quad 0 < \tau_p < \tau_1; \quad \dot{\gamma}_2 < \dot{\gamma}_{\max} < \dot{\gamma}_1; \quad 0 < n_1 < 1; \quad 0 < n_2 < 1. \quad (2)$$

При этом значение вязкости жидкости, соответствующее данному значению модуля ско-

рости сдвига, будем определять следующим образом

$$\mu(|\dot{\gamma}|) = \frac{d|\tau|}{d|\dot{\gamma}|}. \quad (3)$$

В рамках данной реологической модели предполагается, что функция (1) является непрерывно дифференцируемой. Поэтому, удовлетворяя условиям сопряжения для значений касательного напряжения (1) и вязкости (3) на смежных границах отдельных диапазонов изменения скорости сдвига, приходим к необходимости выполнения наряду с условиями (2) и следующих соотношений

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \frac{\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_0 \cdot \lambda}{1 - \lambda}; & k_1 &= \frac{\mu_0 (1 - \lambda)^{n_1 - 1}}{n_1 (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_0)^{n_1 - 1}}; & k_2 &= \frac{\mu_0 \cdot \lambda^{n_1 - 1}}{n_2 \cdot (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_2)^{n_2 - 1}}; \\ \tau_1 &= \tau_p + \mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0 + \frac{\mu_0 \cdot (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_0)}{n_1 \cdot (1 - \lambda)}; & \tau_2 &= \tau_{\max} - \frac{\mu_0 \cdot \lambda^{n_1 - 1}}{n_2} \cdot (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_2). \end{aligned} \quad (4)$$

В последних соотношениях (4) для краткости записи введены в рассмотрение следующие промежуточные вспомогательные параметры

$$\lambda = \left(\frac{\mu_{\max}}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{n_1 - 1}} < 1; \quad \tau_{\max} = \tau_p + \mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0 + \frac{\mu_0 \cdot (\dot{\gamma}_{\max} - \dot{\gamma}_0) \cdot (1 - \lambda^{n_1})}{n_1 \cdot (1 - \lambda)},$$

где τ_{\max} — модуль касательного напряжения в жидкости, достигаемого при $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{\max}$.

Учитывая соотношения (4), можно видеть, что реологическая модель (1) должна определяться набором восьми следующих независимых параметров: τ_p , μ_0 , μ_{\max} , $\dot{\gamma}_0$, $\dot{\gamma}_{\max}$, $\dot{\gamma}_2$, n_1 , n_2 .

Отметим следующую особенность реологической модели (1) с учетом (2), (4). Обеспечивая выполнение условия непрерывной дифференцируемости для касательного напряжения (1), в случае зависимости вязкости (3) от скорости сдвига выполняется лишь условие непрерывности. Иначе говоря, в рамках такой модели предполагается, что график зависимости вязкости от скорости сдвига, оставаясь непрерывным, допускает наличие “изломов” на границах раздела основных диапазонов изменения скорости сдвига.

3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

Рассмотрим одномерное, установившееся, ламинарное, осесимметричное, вращательное течение жидкости в окрестности неограниченного цилиндра радиуса R , который вращается с некоторой угловой скоростью под действием приложенного к нему постоянного крутящего момента M , принимаемого в расчете на единицу длины образующей этого цилиндра. Предполагается, что поведение жидкости, которой заполнено все окружающее цилиндр пространство, подчиняется реологической модели (1).

