УДК 517.9

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ДЛЯ ТОЧЕК ЭКСТРЕМУМА МНОГОЧЛЕНА ЧЕБЫШЕВА ПЕРВОГО РОДА НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.02.2023 г.

Аннотация. В работе исследовано поведение функции Лебега для точек экстремума многочлена Чебышева первого рода нечетной степени. Получена оценка сверху константы Лебега в этом случае в виде конечной суммы асимптотического знакочередующегося ряда. В зависимости от степени многочлена Чебышева найдены предельные значения для индекса суммирования в усеченном асимптотическом ряде. Проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: многочлен Чебышева первого рода, интерполяционный процесс Лагранжа, функция Лебега.

ABOUT AN UPPER ESTIMATION THE LEBESGUE CONSTANT FOR EXTREMUM POINTS OF THE CHEBYSHEV POLYNOMIAL OF THE FIRST KIND OF ODD DEGREE

O. V. Germider, V. N. Popov

Abstract. This article investigates the behavior of the Lebesgue function for the extremum points of the Chebyshev polynomial of the first kind of odd degree. An upper bound for the Lebesgue constant in this case is obtained in the form of a finite sum of an asymptotic series with an alternating sign. Depending on the degree of the Chebyshev polynomial, limiting values are found for the summation index in a truncated asymptotic series. The analysis of the obtained results is carried out.

Keywords: Chebyshev polynomial of the first kind, Lagrange interpolation process, Lebesgue function.

1. ВВЕДЕНИЕ

Константа Лебега является важной характеристикой интерполяционного процесса при заданном наборе узлов [1]. Она обеспечивает обусловленность и устойчивость задач интерполяции. Пусть непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ функция $f = f(x)$ задана своими значениями f_0, f_1, …, f_n в точках $\Omega_n = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$. Тогда функция и константа Лебега для заданного множества узлов интерполяции с использованием фундаментальных полиномов Лагранжа $l_k(x)$ записываются в виде [2]:

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)|, \quad l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = \overline{0,n}, \tag{1}$$

$$\Lambda_n = \max_{x\in[-1,\,1]} \lambda_n(x) = \max_{x\in[-1,\,1]} \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)|. \tag{2}$$

Обзор некоторых результатов для константы Лебега и поведения функции Лебега приведен в [3]. Представленная работа посвящена оценке сверху для константы Лебега интерполяционного процесса Лагранжа на отрезке $[-1, 1]$ с узлами в точках экстремума полинома Чебышева первого рода $T_n(x)$ [4]:

$$x_{ex,k} = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right), \quad k = \overline{0,n}, \tag{3}$$

где n – нечетное число. Выбор точек экстремума полинома Чебышева в качестве узлов интерполяции связан с тем, что в этом случае константа Лебега при фиксированном числе узлов стремится к своему минимальному значению на отрезке $[-1, 1]$ с сохранением устойчивости к ошибкам округления при приближении функции интерполяционным полиномом.

2. ОЦЕНКА СВЕРХУ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА

Введем обозначение

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{4}$$

Тогда базис Лагранжа (1) для Ω_n запишем в виде

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_{n,x}(x_k)}, \quad \omega'_{n,x}(x_k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\omega_n(x)\bigg|_{x=x_k}, \quad k = \overline{0,n}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2), получаем

$$\Lambda_n = \max_{x\in[-1,\,1]} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_{n,x}(x_k)} \right|. \tag{6}$$

В силу существования и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа на множестве Ω_n и того факта, что точки (3) являются нулями полинома $(x^2 - 1)T'_{n,x}(x)$ с коэффициентом $2^{n-1}n$ при x^{n+1} [4], получаем

$$\omega_{ex,n}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_{ex,j}) = \frac{x^2 - 1}{2^{n-1}n} T'_{n,x}(x). \tag{7}$$

Полагая

$$x = \cos t, \quad x_{ex,k} = \cos t_{ex,k}, \quad t_{ex,k} = \frac{\pi k}{n}, \quad k = \overline{0,n}, \tag{8}$$

имеем

$$\omega_{ex,n}(t) = -\frac{\sin t \sin nt}{2^{n-1}}, \tag{9}$$

$$\omega_{ex,n}(t_{ex,k}) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n n}{2^{n-2}}, & k = 0,n, \\ \dfrac{(-1)^n n}{2^{n-1}}, & 0 < k < n. \end{cases} \tag{10}$$

Подставляя (7) и (10) в (6), получаем

$$\Lambda_{ex,n} = \frac{2^{n-1}}{n} \max_{x\in[-1,\,1]} {\sum_{k=0}^{n}}'' \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} |x - x_{ex,j}|, \tag{11}$$

где двойной штрих у знака суммы (11) означает, что первое и последнее слагаемое умножается на 1/2.

