УДК 519.61

ЧИСЛЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

Л. И. Еникеева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2022 г.

Аннотация. Рассматривается разностный оператор $(Ax)_n = x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$ с матричными коэффициентами a_1 и a_2. Предполагается, что оператор обратим в пространстве $l_p\left(\mathrm{Z},\mathrm{C}^d\right)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Предложен алгоритм численного нахождения обратного.

Ключевые слова: разностное уравнение, разностный оператор, задача об ограниченных решениях, матричный пучок, некорректная задача.

NUMERICAL INVERSION OF DIFFERENCE OPERATOR

L. I. Enikeeva

Abstract. The difference operator$(Ax)_n = x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$with matrix coefficients a_1 and a_2 is considered. It is assumed that the operator is invertible in the space $l_p\left(\mathrm{Z},\mathrm{C}^d\right)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. An algorithm for approximate calculation of the inverse operator is offered.

Keywords: difference equation, difference operator, bounded solutions problem, matrix pencil, ill-posed problem.

ВВЕДЕНИЕ

Разностные уравнения и операторы изучаются давно и имеют многочисленные приложения [1, 2, 7]. Настоящая статья посвящена разностному оператору $(Ax)_n = x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$ с матричными коэффициентами a_1 и a_2 размера $d \times d$. Оператор A рассматривается в пространстве $l_p\left(\mathrm{Z},\mathrm{C}^d\right)$. Обратимость этого оператора равносильна однозначной разрешимости задачи об ограниченных решениях. Условия обратимости хорошо известны [9, теорема 4.5.7]. Построение обратного оператора сводится к представлению характеристической функции $\psi(z) = \left[I + a_1z + a_2z^2\right]^{-1}$ в виде степенного ряда $\psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_kz^k$, $|z| = 1$. Предлагается численный алгоритм решения этой задачи, состоящий в вычислении не более, чем $2d$ вычетов матричнозначной функции ψ. Поскольку нахождение вычетов является некорректной задачей [8], точность ответа получается существенно ниже точности, с которой проводятся вычисления.

1. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $d \in \mathrm{N}$. Пространство $l_p = l_p\left(\mathrm{Z},\mathrm{C}^d\right)$, $1 \leqslant p < \infty$, состоит из двусторонних последовательностей $x = \left\{x_n \in \mathrm{C}^d : n \in \mathrm{Z}\right\}$, для которых сумма $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^p}$ конечна. Пространство $l_\infty = l_\infty\left(\mathrm{Z},\mathrm{C}^d\right)$ состоит из ограниченных последовательностей с нормой $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathrm{Z}\}$. Хорошо известно, что пространства l_p банаховы.

Пусть $a_k \in \mathrm{C}^{d\times d}$, $k \in \mathrm{Z}$, причем $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \|a_k\| < \infty$. Тогда оператор

$$(Ax)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_kx_{n-k} \tag{1}$$

действует в $l_p = l_p\left(\mathrm{Z},\mathrm{C}^d\right)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и ограничен [9, предложение 1.6.8, следствие 4.4.10]. Обозначим через s множество всех операторов A такого вида. Положим

$$[\![A]\!] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|a_k\|.$$

Нетрудно видеть, что $\|A\| \leqslant [\![A]\!]$.

Пусть оператор $A \in s$ задается формулой (1). *Характеристической функцией* [7] оператора A или *матричным пучком* [6], порожденным A, называют функцию

$$\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad |z| = 1.$$

Следующее предложение доказывается прямыми вычислениями.

Предложение 1. *Пусть операторы $A,B \in s$ имеют вид*

$$(Ax)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k x_{n-k}, \quad (Bx)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k x_{n-k}.$$

Тогда оператор $E = AB$ также принадлежит s, т. е. $(Ex)_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e_k x_{n-k}$ *и*

$$e_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i b_{k-i}. \tag{2}$$

Более того, характеристические функции

$$\varphi(z) = \sum\nolimits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum\nolimits_{k=-\infty}^{+\infty} b_k z^k, \quad \chi(z) = \sum\nolimits_{k=-\infty}^{+\infty} e_k z^k$$

связаны соотношением $\chi(z) = \varphi(z)\,\psi(z)$ при $|z| = 1$.