Введем цилиндрическую систему координат традиционным образом и перейдем к безразмерной форме записи исходных уравнений с учетом следующих соотношений

$$\begin{aligned} r' &= \frac{r}{R}; & u' &= \frac{u}{V_S}; & \tau'_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{\tau_0}; & \tau'_p &= \frac{\tau_p}{\tau_0}; & \tau'_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_0}; & \tau'_2 &= \frac{\tau_2}{\tau_0}; & M' &= \frac{M}{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \tau_0}; \\ \dot{\gamma}' &= \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{\max}}; & \dot{\gamma}'_0 &= \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_{\max}}; & \dot{\gamma}'_1 &= \frac{\dot{\gamma}_1}{\dot{\gamma}_{\max}}; & \dot{\gamma}'_2 &= \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_{\max}}; & k'_0 &= \frac{\mu_0 \cdot \dot{\gamma}_{\max}}{\tau_0}; \\ k'_1 &= \frac{k_1 \cdot (\dot{\gamma}_{\max})^{n_1}}{\tau_0}; & k'_2 &= \frac{k_2 \cdot (\dot{\gamma}_{\max})^{n_2}}{\tau_0}; & V_S &= R \cdot \dot{\gamma}_{\max}; & \tau_0 &= \tau_p + \mu_0 \cdot \dot{\gamma}_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $u = u(r)$ — скорость жидкости, представляющая собой функцию радиальной координаты r ; $\tau_{r\theta}$ — единственная, тождественно отличная от нуля, компонента тензора напряжений; V_S, τ_0 — характерные, принимаемые в качестве масштабных, значения скорости жидкости и касательного напряжения, соответственно.

Здесь и далее безразмерные параметры и функции отмечены верхним штрихом.

Тогда, основные уравнения, определяющие в безразмерной форме записи с учетом (5) распределение скорости в окрестности цилиндра для жидкости, поведение которой подчиняется реологической модели (1), могут быть представлены в форме

$$\frac{d}{dr'} \left(r'^2 \cdot \tau'_{r\theta} \right) = 0; \tag{6}$$

$$\tau'_{r\theta} = \begin{cases} -\tau'_p + k'_0 \cdot \dot{\gamma}' & 0 \leq -\dot{\gamma}' \leq \dot{\gamma}'_0; \\ -\tau'_1 + k'_1 \cdot (\dot{\gamma}'_1 + \dot{\gamma}')^{n_1} & \dot{\gamma}'_0 < -\dot{\gamma}' \leq 1; \\ -\tau'_2 - k'_2 \cdot (-\dot{\gamma}'_2 - \dot{\gamma}')^{n_2} & -\dot{\gamma}' > 1; \end{cases} \tag{7}$$

$$\dot{\gamma}' = r' \cdot \frac{d}{dr'} \left(\frac{u'}{r'} \right) < 0. \tag{8}$$

Принимая во внимание особенности соотношения (7), когда на различных диапазонах изменения скорости сдвига сплошная среда демонстрирует различное механическое поведение, можно предположить следующее. Структура течения, формирующегося в окрестности цилиндра, существенным образом будет зависеть от угловой скорости его вращения. В данном случае речь идет о выделении в области течения отдельных зон, внутри которых реализуется тот или иной диапазон изменения скорости сдвига и, соответственно, тот или иной вариант механического поведения. Естественно, что количество таких зон в конечном итоге должно определяться величиной крутящего момента M' .

Априори будем полагать, что модуль скорости сдвига (8) монотонно убывает по мере удаления от цилиндра. Рассмотрим тогда наиболее общий случай, когда для данного значения крутящего момента в окрестности цилиндра формируются три зоны течения. В сечении, перпендикулярном оси цилиндра, эти зоны будут, учитывая предполагаемую осевую симметрию, иметь форму колец не известных заранее радиусов $1 < R'_2 < R'_1 < R'_p$.

В зоне $1 < r' < R'_2$, непосредственно примыкающей к поверхности вращающегося цилиндра, скорость сдвига удовлетворяет условию $|\dot{\gamma}'| > 1$ и жидкость здесь будет демонстрировать псевдопластическое поведение. Следующая зона $R'_2 < r' < R'_1$ характеризуется уже дилатантным поведением и здесь для скорости сдвига выполняется условие $\dot{\gamma}'_0 < |\dot{\gamma}'| \leq 1$. Еще одна зона в форме кольца $R'_1 < r' < R'_p$ отличается тем, что жидкость в ней демонстрирует постоянное значение вязкости. Скорость сдвига в этой зоне принимает значения из диапазона $0 \leq |\dot{\gamma}'| \leq \dot{\gamma}'_0$. И, наконец, за пределами этого кольца располагается застойная зона, заполненная неподвижной жидкостью.