Из задания точек интерполирования (3) видно, что функция Лебега

$$\lambda_{ex,n}(x) = \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{k=0}^{n}{}'' \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} |x - x_{ex,j}|\,, \tag{12}$$

является четной функцией на отрезке $[-1,1]$, поэтому для нахождения ее максимального значения достаточно рассмотреть отрезок $[0,1]$

$$\Lambda_{ex,n} = \frac{2^{n-1}}{n} \max_{x\in[0,\,1]} \sum_{k=0}^{n}{}'' \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} |x - x_{ex,j}|\,. \tag{13}$$

При $j = \overline{(n+1)/2,n}$ разность $x - x_{ex,j}$ принимает неотрицательные значения. Знак $x - x_{ex,j}$ при $j = \overline{0,(n-1)/2}$ определяем из условий $x - x_{ex,j} \geqslant 0$ и $k \geqslant j$. В этом случае имеем

$$\Lambda_{ex,n} = \frac{2^{n-1}}{n} \max_{x\in[0,\,1]} \sum_{k=0}^{n}{}''(-1)^q \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} (x - x_{ex,j}), \tag{14}$$

где $q = 0$ для $j = \overline{(n+1)/2,n}$ или $[n\arccos(x)/\pi] < k$, иначе $q = 1$. Символ $[n\arccos(x)/\pi]$ означает целую часть числа.

Рассматривая $x \in [x_{ex,l}, x_{ex,l+1}]$ ($l = \overline{0,(n-1)/2}$), значение параметра q в выражении (14) определяем следующим образом: для $j = \overline{(n+1)/2,n}$ или $l < k$ это значение равно нулю, иначе $q = 1$. Далее исследуем на максимум функцию Лебега (12) на каждом интервале.

Учитывая, что n – нечетное, получаем, что одной из точек локального максимума функции Лебега (12) на $x \in [0,1]$ ($t \in [0,\pi]$) является $x = 0$ ($t = \pi/2$). Сравнивая значения функции Лебега в точках локального максимума, находим

$$\Lambda_{ex,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{|\cos t_{ex,k}|} = 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{\cos t_{ex,k}}. \tag{15}$$

Из (15) вытекает, что $\Lambda_{ex,n} > 1$. Выполняя над (15) элементарные тригонометрические преобразования, имеем

$$\Lambda_{ex,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi k}{2n} + \frac{\pi}{4n}\right). \tag{16}$$

Полученное выражение (16) определяет константу Лебега для множества n узлов интерполяции, которые являются нулями полинома Чебышева первого рода $T_n(x)$ [4]:

$$x_{nul,k} = \cos(t_{nul,k}),\ t_{nul,k} = \frac{\pi k}{n} + \frac{\pi}{2n}, \quad k = \overline{0,n-1},$$

и согласуется с [3], [5] и [6]. Оценим выражение (16) сверху. Разложим функцию $\operatorname{ctg} t$ в ряд Лорана на $(0,\pi/2)$ [7]

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}|B_{2i}|}{(2i)!} t^{2i-1}, \tag{17}$$

где B_{2i} – числа Бернулли. Для нахождения чисел Бернулли применяем рекуррентную формулу [8]

$$\frac{B_1}{(2i)!} + \sum_{j=0}^{i} \frac{B_{2j}}{(2(i-j)+1)!(2j)!} = 0,\ B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2}, i \geqslant 1.$$

Подставляя (17) в (16), получаем

$$\Lambda_{ex,n} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^{-1} + R_{1,n}, \tag{18}$$

$$R_{1,n} = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi^{2i-1}|B_{2i}|4^{1-i}}{n^{2i}(2i)!}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^{2i-1}. \tag{19}$$

Обозначим

$$F_{0,n} = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^{-1}. \tag{20}$$

Применяя свойство функции $\Psi(x) = \dfrac{\mathrm{d}\ln\Gamma(x)}{\mathrm{d}x}$ [9], имеем

$$\Psi(1+x) = \Psi(x) + \frac{1}{x}, \tag{21}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Перепишем выражение (20) в виде

$$2F_{0,n-1} = \Psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right). \tag{22}$$