Относительно свертки и нормы $[\![\cdot]\!]$ множество s образует наполненную банахову алгебру, см. [4, 9].

Следствие 2. *Пусть оператор $A \in s$ обратим в $l_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда характеристическая функция ψ оператора A^{-1} задается формулой.*

$$\psi(z) = [\varphi(z)]^{-1}, \quad |z| = 1.$$

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

В настоящей статье рассматривается оператор $A \in s$, задаваемый формулой $(Ax)_n = x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$ и имеющий характеристическую функцию

$$\varphi(z) = I + a_1 z + a_2 z^2, \tag{3}$$

где a_1, a_2 — произвольные матрицы размера $d \times d$, а I — единичная матрица размера $d \times d$. В силу следствия 2 обратный оператор A^{-1} имеет характеристическую функцию $\psi(z) = [\varphi(z)]^{-1}$.

Числа $z \in \mathrm{C}$, для которых матрица $\varphi(z)$ необратима, называют собственными значениями пучка φ. Очевидно, собственные значения пучка совпадают с корнями *характеристического уравнения* $\det\varphi(z) = 0$.

Собственное значение пучка называют *простым*, если оно является корнем кратности один характеристического уравнения. Для упрощения изложения будем предполагать, что все собственные значения являются простыми.

Различные варианты следующего предложения хорошо известны, см., например, [6, лемма 12.2].

Предложение 3. *Множество собственных значений пучка*

$$\varphi_{\text{inv}}(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda a_1 + a_2$$

совпадает с множеством собственных значений матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in \mathrm{C}$ принадлежит спектру матрицы A. Это значит, что матрица

$$\begin{pmatrix} -\lambda I & I \\ -a_2 & -a_1 - \lambda I \end{pmatrix}$$

не имеет обратной. Очевидно, в этом случае существует такой ненулевой столбец $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, где $h_1, h_2 \in \mathrm{C}^d$, что

$$\begin{pmatrix} -\lambda I & I \\ -a_2 & -a_1 - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Распишем это равенство подробно:

$$-\lambda I h_1 + I h_2 = 0,$$

$$-a_2 h_1 - (a_1 + \lambda I) h_2 = 0.$$

(Отметим, что из первого уравнения видно, что $h_1 \neq 0$.) Выражая из первого уравнения h_2 через h_1 и подставляя во второе, получаем $-a_2 h_1 - (a_1 + \lambda I) \lambda h_1 = 0$ или $\left(a_2 + a_1 \lambda + \lambda^2 I\right) h_1 = 0$. Поскольку $h_1 \neq 0$, отсюда следует, что матрица $\varphi_{\text{inv}}(\lambda)$ не имеет обратной.

В обратную сторону. Предположим, что матрица $\varphi_{\text{inv}}(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda a_1 + a_2$ не имеет обратной. Это значит, что $\left(\lambda^2 I + \lambda a_1 + a_2\right) h_1 = 0$ для некоторого вектора $h_1 \neq 0$.Положим $h_2 = \lambda h_1$. Далее имеем

$$\begin{pmatrix} -\lambda I & I \\ -a_2 & -a_1 - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda I h_1 + I h_2 \\ -a_2 h_1 - (a_1 + \lambda I) h_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь первая координата $-\lambda I h_1 + I h_2$ равна нулю в силу определения h_2. Подставляя во вторую координату определение h_2, получаем

$$-a_2 h_1 - (a_1 + \lambda I) h_2 = -a_2 h_1 - (a_1 + \lambda I) \lambda h_1 = \left(\lambda^2 I + \lambda a_1 + a_2\right) h_1 = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая матрица не имеет обратной.

В дальнейшем будем предполагать, что матрица a_2 обратима.