Граничные условия такой задачи могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned} r' = 1; \quad \dot{\tau}'_{r\theta}^{(2)} &= -M'; \\ r' = R'_2; \quad \dot{\gamma}'^{(2)} = \dot{\gamma}'^{(1)} &= -1; \quad u'^{(2)} = u'^{(1)}; \\ r' = R'_1; \quad \dot{\gamma}'^{(1)} = \dot{\gamma}'^{(0)} &= -\dot{\gamma}'_0; \quad u'^{(1)} = u'^{(0)}; \\ r' = R'_p; \quad \dot{\tau}'_{r\theta}^{(0)} &= -\tau'_p; \quad u'^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее верхние индексы в круглых скобках относят соответствующие функции к соответствующей зоне: (0) — зона с постоянным значением вязкости; (1) — зона, в которой жидкость демонстрирует дилатантное поведение; (2) — зона, в которой жидкость демонстрирует псевдопластическое поведение.

Решая тогда (6) с учетом (7), (8) и удовлетворяя представленным выше граничным условиям, приходим к следующему выражению для распределения скорости

$$u'(r') = \begin{cases} u'^{(2)}(r'); & 1 \leq r' \leq R'_2; \\ u'^{(1)}(r'); & R'_2 \leq r' \leq R'_1; \\ u'^{(0)}(r'); & R'_1 \leq r' \leq R'_p; \\ 0; & r' \geq R'_p; \end{cases} \quad (9)$$

Здесь приняты обозначения

$$u'^{(0)}(r') = \frac{\tau'_p \cdot r'}{k'_0} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{r'}{R'_p} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_p'^2}{r'^2} - 1 \right) \right\};$$

$$u'^{(1)}(r') = r' \cdot \gamma'_1 \cdot \ln \left(\frac{R'_1}{r'} \right) - r' \cdot \int_r^{R'_1} f_1(r') \cdot dr' + \frac{r' \cdot \tau'_p}{k'_0} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{R'_1}{R'_p} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_p'^2}{R_1'^2} - 1 \right) \right\};$$

$$u'^{(2)}(r') = r' \cdot \left\{ \dot{\gamma}'_2 \cdot \ln \left(\frac{R'_2}{r'} \right) + \gamma'_1 \cdot \ln \left(\frac{R'_1}{R'_2} \right) + \int_r^{R'_2} f_2(r') \cdot dr' - \right.$$

$$\left. - \int_{R'_2}^{R'_1} f_1(r') \cdot dr' + \frac{\tau'_p}{k'_0} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{R'_1}{R'_p} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_p'^2}{R_1'^2} - 1 \right) \right\} \right\};$$

$$f_1(r') = \frac{1}{r'} \cdot \left\{ \frac{1}{k'_1} \cdot \left(\tau'_1 + \frac{C}{r'^2} \right) \right\}^{\frac{1}{n_1}}; \quad f_2(r') = \frac{1}{r'} \cdot \left\{ \frac{1}{k'_2} \cdot \left(\frac{M'}{r'^2} - \tau'_2 \right) \right\}^{\frac{1}{n_2}},$$

где C — одна из констант интегрирования.