Для вычисления значения $\Psi(1/2)$ применяем следующую формулу из [10] и [11]

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = 2\sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]}\cos\left(\frac{2\pi pk}{q}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)\right) - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{q}\right) - \ln(2q) - \gamma, \tag{23}$$

где q и p – натуральные числа, $p < q$ и $[q/2]$ – целая часть $q/2$. Находим значение $\Psi(1/2)$:

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2. \tag{24}$$

Используя выражение Бине [8]

$$\Psi(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x} - \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\exp(-tx)\mathrm{d}t, \tag{25}$$

и разложение в ряд Маклорена подынтегральной функции, стоящей в скобках [8],

$$\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}t^{2i-1}}{(2i)!}, \tag{26}$$

получаем

$$\Psi(x) = \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}\frac{B_{2i}}{ix^{2i}} - \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\exp(t)-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{B_{2i}t^{2i-1}}{(2i)!}\right)\exp(-tx)\mathrm{d}t. \tag{27}$$

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_{2i}x^{-2i}i^{-1}$ является знакочередующимся и асимптотическим, поэтому ограничиваем суммирование на члене ряда с индексом q_n, за которым следующий член этого ряда начинает превосходить его по абсолютной величине. Находим значение q_n $(1 \leqslant q \leqslant q_n)$ из неравенства

$$\frac{|B_{2(q+1)}|qx^{2q}}{|B_{2q}|(q+1)x^{2(q+1)}} \leqslant 1. \tag{28}$$

Учитывая, что модули чисел Бернулли $|B_{2q}|$ через дзета-функцию Римана $\zeta(2q)$ выражаются как [8]

$$|B_{2q}| = \frac{2\zeta(2q)(2q)!}{(2\pi)^{2q}}, \quad q \geqslant 1,$$

и $\zeta(2(q+1))/\zeta(2q) \leqslant 1$, из (28) для $x = n + 1/2$ $(n \geqslant 3)$ получаем

$$q_n = \left[\frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{16\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2 + 1}\right)\right], \tag{29}$$

где квадратными скобками обозначена целая часть числа. В частности, для $n = 3$ согласно (29) получаем $q_n = 11$, т. е., начиная с $i = q_n + 1$, члены ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_{2i}(n+1/2)^{-2i}i^{-1}$ возрастают по абсолютной величине. Для $i = \overline{7,12}$ соответствующие члены этого ряда принимают значения, равные: $4.03 \cdot 10^{-9}$, $-1.75 \cdot 10^{-9}$, $9.83 \cdot 10^{-10}$, $-6.95 \cdot 10^{-10}$, $6.04 \cdot 10^{-10}$, $-6.32 \cdot 10^{-10}$. Заметим, что из (29) следует, что значение q_n увеличивается с ростом n. Значение интеграла в (27) при $x = n + 1/2$ не превосходит по модулю величины $|B_{2(q+1)}|x^{-2(q+1)}(2(q+1))^{-1}$, где $q \leqslant q_n$.

Учитывая, что $B_{2i} = (-1)^{i+1}|B_{2i}|$ $(i \geqslant 1)$, для любого $x = 1/2+n$ $(n \geqslant 1)$ имеем следующую оценку

$$\Psi\left(n+\frac{1}{2}\right) \leqslant \Psi_{n,0} + \Psi_{n,2m_1},\ 2 \leqslant 2m_1 \leqslant q_n, \tag{30}$$

где

$$\Psi_{n,0} = -\ln(2) + \ln(1+2n) - \frac{1}{1+2n},$$

$$\Psi_{n,l} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{2}+n\right)^{-2i}\frac{B_{2i}}{i}. \tag{31}$$

Подставляя (24) и (30) в (22), имеем

$$F_{0,n} \leqslant F^*_{0,n} + \frac{1}{2}\Psi_{n,2m}, \tag{32}$$

$$F^*_{0,n} = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(1+2n) - \frac{1}{2(1+2n)}. \tag{33}$$

Для нахождения членов с $i \geqslant 1$ в (19) введем обозначения

$$F_{2i-1,n} = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^{2i-1}, \tag{34}$$

$$\widehat{s}_{j,n} = \sum_{k=1}^{n-1}k^j, \quad j = 2i-1. \tag{35}$$

Тогда

$$F_{2i-1,n} = \widehat{s}_{j,2n} - 2^j\widehat{s}_{j,n}. \tag{36}$$

Учитывая, что $B_{2k+1} = 0$ $(k \geqslant 1)$ и используя представление [12]

$$\widehat{s}_{j,n-1} = j! \sum_{k=0}^{j} \frac{B_k n^{j+1-k}}{k!(j+1-k)!}, \tag{37}$$

