УДК 511.84

О ДВУХ ВАРИАНТАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ

Ю. А. Гладышев[1], **Е. А. Лошкарева**[1], **Е. Н. Малышев**[2]

[1] — *Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского;*
[2] — *Калужский филиал ФГБОУ ВО “Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана”*

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Аннотация. Рассмотрены основные этапы развития метода обобщенных степеней как общего метода построения решений линейных дифференциальных систем уравнений. Представлены общие сведения о методе обобщенных степеней. Предложены два варианта решения рассматриваемой задачи. Первый метод базируется на матричном аппарате и технике операторов. Во втором параметрическом методе используется особые независимые переменные, не входящие в уравнение в явном виде.

Ключевые слова: обобщенные степени, матрицы, оператор, дифференциальные уравнения, системы дифференциальных уравнений.

ON TWO REPRESENTATIONS OF THE GENERALISED POWERS METHOD

Yu. A. Gladyshev, E. A. Loshkareva, E. N. Malyshev

Abstract. The main stages in the development of the method of generalised powers as a general method for constructing solutions of linear differential equation systems are considered. General information on the method of generalized powers is presented. Two variants of solution to the problem in question are proposed. The first method is based on the matrix apparatus and operator technique. The second parametric method uses special independent variables which are not explicitly part of the equation.

Keywords: generalized powers, matrices, operator, differential equations, systems of differential equations.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие обобщенной степени (ОС) было введено Л. Берсом [1] при построении последовательности базисных решений υ_1,υ_2системы дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} - b_2\left(x_2\right)\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} = 0 \\ b_1\left(x_2\right)\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1} = 0 \end{array}\right\}, \tag{1}$$

где $\upsilon_1\left(x_1,x_2\right),\upsilon_2\left(x_1,x_2\right)$ функции переменных x_1,x_2, а $b_1\left(x_2\right),b_2\left(x_2\right)$ положительные, непрерывные функции от x_2. Очевидно, что система (1) является обобщением известной в теории функций комплексного переменного системы Коши-Римана. Берс определяет ОС как функции $Y^{(n)}\left(y,y_0\right),Y\left(y,y_0\right)$, заданные системой рекуррентных соотношений

$$\bar{Y}^{(n)}\left(y,y_0\right)C = n\int\limits_{y_0}^{y} Y^{(n-1)}\left(s,y_0\right)\frac{ds}{b_2\left(s\right)}, \tag{2}$$

$$Y^{(n)}\left(y{,}y_0\right)C = n\int\limits_{y_0}^{y}\bar{Y}^{(n-1)}\left(s{,}y_0\right)\frac{ds}{b_1\left(s\right)}. \tag{3}$$

Функция, названная Л. Берсом обобщенной степенью (ОС), была введена для упрощения записи выражения базисных функций, полученных путем многократного интегрирования [1]. Далее им были изучены основные свойства этой конструкции [2]. Эти свойства приведены в монографии [3].

Если ввести матрицы $D\left(1\right){,}D\left(2\right)$ и вектор- столбец V, заданные следующим образом

$$D\left(1\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad D\left(2\right) = \begin{pmatrix} 0 & -b_2\left(x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \\ b_1\left(x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

то систему (1) запишем

$$D\left(1\right)V - D\left(2\right)V = 0, \tag{5}$$

и примем

$$D = \frac{1}{2}\left(D\left(1\right) + D\left(2\right)\right).$$

Как отмечает Берс в [2], система (1) определяет существование двух криволинейных интегралов, не зависящих от пути интегрирования и определяющих две новые функции $\upsilon_1'{,}\upsilon_2'$. В свою очередь эти функции удовлетворяют системе (1). Введенная операция была названа сигма-интегрированием. Была введена левая обратная операция сигма-дифференцирование. Операции сигма-интегрирования были использованы для построения последовательности базисных решений системы (1). Для сокращенной записи этих решений Берс ввел многократные интегралы, которые и были названы ОС.

Берс рассмотрел систему

$$\left.\begin{array}{l} a_1\left(x_1\right)\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1} - b_2\left(x_2\right)\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2} = 0 \\ b_1\left(x_2\right)\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2} + a_2\left(x_1\right)\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1} = 0 \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Если ввести операторы

$$D\left(1\right) = \begin{pmatrix} a_1\left(x_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & a_2\left(x_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad D\left(2\right) = \begin{pmatrix} 0 & -b_2\left(x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \\ b_1\left(x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

то система (6) будет иметь вид (5).