При этом радиусы границ раздела отдельных зон течения и соответствующая константа интегрирования C определяются последовательно друг через друга из выражений

$$R'_2 = \sqrt{\frac{M'}{\tau'_2 + k'_2 \cdot (1 - \dot{\gamma}'_2)^{n_2}}}; \quad C = R_2'^2 \cdot \left(-\tau'_1 + k'_1 \cdot (\dot{\gamma}'_1 - 1)^{n_1} \right);$$

$$R'_1 = \sqrt{\frac{C}{-\tau'_1 + k'_1 \cdot (\dot{\gamma}'_1 - \dot{\gamma}'_0)^{n_1}}}; \quad R'_p = R_1' \cdot \sqrt{1 + \frac{k'_0 \cdot \dot{\gamma}'_0}{\tau'_p}}.$$

Безразмерная скорость на поверхности вращающегося цилиндра, которая соответствует задаваемому значению M' , очевидно, принимает значение $V'_w = u'^{(2)}(1)$.

В качестве примера на рис. 1 представлены распределения (9) для азимутальной скорости жидкости в окрестности вращающегося цилиндра, построенные для некоторых характерных значений M' крутящего момента. Расчеты проводились для следующего набора основных независимых параметров реологической модели: $\tau_p = 75$ Па; $\mu_0 = 0.27$ Па · с; $\mu_{\max} = 3.8$ Па · с; $\dot{\gamma}_0 = 390$ с⁻¹; $\dot{\gamma}_{\max} = 910$ с⁻¹; $\dot{\gamma}_2 = 435$ с⁻¹; $n_1 = 0.14$; $n_2 = 0.43$. Такие числовые значения параметров близки к значениям соответствующих параметров некоторых суспензий [2] с рассматриваемыми особенностями реологического поведения.

Из рассмотрения представленных на рис. 1 зависимостей следует, что увеличение значений крутящего момента приводит к возрастанию скорости жидкости на границе с цилиндром и расширению всех зон, соответствующих основным закономерностям реологического поведения (зона течения с постоянной вязкостью, а также зоны псевдопластического и дилатантного поведения).

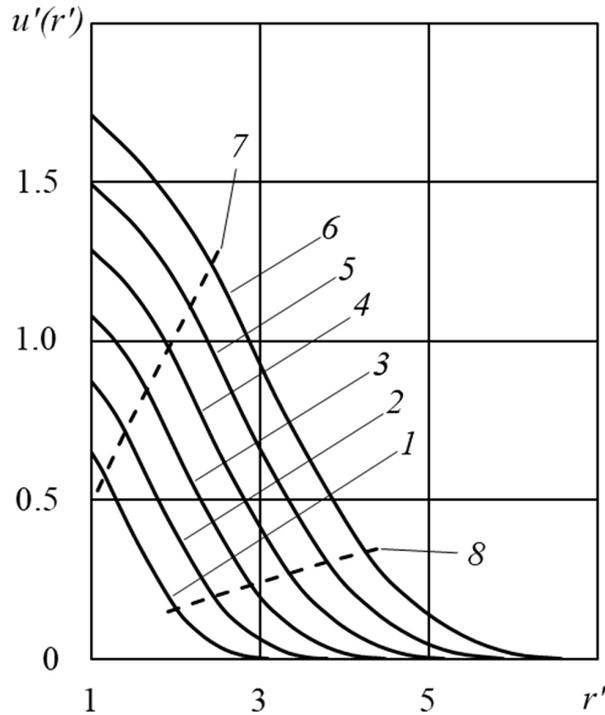


Рис. 1. Характер влияния крутящего момента на профиль распределения азимутальной скорости в зависимости от радиальной координаты. $M' = 4.0$ (1); 6.0 (2); 8.4 (3); 11.2 (4); 14.4 (5); 18.0 (6). Границы раздела зон течения: $r' = R'_2(7)$; $r' = R'_1$ (8).

При этом можно отметить, что характер кривизны профиля скорости изменяется в зависимости от диапазона изменения радиальной координаты, на котором в рамках модели (7) реализуется тот или иной вид зависимости касательного напряжения от скорости сдвига.