Следствие 4. *Собственные значения пучка* $\varphi(z) = I + a_1 z + a_2 z^2$ *совпадают с числами* $z = 1/\lambda$, *где* λ — *ненулевые собственные значения пучка*

$$\varphi_{\text{inv}}(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda a_1 + a_2.$$

Доказательство. Для $z \neq 0$ и $\lambda \neq 0$ утверждение очевидно. Число $z = 0$, очевидно, не является собственным значением. Но $\lambda = 0$ является собственным значением только при условии, что матрица a_2 необратима. По этой причине нулевые собственные значения λ мы исключаем из рассмотрения.

Предложение 5. *Если все собственные значения пучка φ являются простыми, то функцию $\psi(z) = [\varphi(z)]^{-1}$ можно представить в виде*

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{h-l} f_j z^j + \sum_{k=1}^{l} \frac{c_k}{z - z_k},$$

где c_k — некоторые матрицы размера $d \times d$, z_k — собственные значения пучка φ, $l \leqslant 2d$, $h \leqslant 2d-2$ (если $h < l$, то первая сумма отсутствует).

Доказательство. Перепишем матрицу $\varphi(z)$ в следующем виде:

$$\varphi(z) = I + a_1 z + a_2 z^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^{(11)} & a_1^{(12)} & \dots & a_1^{(1d)} \\ a_1^{(21)} & a_1^{(22)} & \dots & a_1^{(2d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(d1)} & a_1^{(d2)} & \dots & a_1^{(dd)} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} a_2^{(11)} & a_2^{(12)} & \dots & a_2^{(1d)} \\ a_2^{(21)} & a_2^{(22)} & \dots & a_2^{(2d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{(d1)} & a_2^{(d2)} & \dots & a_2^{(dd)} \end{pmatrix} z^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 + a_1^{(11)} z + a_2^{(11)} z^2 & a_1^{(12)} z + a_2^{(12)} z^2 & \dots & a_1^{(1d)} z + a_2^{(1d)} z^2 \\ a_1^{(21)} z + a_2^{(21)} z^2 & 1 + a_1^{(22)} z + a_2^{(22)} z^2 & \dots & a_1^{(2d)} z + a_2^{(2d)} z^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(d1)} z + a_2^{(d1)} z^2 & a_1^{(d2)} z + a_2^{(d2)} z^2 & \dots & 1 + a_1^{(dd)} z + a_2^{(dd)} z^2 \end{pmatrix},$$

где $a_1^{(ij)}$ — элементы матрицы a_1, а $a_2^{(ij)}$ — элементы матрицы a_2. Будем искать обратную матрицу $\psi(z)$ методом присоединенной матрицы [3, с. 128]. Имеем

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} 1 + a_1^{(11)} z + a_2^{(11)} z^2 & a_1^{(12)} z + a_2^{(12)} z^2 & \dots & a_1^{(1d)} z + a_2^{(1d)} z^2 \\ a_1^{(21)} z + a_2^{(21)} z^2 & 1 + a_1^{(22)} z + a_2^{(22)} z^2 & \dots & a_1^{(2d)} z + a_2^{(2d)} z^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(d1)} z + a_2^{(d1)} z^2 & a_1^{(d2)} z + a_2^{(d2)} z^2 & \dots & 1 + a_1^{(dd)} z + a_2^{(dd)} z^2 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\det \varphi(z)} \begin{pmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) & \dots & A_{1d}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) & \dots & A_{2d}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1}(z) & A_{d2}(z) & \dots & A_{dd}(z) \end{pmatrix},$$

где $A_{ij}(z)$ — алгебраические дополнения, являющиеся многочленами от z. Обозначим наибольшую из степеней $A_{ij}(z)$ через h. Разделим матрицу алгебраических дополнений поэлементно на определитель матрицы $\varphi(z)$, равный $\det \varphi(z) = w \prod\limits_{k=1}^{l} (z - z_k)$. Здесь $l \leqslant 2d$ — степень многочлена $z \mapsto \det \varphi(z)$, а w — коэффициент перед старшей степенью z. (Нетрудно видеть, что если матрица a_2 обратима, то $l = 2d$.) В результате деления получим