Система (6) дает возможность построить два криволинейных интеграла, но функции $\upsilon_1'{,}\upsilon_2'$, которые они определяют, не дают решение системы (6). Однако Л. Берс указал, что они являются решением новой системы, которую он назвал присоединенной и которая имеет структуру аналогичную (6). Повторное применение операции сигма-интегрирования возвращает к решению системы (1). Таким образом, операция сигма-интегрирования была замкнута и повторное сигма-интегрирование позволяет построить последовательность базисных решений системы (6). Проведенный в [3] переход к матричным схемам показал, что эта особенность метода связана с условием коммутации операторов $D\left(1\right){,}D\left(2\right)$, что необходимо для построения ОС. Это свойство также потребовалось при переходе к большому числу независимых переменных.

Последовательность функций, обозначенная как $X^{(n)}C$, где

$$DC = 0, \tag{8}$$

и удовлетворяющая соотношению

$$DX^{(n)}C = nX^{(n)}C, \tag{9}$$

назовем системой обобщенных степеней с коэффициентом С.

Однако это определение дает для $X^{(n)}C$ неоднозначный результат, а именно, ОС определена с точностью до элемента C' из ядра D

$$X^{(n)'}C = X^{(n)}C + C'. \tag{10}$$

Это сближает определение с понятием неопределенного интеграла. Чтобы сделать ситуацию более определенной предположим, что оператор D имеет правый обратный

$$DI = 1, \tag{11}$$

и примем

$$X^{(n)} = n!I^nC. \tag{12}$$

Очевидно, что (12) удовлетворяет (9).

Нетрудно установить, что, если операторы (4) коммутируют, а (7) не коммутируют. Однако, как это показано в [3], можно на основе операторов (7) путем удвоения размерности предложить коммутирующую пару $D'(1), D'(2)$. Это определенное алгебраическое выражение факта необходимости присоединенной системы. Возможно это имеет и физический аспект, поскольку условие коммутации операторов важны в квантовой механике.

Так же укажем общее определение ОС по Берсу [4]. Пусть дан оператор D, действующий в функциональном пространстве L и имеющий правый обратный I, так что $DI = 1$. Считаем, что ядро оператора D имеет хотя бы один отличный от нуля элемент, $DC = 0$. Серией ОС с коэффициентом C назовем последовательность функций

$$X^{(n)} = n!I^nC.$$

По определению имеем

$$DX^{(n)}C = nX^{(n-1)}C.$$

Приведем выражение для ОС по Берсу

$$X^{(n)}(x,x_0)\,C = n!\begin{cases} (I_1I_2)^i, n = 2i, \\ I\,(I_2I_1)^i, n = 2i+1. \end{cases}$$

1. МАТРИЧНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ОС

ОС являются хорошим математическим аппаратом для решения многих задач математической физики. Примеры использования матричного варианта метода ОС изложены в работах [5-9] и позволяет решать различные вопросы теории переноса, уравнения Дирака для свободной частицы.

Проведем построение решений системы (1) первоначально матричным вариантом метода ОС. С этой целью выбираем операторы, правые обратные к $D(1), D(2)$ в виде

$$I_1(x_1,x_{10}) = \begin{pmatrix} \int\limits_{x_{10}}^{x_1} d\eta \ldots & 0 \\ 0 & \int\limits_{x_{10}}^{x_1} d\eta \ldots \end{pmatrix}, \quad I_2(x_2,x_{20}) = \begin{pmatrix} 0 & -\int\limits_{x_{20}}^{x_2} d\eta \frac{1}{b_1(\eta)} \ldots \\ \int\limits_{x_{20}}^{x_2} d\eta \frac{1}{b_2(\eta)} \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Введем следующее определение.

Определение 1. Назовем выражение в виде вектор-столбца

$$X^{(p_1)}(1)\,X^{(p_2)}(2)\,C = p_1!p_2!I^{p_1}(1)\,I^{p_2}(2)\,C \tag{15}$$

бинарной обобщенной степенью порядка p_1,p_2 с коэффициентом C.