В завершение этого раздела подчеркнем, что рассмотренная схема с тремя зонами сдвигового течения может быть реализована лишь в случае, когда прикладываемый к цилиндру крутящий момент удовлетворяет условию $M' > \tau'_2 + k'_2 \cdot (1 - \dot{\gamma}'_2)^{n_2}$. В противном случае реализуются более простые схемы течения с одной либо двумя зонами соответствующего поведения рассматриваемой сплошной среды.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученного решения рассматриваемой задачи следует, что движение жидкости возникает лишь в непосредственной окрестности вращающегося цилиндра, внутри которой можно выделить три “вложенных” друг в друга коаксиальных цилиндрических слоя с неизвестными заранее границами. При этом в каждом слое последовательно реализуется лишь один вариант реологического поведения из трех возможных, которые были “заложены” в исходную реологическую модель. Вся же оставшаяся часть пространства, заполненного той же жидкостью, остается неподвижной, представляя собой, по сути, “застойную” зону. Такой результат можно считать вполне ожидаемым в связи с тем, что используемая реологическая модель дополнительно учитывает фактор пластичности жидкости.

С точки зрения технических приложений рабочие среды типа суспензий с достаточно сложной реологией широко используются в химической промышленности, фармакологии, производстве пищевых продуктов и других потребительских изделий. При реализации со-

ответствующих технологий переработки таких материалов постоянно возникают проблемы моделирования различных гидродинамических процессов типа экструдирования через каналы различного сечения, перемешивания в соответствующих емкостях, формования и т.д. В этой связи подход с выделением отдельных зон различного механического поведения, использованный для построения решения рассмотренной задачи (моделирование течения, инициированного вращением цилиндра в неограниченном пространстве, заполненном нелинейной вязкопластической жидкостью), может быть рекомендован для решения различных задач гидродинамики суспензий применительно и к другим схемам течения, возникающим при реализации соответствующих технологических процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвинов, В. Г. Движение нелинейно вязкой жидкости / В. Г. Литвинов. — М. : Наука, 1982. — 376 с.
2. The Effect of Rheological Parameters on the Ballistic Properties of Shear Thickening Fluid (STF) – Kevlar Composites / E. D. Wetzel, Y. S. Lee, R. G. Egres et. al. // AIP Conference Proceeding. — 2004. — V. 712. — P. 288–293.
3. Egres, R. G. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition / R. G. Egres, N. J. Wagner // Journal of Rheology. — 2005. — V. 49, iss. 3. — P. 719–746.
4. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions / A. Singh, R. Mari, M. M. Denn, J. F. Morris // J. Rheol. — 2018. — V. 62. — P. 457–468.
5. Gray, J. M. N. T. Particle segregation in dense granular flows / J. M. N. T. Gray // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2018. — V. 50. — P. 407–433.
6. Constraint-Based Approach to Granular Dispersion Rheology / B. M. Guy, J. A. Richards, D. J. M. Hodgson et. al. // Phys. Rev. Lett. — 2018. — V. 121. — P. 128001.
7. From yielding to shear jamming in a cohesive frictional suspension / A. Singh, S. Pednekar, J. Chun et. al. // Phys. Rev. Lett. — 2019. — V. 122. — P. 098004.
8. Galindo-Rosales, F. J. Numerical simulation in steady flow of non-Newtonian fluids in pipes with circular cross-section / F. J. Galindo-Rosales, F. J. Rubio-Hernandez // Numerical Simulations. — Examples and Applications in Computational Fluid Dynamics. — 2010. — P. 3–23.
9. Galindo-Rosales, F. J. An apparent viscosity function for shear thickening fluids / F. J. Galindo-Rosales, F. J. Rubio-Hernandez, A. Sevilla // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. — 2011. — V. 166 (5). — P. 321–325.
10. Kolodezhnov, V. N. Modeling of Rotational Flow between Coaxial Cylinders for a Fluid with Solidification Effect / V. N. Kolodezhnov // Fluid Dynamics. — 2014. — V. 49, № 3. — P. 299–309.
11. Vázquez-Quesada, A. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation / A. Vázquez-Quesada, N. J. Wagner, M. Ellero // Physics of Fluids. — 2017. — V. 29, 103104. — P. 1–10.
12. Колодежнов, В. Н. Течение в цилиндрическом канале нелинейной вязкопластической жидкости / В. Н. Колодежнов, А. С. Веретенников // Труды МАИ. — 2022. — № 125. — С. 1–34.
13. Скульский, О. И. Реометрические течения концентрированных суспензий твердых частиц / О. И. Скульский // Вычислительная механика сплошных сред. — 2020. — Т. 13, № 3. — С. 269–278.
14. Скульский, О. И. Особенности течения концентрированных суспензий твердых частиц / О. И. Скульский // Вычислительная механика сплошных сред. — 2021. — Т. 14, № 2. — С. 210–219.