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}(z)}{w \prod_{k=1}^{l}(z-z_k)} & \frac{A_{12}(z)}{w \prod_{k=1}^{l}(z-z_k)} & \dots & \frac{A_{1d}(z)}{w \prod_{k=1}^{l}(z-z_k)} \\ \frac{A_{21}(z)}{w \prod_{k=1}^{l}(z-z_k)} & \frac{A_{22}(z)}{w \prod_{k=1}^{l}(z-z_k)} & \dots & \frac{A_{2d}(z)}{w \prod_{k=1}^{l}(z-z_k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{d1}(z)}{w \prod_{k=1}^{l}(z-z_k)} & \frac{A_{d2}(z)}{w \prod_{k=1}^{l}(z-z_k)} & \dots & \frac{A_{dd}(z)}{w \prod_{k=1}^{l}(z-z_k)} \end{pmatrix}.$$

Далее, раскладывая каждый элемент матрицы $\psi(z)$, представляющий собой рациональную функцию, в сумму многочлена и простейших элементарных дробей, получаем

$$\frac{A_{ij}(z)}{w\prod_{k=1}^{l}(z-z_k)}=\sum_{k=0}^{h-l}f_k^{(ij)}z^k+\sum_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(ij)}}{z-z_k},$$

где $f_k^{(ij)}$, $c_k^{(ij)}$ — некоторые числовые коэффициенты (появление $f_k^{(ij)}$ возможно только, если a_2 необратима), h — наибольшая из степеней многочленов $A_{ij}(z)$, $\quad h\leqslant 2d-2$. Если раскладываемая дробь неправильная (или, что то же самое, $h\geqslant l$), возникают слагаемые первого вида, в противном же случае в разложении присутствуют слагаемые только второго вида. Таким образом, для $\psi(z)$ приходим к представлению

$$\psi(z)=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{h-l}f_k^{(11)}z^k+\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(11)}}{z-z_k} & \sum\limits_{k=0}^{h-l}f_k^{(12)}z^k+\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(12)}}{z-z_k} & \dots & \sum\limits_{k=0}^{h-l}f_k^{(1d)}z^k+\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(1d)}}{z-z_k} \\ \sum\limits_{k=0}^{h-l}f_k^{(21)}z^k+\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(21)}}{z-z_k} & \sum\limits_{k=0}^{h-l}f_k^{(22)}z^k+\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(22)}}{z-z_k} & \dots & \sum\limits_{k=0}^{h-l}f_k^{(2d)}z^k+\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(2d)}}{z-z_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{h-l}f_k^{(d1)}z^k+\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(d1)}}{z-z_k} & \sum\limits_{k=0}^{h-l}f_k^{(d2)}z^k+\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(d2)}}{z-z_k} & \dots & \sum\limits_{k=0}^{h-l}f_k^{(dd)}z^k+\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{c_k^{(dd)}}{z-z_k} \end{pmatrix}=$$
$$=\sum_{k=0}^{h-l}f_kz^k+\sum_{k=1}^{l}\frac{c_k}{z-z_k},$$

где

$$f_k=\begin{pmatrix} f_k^{(11)} & f_k^{(12)} & \dots & f_k^{(1d)} \\ f_k^{(21)} & f_k^{(22)} & \dots & f_k^{(2d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k^{(d1)} & f_k^{(d2)} & \dots & f_k^{(dd)} \end{pmatrix},\quad c_k=\begin{pmatrix} c_k^{(11)} & c_k^{(12)} & \dots & c_k^{(1d)} \\ c_k^{(21)} & c_k^{(22)} & \dots & c_k^{(2d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k^{(d1)} & c_k^{(d2)} & \dots & c_k^{(dd)} \end{pmatrix}.$$