Основное свойство обобщенной степени состоит в правилах применения операторов $D(1),D(2)$

$$D(1)\,X^{(p_1)}(1)\,X^{(p_2)}(2)\,C = p_1X^{(p_1-1)}(1)\,X^{(p_2)}(2)\,C, \tag{16}$$

$$D(2)\,X^{(p_1)}(1)\,X^{(p_2)}(2)\,C = p_2X^{(p_1)}(1)\,X^{(p_2-1)}(2)\,C. \tag{17}$$

Справедливость этих правил следует из определения ОС (15).

Введем так называемые симметризованные операторы $D_S,\bar{D}_S$

$$D_S = D(1) + D(2)\,, \bar{D}_S = D(1) - D(2)\,. \tag{18}$$

В силу коммутации $D(1),D(2)$

$$D_S\bar{D}_S = \bar{D}_SD_S = D^2(1) - D^2(2)\,. \tag{19}$$

Или в развернутом виде

$$D_S\bar{D}_S = \begin{pmatrix} D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}D_{11} - D_{21}D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{22}D_{11} - D_{12}D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11}D_{22} - D_{21}D_{12} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Это приводит к четырем выражениям

$$D_S\bar{D}_SV = \begin{pmatrix} (D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21})\,\upsilon_1 \\ (D_{22}D_{11} - D_{21}D_{12})\,\upsilon_2 \\ (D_{22}D_{11} - D_{12}D_{21})\,\upsilon_3 \\ (D_{11}D_{22} - D_{21}D_{12})\,\upsilon_4 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Укажем условия для нахождения обобщенной константы (ОК) $D_{11}C_3 = D_{22}C_4 = D_{22}C_1 = D_{11}C_2 = D_{12}C_4 = D_{21}C_4 = D_{22}C_1 = D_{12}C$ для всех правых обратных операторов $D_{ik}I_{ik} = 1, \quad i,k = 1,2$ и запишем матрицы

$$D(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D_{11}(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{22}(1) \\ D_{22}(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{11}(1) & 0 & 0 \end{pmatrix}, D(2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & D_{12}(2) \\ 0 & 0 & D_{21}(2) & 0 \\ 0 & D_{12}(2) & 0 & 0 \\ D_{21}(2) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

$$I\left(1\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{11} \\ I_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad I\left(2\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_{21} \\ 0 & 0 & I_{12} & 0 \\ 0 & I_{21} & 0 & 0 \\ I_{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Справедливы соотношения

$$D\left(1\right)I\left(1\right)=1,\quad D\left(2\right)I\left(2\right)=1.$$

Определим ОС выражением

$$X^{(p_1)}\left(1\right)X^{(p_2)}\left(2\right)C=p_1!p_2!I^{p_1}\left(1\right)I^{p_2}\left(2\right)C.$$

Введем проекционные операторы

$$P\left(1\right)=1-I\left(1\right)D\left(1\right),\quad P\left(2\right)=1-I\left(2\right)D\left(2\right),\quad P=P\left(1\right)P\left(2\right).$$

Цифры в скобках означают номер независимой переменной. Поэтому операторы, зависящие от разных переменных, коммутируют. Легко проверить, что матричная конструкция операторов обеспечивает их коммутативность $D\left(1\right)D\left(2\right)=D\left(2\right)D\left(1\right)$.

Отметим, что $D^2\left(1\right)$ и $D^2\left(2\right)$имеют диагональное строение

$$D^2\left(1\right)=\begin{pmatrix} D_{11}\left(1\right)D_{22}\left(1\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}\left(1\right)D_{11}\left(1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{22}\left(1\right)D_{11}\left(1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11}\left(1\right)D_{22}\left(1\right) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

$$D^2\left(2\right)=\begin{pmatrix} D_{12}\left(2\right)D_{21}\left(2\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{21}\left(2\right)D_{12}\left(2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{12}\left(2\right)D_{21}\left(2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21}\left(2\right)D_{12}\left(2\right) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

$$\left(D^2\left(1\right)+D^2\left(2\right)\right)V=\begin{pmatrix} \left(D_{11}\left(1\right)D_{22}\left(1\right)+D_{12}\left(2\right)D_{21}\left(2\right)\right)\upsilon_1 \\ \left(D_{22}\left(1\right)D_{11}\left(1\right)+D_{21}\left(2\right)D_{12}\left(2\right)\right)\upsilon_2 \\ \left(D_{22}\left(1\right)D_{11}\left(1\right)+D_{12}\left(2\right)D_{21}\left(2\right)\right)\upsilon_3 \\ \left(D_{11}\left(1\right)D_{22}\left(1\right)+D_{21}\left(2\right)D_{12}\left(2\right)\right)\upsilon_4 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Решение системы (6) определяет следующая теорема.