REFERENCES

1. Litvinov W.G. Motion of a non-linearly viscous fluid. [Litvinov W.G. Dvizhenie nelinejno vjazkoy zhidkosti]. Moskva: Nauka, 1982, 376 p.
2. Wetzel E.D., Lee Y.S., Egres R.G., Kirkwood J.E., Wagner N.J. The Effect of Rheological Parameters on the Ballistic Properties of Shear Thickening Fluid (STF) – Kevlar Composites. AIP Conference Proceeding, 2004, vol. 712, pp. 288–293.
3. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition. *Journal of Rheology*, 2005, vol. 49, iss. 3, pp. 719–746.
4. Singh A., Mari R., Denn M.M., Morris J.F. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions. *Journal of Rheology*, 2018, vol. 62, pp. 457–468.
5. Gray J.M.N.T. Particle segregation in dense granular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2018, vol. 50, pp. 407–433.
6. Guy B.M., Richards J.A., Hodgson D.J.M., Blanco E., Poon W.C.K. Constraint-Based Approach to Granular Dispersion Rheology. *Phys. Rev. Lett.*, 2018, vol. 121, p. 128001.
7. Singh A., Pednekar S., Chun J., Denn M.M., Morris J.F.. From yielding to shear jamming in a cohesive frictional suspension. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, vol. 122, p. 098004.
8. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J. Numerical simulation in steady flow of non-Newtonian fluids in pipes with circular cross-section. *Numerical Simulations – Examples and Applications in Computational Fluid Dynamics*, 2010, pp. 3–23.
9. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J., Sevilla A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, vol. 166 (5), pp. 321–325.
10. Kolodezhnov V.N. Modeling of Rotational Flow between Coaxial Cylinders for a Fluid with Solidification Effect. *Fluid Dynamics*. 2014, vol. 49, no. 3, pp. 299–309.
11. Vázquez-Quesada A., Wagner N. J., Ellero M. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation. *Physics of Fluids*, 2017, vol. 29, 103104, pp. 1–10.
12. Kolodezhnov V.N., Beretennikov A.S. Flow in a cylindrical channel of a nonlinear viscoplastic fluid. [Kolodezhnov V.N., Beretennikov A.S. Tечение v tsilindricheskom ranale nelineynoy vjazkoplasticheskoy zhidkosti]. *Trudy MAI – Proceedings of the Moscow Aviation Institute*, 2022, no. 125, pp. 1–34.
13. Skulskij O.I. Rheometric flows of concentrated suspensions of solid particles. [Skulskij O.I. Reometricheskie techenija koncentrirovannyh suspenzij tverdyh chastits]. *Vychislitel'nyj mehanika sploshnyh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 269–278.
14. Skulskij O.I. Features of the flow of concentrated suspensions of solid particles. [Skulskij O.I. Osobennosti techenija koncentrirovannyh suspenzij tverdyh chastits]. *Vychislitel'nyj mehanika sploshnyh sred – Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, no. 2, pp. 210–219.

Колодежнов Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”, Воронеж, Россия
E-mail: kvn117@mail.ru

Kolodezhnov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Military Educational and Scientific Center of the Air Force “Air Force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia
E-mail: kvn117@mail.ru