3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрим оператор $A:l_p\to l_p$, заданный формулой $(Ax)_n=x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$. Ему соответствует характеристическая функция (3). Задача состоит в нахождении явной формулы, определяющей обратный оператор. Для того чтобы получить представление для обратного оператора $B=A^{-1}$, отвечающего характеристической функции $\psi(z)=[\varphi(z)]^{-1}$, приведем ψ к виду $\psi(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_kz^k$, где b_k — —некоторые матрицы размера $d\times d$. Чтобы найти b_k, воспользуемся предложением 5 и произведем следующие преобразования. Разложим $\psi(z)$ в степенной ряд на единичной окружности:

$$\psi(z)=\sum_{i=0}^{h-l}f_iz^i+\sum_{k=1}^{l}\frac{c_k}{z-z_k}=\sum_{i=0}^{h-l}f_iz^i+\sum_{k=1}^{l}c_k\begin{cases}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z_k^j}{z^{j+1}} \text{ при } |z_k|<1,\\ \sum_{j=0}^{+\infty}-\frac{z^j}{z_k^{j+1}} \text{ при } |z_k|>1\end{cases}=$$
$$=\sum_{i=0}^{h-l}f_iz^i+\sum_{k=1}^{l}c_k\begin{cases}\sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{z_k^{-j-1}}{z^{-j}} \text{ при } |z_k|<1,\\ -\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z^j}{z_k^{j+1}} \text{ при } |z_k|>1\end{cases}=$$
$$=\sum_{i=0}^{h-l}f_iz^i+\sum_{k=1}^{l}c_k\begin{cases}\sum_{j=-\infty}^{-1}z_k^{-j-1}z^j \text{ при } |z_k|<1,\\ -\sum_{j=0}^{+\infty}z_k^{-j-1}z^j \text{ при } |z_k|>1.\end{cases}$$

На единичной окружности ряды, стоящие после фигурных скобок, абсолютно сходятся;

это позволяет внести c_k под знак внутренней суммы и поменять порядок суммирования:

$$\psi\left(z\right)=\sum_{i=0}^{h-l}f_iz^i+\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{k=1}^{l}c_kz_k^{-j-1}z^j \text{ при } |z_k|<1,\\ -\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{l}c_kz_k^{-j-1}z^j \text{ при } |z_k|>1.\end{array}\right.$$

Отсюда находим коэффициент b_j, стоящий перед z^j:

$$b_j=g_j+\left\{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{l}c_kz_k^{-j-1} \text{ при } |z_k|<1,\ j<0,\\ -\sum_{k=1}^{l}c_kz_k^{-j-1} \text{ при } |z_k|>1,\ j\geqslant 0,\end{array}\right. \tag{4}$$

где

$$g_j=\left\{\begin{array}{l}f_j, \text{ если } j\leqslant h-l \text{ и } j\geqslant 0,\\ 0, \text{ если } j>h-l \text{ или } j<0.\end{array}\right.$$

Итак, оператор A^{-1} имеет вид

$$\left(A^{-1}x\right)_n=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_kx_{n-k}.$$

Выражение для b_j из формулы (4) содержит неизвестные матрицы c_k. Основная идея работы заключается в вычислении c_k по формуле, представляющей собой правило нахождения вычетов в полюсе первого порядка: $c_k=\lim\limits_{z\to z_k}\psi\left(z\right)\left(z-z_k\right)$. Задача вычисления такого предела является некорректной в смысле А. Н. Тихонова [8]. В связи с этим предел заменим приближенным значением $c_k\approx\left[\varphi\left(z_k+\varepsilon\right)\right]^{-1}\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — маленькое число. Численные эксперименты показывают, что оптимальным является $\varepsilon=10^{-8}$, см. ниже.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В проводившихся численных экспериментах брались матрицы a_1 и a_2 со случайными элементами, распределенными равномерно в интервале $(-1;1)$. Собственные значения z_k пучка φ вычислялись в соответствии с предложением 3 и следствием 4. Наконец, по формуле (4) вычислялись коэффициенты b_j оператора A^{-1}, обратного к оператору A. Заметим, что так как матрицы a_1 и a_2 брались случайными, в ходе вычислений эти матрицы и оператор A всегда оказывались обратимыми. В этом случае для вычисления b_j по формуле (4) не требовалось искать матрицы f_j, поскольку определитель $\det\varphi\left(z\right)$ являлся многочленом степени ровно $2d$, и рациональная функция разлагалась в сумму только простейших рациональных дробей. Проводилась проверка путем умножения полученного обратного оператора A^{-1} на исходный оператор A в соответствии с предложением 1.