Решение системы (0.6) дает биномиальный полином от ОС

$$\left(X^{()}\left(1\right)-X^{()}\left(2\right)\right)^n C=\sum_{i=0}^{n}c_n^i X^{(n-i)}\left(1\right)X\left(2\right)C. \tag{28}$$

Доказательство можно провести прямой подстановкой ОС с учетом (28). Решение (28) есть результат сложения 2^n вектор-столбцов из ОС. Имеем по 4 решения каждого в матричном виде.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ОС

Дальнейшее развитие метода для пространства высокой размерности d вполне возможно, однако структура решения сильно осложнена, поскольку размерность решения растет как 2^d. Следует также указать, что в приложениях к квантовой механике встречаются системы большей сложности, чем система Максвелла и Дирака, например, система Шредингера. Гораздо чаще возникает необходимость решения одного уравнения, например, уравнения Лапласа, в пространстве высокой размерности. Даже с теоретической точки зрения, курс математической физики в основном рассматривает уравнения второго порядка разных типов. Поэтому целесообразно рассматривать несколько иной параметрический вариант [10–12] метода ОС, имеющий дело с одним уравнением. В связи с этим задачу построения решений уравнения вида

$$a_2(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_1(x_1)\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}\right)+b_2(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(b_1(x_2)\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2}\right)=0, \tag{29}$$

соответствующего системе (6) можно решить методом параметрических ОС.

Результаты, как это видно из дальнейшего исследования, совпадают, хотя каждый метод имеет свои преимущества и недостатки.

Предположим, что оператор D представлен как произведение двух операторов D_1,D_2, т. е. $D=D_1D_2$. Линейные операторы D_1,D_2 в общем случае считаем некоммутирующими. Как и ранее в п. 1, предположим, что хотя бы один из операторов имеет ядро, в котором есть хотя бы один отличный от нуля элемент

$$D_1C_1=0, \quad D_2C_2=0.$$

Далее эти элементы C будем называть обобщенными константами (ОК) относительно D_1,D_2. Предполагаем, что D_1,D_2 имеют правые обратные I_1,I_2

$$D_1I_1=1, \quad D_2I_2=1.$$

Дополнительно примем, что операторы D_1,D_2, а следовательно и C_1,C_2 зависят от одного независимого переменного x.

Простейшим примером может служить

$$D_1=\frac{d}{dx}, \quad D_2=\frac{d}{dx}, \quad D=\frac{d^2}{dx^2}. \tag{30}$$

В этом случае C_1,C_2 константы. Обобщенной константой относительно оператора D будет функция

$$C=C_1+I_1C_2, \tag{31}$$

Поэтому для примера (30) это линейная функция.

Для случая операторов, рассмотренных в п.1 имеем

$$C=C_1+X^{(1)}(x,x_0)\,C_2.$$

Далее величины C_1,C_2 назовем параметрами, и пока не наложены какие-либо условия, рассматриваем их как новые независимые переменные. Параметры C_1,C_2 можно фиксировать, потребовав, например, обращение C в ноль во второй точке x_1

$$C(x_1)=C_1+x_1C_2. \tag{32}$$

На основе общего определения ОС, данного ранее, и приняв в качестве правого обратного для D произведение операторов I_1,I_2

$$I=I_1I_2, \quad DI=1, \tag{33}$$

имеем

$$X^{(p)}(x,x_0)=p!I^pC. \tag{34}$$

Выполнено правило

$$DX^{(p)}=pX^{(p-1)}. \tag{35}$$

Если ввести проекционный оператор $P = P_1 + P_2 D$, то выполнены свойства

$$PX^{(p)} = 0{,}p > 0, \quad PC = C.$$

Подставив C и I из (31) и (32) найдем

$$X^{(p)}\left(x{,}x_0\right) C = p!\left(I_1 I_2\right)^p C_1 + I_1\left(I_2 I_1\right)^p C_2. \tag{36}$$

Для случая (30) найдем

$$X^{(p)}\left(x{,}x_0\right) C = p!\left(\frac{x^{2p}}{(2p)!}C_1 + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}C_2\right). \tag{37}$$

Если взять случай Берса, то

$$X^{(p)}\left(x{,}x_0\right) C = p!\left(\frac{1}{(2p)!}X^{(2p)}\left(x{,}x_0\right) C_1 + \frac{1}{(2p+1)!}X^{(2p+1)}C_2\right). \tag{38}$$

Перейдем к случаю двух переменных $x_1{,}x_2$ и двух операторов $D\left(1\right){,}D\left(2\right)$

$$D\left(1\right) = D_2\left(1\right) D_1\left(1\right), \quad D\left(2\right) = D_2\left(2\right) D_1\left(2\right). \tag{39}$$

Поскольку основной целью является построение решений уравнения (29), то примем

$$D_1\left(1\right) = a_1\left(x_1\right)\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \quad D_2\left(1\right) = a_2\left(x_1\right)\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \quad D_1\left(2\right) = b_1\left(x_2\right)\tfrac{\partial}{\partial x_2}, \quad D_2\left(2\right) = b_2\left(x_2\right)\tfrac{\partial}{\partial x_2}. \tag{40}$$

Набор операторов $D_1\left(1\right){,}D_2\left(1\right)$ и $D_1\left(2\right){,}D_2\left(2\right)$ должны удовлетворять всем требованиям, установленным ранее, то есть иметь $C_1\left(1\right){,}C_2\left(1\right)$ и $C_1\left(2\right){,}C_2\left(2\right)$, для которых $D_1\left(1\right) C_1\left(1\right) = D_2\left(1\right) C_1\left(1\right) = D_1\left(2\right) C_2\left(2\right) = D_2\left(2\right) C_2\left(2\right) = 0$ и иметь обратные

$$D_1\left(1\right) I_1\left(1\right) = 1, \quad D_2\left(1\right) I_2\left(1\right) = 1. \tag{41}$$

Операторы $D_1\left(1\right){,}D_2\left(1\right)$ и $D_1\left(2\right){,}D_2\left(2\right)$ не обязаны коммутировать между собой, но обязаны коммутировать операторы с разными символами в скобках. Например, пара вида

$$D_2\left(1\right) D_1\left(1\right) = a_2\left(x_1\right)\tfrac{\partial}{\partial x_1}a_1\left(x_1\right)\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \quad D_2\left(2\right) D_1\left(2\right) = b_2\left(x_2\right)\tfrac{\partial}{\partial x_2}b_1\left(x_2\right)\tfrac{\partial}{\partial x_2}.$$

удовлетворяет этим требованиям.

На основе поставленных условий для $C\left(1\right)$ найдем

$$C\left(1\right) = C_1\left(1\right) + I_1\left(1\right) C_2\left(1\right), \quad C\left(2\right) = C_1\left(2\right) + I_1\left(2\right) C_2\left(2\right),$$

где $D_1\left(1\right) C_1\left(1\right) = 0, \quad D_2\left(1\right) C_2\left(1\right) = 0.$

Общая константа в случае двух переменных $x_1{,}x_2$ находится как произведение

$$C\left(1{,}2\right) = C\left(1\right) C\left(2\right) = C_1 + I_1\left(1\right) C_2 + I_1\left(2\right) C_3 + I_1\left(1\right) I_1\left(2\right) C_4.$$

где C_i постоянные действительные числа — параметры.

3. ПОСТРОЕНИЕ СИММЕТРИЗОВАННЫХ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ

На основе ранее введенных операторов $D\left(1\right){,}D\left(2\right)$ введем операторы

$$\left.\begin{array}{l} D_z = \frac{1}{2}\left(D\left(1\right) + D\left(2\right)\right) \\ \bar{D}_z = \frac{1}{2}\left(D\left(1\right) - D\left(2\right)\right) \end{array}\right\}. \tag{42}$$

Операторы типа (41) в различных частных случаях хорошо известны. Например, в теории решений простейшего волнового уравнения используются переменные Даламбера $\eta = x + ct$, $\xi = x - ct$. В этом случае имеем операторы

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) . \tag{43}$$

Тогда имеем уравнения

$$\left.\begin{array}{l} D_z V = \frac{1}{2}\left(D\left(1\right) v_1 + D\left(2\right) v_1\right) \\ \bar{D}_z V = \frac{1}{2}\left(D\left(1\right) v_2 - D\left(2\right) v_2\right) \end{array}\right\}. \tag{44}$$

В случае параметрических ОС это операторы второго порядка. Например,

$$D\left(1\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad D\left(2\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

В этом случае первое уравнение в (44) представляет собой уравнение Лапласа, а второе волновое уравнение гиперболического типа.