Бралось по несколько пар матриц a_1 и a_2 размеров 10×10, 20×20, 50×50, 100×100. Для каждой пары a_1 и a_2 проводились вычисления с ε, равными 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8} и 10^{-9}. Вычислялось несколько коэффициентов e_k оператора $E=AB$, определяемых формулой (2). В качестве *точности* результата использовалось наибольшее из чисел $\|e_0-I\|$, $\|e_k\|$. Наилучшая точность обычно достигалась при $\varepsilon=10^{-8}$, но для матриц размера 100×100 иногда оптимальным оказывалось $\varepsilon=10^{-7}$; при этом для размера 10×10 сама точность (т. е. наибольшее из чисел $\|e_0-I\|$, $\|e_k\|$) равна 10^{-6}, для размера 20×20 точность равна $3\cdot10^{-6}$, для размера 50×50 точность равна $2\cdot10^{-5}$ и для размера 100×100 точность равна 10^{-4}.

Вычисления проводились с использованием пакета “Математика” [5, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, № 1 (409). — С. 77—128.

2. Курант, Р. О разностных уравнениях математической физики / Р. Курант, К. О. Фридрихс, Г. Леви // Успехи математических наук. — 1941. — № 8. — С. 125–160.

3. Курбатов, В. Г. Алгебра / В. Г. Курбатов. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — 604 с.

4. Курбатов, В. Г. Основы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж : Научная книга, 2015. — 122 с.

5. Курбатов, В. Г. Пакет "Математика" в прикладных научных исследованиях / В. Г. Курбатов, В. Е. Чернов. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. — 240 с.

6. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. — Кишинев : Штиинца, 1986. — 260 с.

7. Романко, В. К. Разностные уравнения / В. К. Романко. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 115 с.

8. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 2022. — 288 с.

9. Kurbatov, V. G. Functional differential operators and equations / V. G. Kurbatov. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. — V. 473 of Mathematics and its Applications. — xx+433 p.

10. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. — New York : Wolfram Media, 2003. — 1488 p.

REFERENCES

1. Baskakov, A. G. Investigation of linear differential equations by the methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovanie linejnyh differencial'nyh uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyh operatorov i linejnyh otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1 (409), pp. 77–128.

2. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. On difference equations of mathematical physics. [Kurant R., Fridrihs K.O., Levi G. O raznostnyh uravneniyah matematicheskoj fiziki]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1941, no. 8, pp. 125–160.

3. Kurbatov V.G. Algebra. [Kurbatov V.G. Algebra]. Voronezh: VGU Publishing House, 2022, 604 p.

4. Kurbatov V.G., Kurbatova V.I. The foundation of spectral theory. [Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Osnovy spektral'noj teorii]. Voronezh: Nauchnaya Kniga, 2015, 122 p.
5. Kurbatov V.G., Chernov W.E. 'Mathematica' package in applied scientific researches. [Kurbatov V.G., CHernov V.E. Paket "Matematika" v prikladnyh nauchnyh issledovaniyah]. Voronezh: VGU Publishing House, 2016, 240 p.

6. Markus A.S. Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils. [Markus A.S. Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nyh operatornyh puchkov]. Chisinau: Shtiintsa, 1986, 260 p.

7. Romanko V.K. Difference equations. [Romanko V.K. Raznostnye uravneniya]. Moscow: Laboratoriya Znanii, 2020, 115 p.

8. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solutions of ill-posed problems. [Tihonov A.N., Arsenin V.YA. Metody resheniya nekorrektnyh zadach]. Moscow: Nauka, 2022, 288 p.

9. Kurbatov V.G. Functional differential operators and equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999, vol. 473 of Mathematics and its Applications, xx+433 p.
10. Wolfram S. The Mathematica book. New York: Wolfram Media, 2003, 1488 p.

Еникеева Лада Ильясовна, студент кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: enikeeva_li@list.ru

Enikeeva Lada Il'yasovna, Student, Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: enikeeva_li@list.ru