Ранее в п. 2 было введено понятие внешнего (левого) параметра h, поэтому рассмотрим выражение

$$\left(h_1^{()} X^{()}\left(1\right) + h_2^{()} X^{()}\left(2\right)\right)^n C = \sum_{i=0}^{n} C_n^i h_1^{n-i} X^{n-i}\left(1\right) h_2^i X^i\left(2\right).$$

Применим к нему оператор $D\left(1\right)$ учитывая (16), (17)

$$D\left(1\right)\left(h_1^{()} X^{()}\left(1\right) + h_2^{()} X^{()}\left(2\right)\right)^n C = n h_1 \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i h^{n-1-i} X^{(n-1)}\left(1\right) X^{(i)}\left(2\right) C =$$
$$= n h_1 \left(h_1^{()} X^{()}\left(1\right) + h_2^{()} X^{()}\left(2\right)\right)^{n-1}.$$

Действуя оператором $D\left(2\right)$и сдвигая суммирование доказываем теорему.

Теорема 1. Справедливо правило "дифференцирования"

$$D_z Z^n C = n Z^{n-1} C, \text{ где } Z^n = \left(h_1^{()} X^{()}\left(1\right) + h_2^{()} X^{()}\left(2\right)\right)^n C.$$

Далее следует ряд следствий.

Следствие 1. При условии $h_1 + h_2 = 0$, функция $Z^n C$ есть решение уравнения (39).

Следствие 2. Функция, представленная как $V = e^{ZC} = \sum \frac{1}{n!} Z^{(n)} C$, есть решение уравнения $\left(D_1 + D_2\right) v = mv$, где $m = h_1 + h_2$.

Если $D\left(1\right)$,$D\left(2\right)$ в (43) содержат вторые производные, то оператор D_z эллиптического типа, а $\bar{D}_z$ - гиперболического. Назовем их симметризованными. Это операторы Лапласа. Рассмотрим линейные комбинации

$$Z = X^{(1)}\left(1\right) + X^{(1)}\left(2\right), \quad \bar{Z} = X^{(1)}\left(1\right) - X^{(1)}\left(2\right).$$

По построению имеем

$$\begin{array}{ll} D_z\left(X^{(1)}\left(1\right) + X^{(1)}\left(2\right)\right) C = C, & \bar{D}_z\left(X^{(1)}\left(1\right) + X^{(1)}\left(2\right)\right) C = 0, \\ D_z\left(X^{(1)}\left(1\right) - X^{(1)}\left(2\right)\right) C = 0, & \bar{D}_z\left(X^{(1)}\left(1\right) - X^{(1)}\left(2\right)\right) C = C. \end{array}$$

Введем символическое выражение

$$Z^n C = \left(X^{()}\left(1\right) + X^{()}\left(2\right)\right)^n C,$$

понимая под ним биномиальный многочлен ОС

$$Z^n C = \left(X^{()}(1) + X^{()}(2)\right)^n C = \sum_{i=0}^{n} C_n^i X^{(n-1)}(1)\, X^i(2)\, C.$$

Опираясь на свойства ОС можно доказать

$$D_z \left(X^{()}(1) + X^{()}(2)\right)^n C = n \left(X^{()}(1) + X^{()}(2)\right)^{n-1} C,$$

$$\bar{D}_z \left(X^{()}(1) + X^{()}(2)\right)^n C = 0,$$

записав символическое произведение

$$\bar{Z}^m Z^n = \left(X^{()}(1) - X^{()}(2)\right)^m \left(X^{()}(1) + X^{()}(2)\right)^n C$$

в виде многочлена

$$V^{(m,n)} = \sum_{i=0}^{i=m+n} a_i^{(m,n)} X^{(m+n-1)}(1) X^{(i)}(2)\, C.$$

Коэффициенты $a_i^{(m,n)}$ найдем из соотношений

$$a_i^{(m,n+1)} = a_i^{(m,n)} + a_{i-1}^{(m,n)},\ \text{при}\ a_{-1}^{(m,n)} = 0, i = 0,1,...,m+n$$

$$a_i^{(m+1,n)} = a_i^{(m,n)} - a_{i-1}^{(m,n)}\ \text{при}\ a_{-1}^{(m,n)} = 0, i = 0,1,...,n+m$$

Можно доказать прямым вычислением

$$D_S \bar{Z}^m Z^n C = n \bar{Z}^m Z^{n-1} C,$$

$$\bar{D}_S \bar{Z}^m Z^n C = m \bar{Z}^{m-1} Z^n C.$$

В матричном варианте ОС симметризованные ОС были введены ранее [3]. В параметрическом варианте рассмотрены в данном сообщении. С формальной точки зрения нет различия в основных соотношениях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем сообщении приведены:

1. Краткое изложение теории Л. Берса, в которой возникает понятие обобщенной степени.
2. Развитие метода в матричной форме. Его приложение к построению решений линейных дифференциальных систем уравнений.
3. Параметрический вариант метода обобщенных степеней и его основные свойства. Преимущества и недостатки этого варианта обобщенных степеней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bers, L. On a class of differential equations in mechanics of continua / L. Bers, A. Gelbart // Mathematics Quarterly of Applied Mathematics. — 1943. — P. 168–188

2. Bers, L. On a class of functions defined by partial differential equations / L. Bers, A. Gelbart // Mathematics transactions of the Americfn Mathematicfl Society. — 1944. — № 1. — P. 67–93.

3. Гладышев, Ю. А. Формализм Бельтрами-Берса и его приложения в математической физике / Ю. А. Гладышев. — Калуга : КГПУ, 1997. — 259 с.

4. Берс, Л. Математические основы дозвуковой и околозвуковой газовой динамик / Л. Берс. — М. : Издательство иностранной литературы, 1961. — 206 с.

5. Гладышев, Ю. А. О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса / Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева // Вестник Калужского университета. — 2020. — № 2(47). — С. 77–80.

6. Гладышев, Ю. А. Об использовании аппарата обобщенных степеней Берса при построении решений краевых задач теории переноса методом Фурье / Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева // Вестник Калужского университета. — 2018. — № 3. — С. 53–57.

7. Гладышев, Ю. А. Методы построения решения основных задач теории переноса на системе контактирующих стержней / Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева // Вестник Калужского университета. — 2014. — № 1. — С. 10–13.

8. Гладышев, Ю. А. О некоторых новых методах решения краевых задач теории переноса в неоднородных твердых пластинах и оболочках / Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева // Вестник Калужского университета. — 2017. — № 2. — С. 23–26.

9. Гладышев, Ю. А. О построении обобщенных степеней для уравнения квантовой электродинамики Дирака / Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева // Материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения–XXXII Современные методы теории краевых задач. — Воронеж, 2021. — С. 70–72.

10. Гладышев, Ю. А. Об одном варианте метода обобщенных степеней Берса / Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева, Р. А. Стамов // Сборник трудов Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики, механики". — Воронеж, 2022, — С. 45–52.

11. Гладышев, Ю. А. Об использовании метода параметрических обобщенных степеней для построения решений одного класса дифференциальных уравнений / Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева // Материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2022. — Воронеж, 2022. — С. 67–71.

12. Гладышев, Ю. А. Об использовании параметрических обобщенных степеней для построения решений уравнений параболического типа / Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева // Сборник материалов международной конференции "XXXIII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задача" (КРОМШ-2022). — Симферополь, 2022. — С. 67–71.

REFERENCES

1. Bers L., Gelbart A. On a class of differential equations in mechanics of continua. Mathematics Quarterly of Applied Mathematics, 1943, pp. 168–188.

2. Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations. Mathematics transactions of the Americfn Mathematicfl Society, 1944, no. 1, pp. 67–93.

3. Gladyshev Yu.A. The Beltrami-Beers formalism and its applications in mathematical physics. [Gladyshev YU.A. Formalizm Bel'trami-Bersa i ego prilozheniya v matematicheskoj fizike]. Kaluga: KSPU, 1997, 259 p.

4. Bers L. Mathematical foundations of subsonic and transonic gas dynamics. [Bers L. Matematicheskie osnovy dozvukovoj i okolozvukovoj gazovoj dinamik]. Moscow, 1961, 206 p.

5. Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A. On methods for constructing complex generalized Bers powers. [Gladyshev YU.A., Loshkareva E.A. O metodah postroeniya kompleksnyh obobshchennyh stepenej Bersa]. *Vestnik Kaluzhskogo universiteta — Bulletin of Kaluga University*, 2020, no. 2(47), pp. 77–80.

6. Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A. On the use of the apparatus of generalized Bers powers in the construction of solutions to boundary value problems of transport theory by the Fourier method. [Gladyshev YU.A., Loshkareva E.A. Ob ispol'zovanii apparata obobshchennyh stepenej

Bersa pri postroenii reshenij kraevyh zadach teorii perenosa metodom Fur'e]. *Vestnik Kaluzhskogo universiteta — Bulletin of Kaluga University*, 2018, no. 3, pp. 53–57.

7. Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A. Methods for constructing a solution to the main problems of the transfer theory on a system of contacting rods. [Gladyshev YU.A., Loshkareva E.A. Metody postroeniya resheniya osnovnyh zadach teorii perenosa na sisteme kontaktiruyushchih sterzhnej]. *Vestnik Kaluzhskogo universiteta — Bulletin of Kaluga University*, 2014, no. 1, pp. 10–13.

8. Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A. On some new methods for solving boundary value problems of transport theory in inhomogeneous solid plates and shells. [Gladyshev YU.A., Loshkareva E.A. O nekotoryh novyh metodah resheniya kraevyh zadach teorii perenosa v neodnorodnyh tverdyh plastinah i obolochkah]. *Vestnik Kaluzhskogo universiteta — Bulletin of Kaluga University*, 2017, no. 2, pp. 23–26.

9. Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A. On the construction of generalized powers for the equation of quantum electrodynamics of Dirac. [Gladyshev YU.A., Loshkareva E.A. O postroenii obobshchennyh stepenej dlya uravneniya kvantovoj elektrodinamiki Diraka]. Proceedings of the International Conference: Voronezh Spring Mathematical School Pontryagin Readings–XXXII. Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems, Voronezh, 2021, pp. 70–72.

10. Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A., Stamov R.A. On a variant of the method of generalized Bers powers. [Gladyshev YU.A., Loshkareva E.A., Stamov R.A. Ob odnom variante metoda obobshchennyh stepenej Bersa]. Proceedings of the International Scientific Conference «Actual Problems of Applied Mathematics, Informatics, Mechanics», Voronezh, 2022, pp. 45–52.

11. Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A. On the use of the method of parametric generalized powers for constructing solutions of a class of differential equations. [Gladyshev YU.A., Loshkareva E.A. Ob ispol'zovanii metoda parametricheskih obobshchennyh stepenej dlya postroeniya reshenij odnogo klassa differencial'nyh uravnenij]. Materials of the International Conference: Voronezh Winter Mathematical School S.G. Krein, 2022, Voronezh, 2022, pp. 67–71.

12. Gladyshev Yu.A., Loshkareva E.A. On the use of parametric generalized powers for constructing solutions of equations of parabolic type. [Gladyshev YU.A., Loshkareva E.A. Ob ispol'zovanii parametricheskih obobshchennyh stepenej dlya postroeniya reshenij uravnenij parabolicheskogo tipa]. Collection of materials of the international conference "XXXIII Crimean autumn mathematical school-symposium on spectral and evolutionary problems" (KROMSH-2022), Simferopol, 2022, pp. 67–71.

Гладышев Юрий Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры физики и математики Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского, Калуга, Россия
E-mail: gladyshev.yua@yandex.com

Gladyshev Yury Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Physics and Mathematics, Tsiolkovsky Kaluga State University, Kaluga, Russia
E-mail: gladyshev.yua@yandex.com

Лошкарева Елена Анатольевна, канд. тех. наук, доц., доцент кафедры физики и математики Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского, Калуга, Россия
E-mail: losh-elena@yandex.ru

Loshkareva Elena Anatolevna, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Chair of Physics and Mathematics, Tsiolkovsky Kaluga State University, Kaluga, Russia
E-mail: losh-elena@yandex.ru

Малышев Евгений Николаевич, канд. тех. наук, доц., заведующий кафедрой машиностроительных технологий КФ МГТУ им. Н. Э. Баумана, Калуга, Россия
E-mail: malen@bmstu.ru

Malyshev Evgeniy Nikolaevich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Mechanical Engineering Technology Department, Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, Russia
E-mail: malen@bmstu.ru