преобразуем выражение (34) к виду

$$F_{2i-1,n} = \frac{(2i)!4^{i-1}}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{B_{2k} n^{2i-2k} \left(2^{1-2k} - 1\right)}{(2k)!(2i-2k)!}. \tag{38}$$

Подставляя (34) и (38) в (19), получаем

$$R_{1,n} = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{B_{2k}\left(2^{1-2k} - 1\right)}{n^{2k}(2k)!(2i-2k)!} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i(2i)!} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}(1-2^{1-2j})}{n^{2j}(2j)!} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|B_{2i}|\pi^{2i} \prod\limits_{q=1}^{2j-1}(2i-q)}{(2i)!}. \tag{39}$$

Интегрируя (17) по t, находим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^{2i}|B_{2i}|}{i(2i)!} = 2 \ln\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{40}$$

Последовательно дифференцируя (17) $2j-1$ раз по t $(j \geqslant 1)$, имеем

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|B_{2i}|\pi^{2i} \prod\limits_{q=1}^{2j-1}(2i-q)}{(2i)!} =$$

$$= -\left(\mathrm{ctg}^{(2j-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2^{2j-1}|B_{2j}|}{j}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} - (2j-1)!. \tag{41}$$

Для получения значений производных функции $\mathrm{ctg}\, t$ в точке $\pi/2$ воспользуемся ее разложением в ряд

$$\mathrm{ctg}\, t = \frac{1}{t} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\pi i} + \frac{1}{t+\pi i}\right), \quad 0 < t < \pi. \tag{42}$$

Последовательно дифференцируя (42) по t, получаем

$$\mathrm{ctg}^{(2j-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(1-2^{2j})2^{2j-1}}{j}|B_{2j}|, \qquad j \geqslant 1. \tag{43}$$

Подставляя (40) и (41) в (39) и учитывая (43), имеем

$$R_{1,n} = -\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}(1-2^{1-2j})}{jn^{2j}}\left(\frac{\pi^{2j}(2^{2j}-2)|B_{2j}|}{(2j)!} - 1\right). \tag{44}$$

Ряд (44) является знакочередующимся и асимптотическим. При нахождении частичной суммы ряда (44) значение индекса j не должно превосходить величины j_n:

$$j_n = \left[\frac{1}{4}\left(3 + \sqrt{16\pi^2 n^2 + 1}\right)\right] - 1. \tag{45}$$

Из (45) вытекает, что значение j_n увеличивается с ростом n.

Подставляя (20) и (44) в (18) и учитывая (31)-(33), окончательно приходим к следующей оценке для $\Lambda_{ex,n}$:

$$\Lambda_{ex,n} \leqslant M_n, \tag{46}$$

$$M_n = m_n^* + \frac{B_{4l+2}}{(2l+1)\pi}\left(\frac{(1-2^{-1-4l})}{(n+1)^{4l+2}}\left(\frac{\pi^{4l+2}(2^{4l+2}-2)|B_{4l+2}|}{(4l+2)!}-1\right)\right), \tag{47}$$

$$m_n^* = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{4}{\pi}\right) + \ln(1+2n) - \frac{1}{1+2n}\right) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2l}\frac{B_{2j}}{j}\left(\frac{(1-2^{1-2j})}{n^{2j}}\left(\frac{\pi^{2j}(2^{2j}-2)|B_{2j}|}{(2j)!}-1\right)-\frac{2^{2j}}{(2n+3)^{2j}}\right), \quad 2l-1 < j_n. \tag{48}$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведем сравнение значений верхней оценки для константы Лебега (46) со значениями самой константы (16), а также с аналогичными результатами, представленными в [3], [13] и [14].

Согласно [13] константа Лебега интерполяционного процесса Лагранжа по узлам Чебышева имеет следующую оценку [3], [13]:

$$\Lambda_{ex,n} = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{8}{\pi}\right) + \ln n\right) + \alpha_n, \tag{49}$$

$$\alpha_n < \frac{1}{72n^2}. \tag{50}$$

В [14] получено асимптотическое представление Λ_n:

$$\Lambda_{ex,n} = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{8}{\pi}\right) + \ln n\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{(n+1)^{2i}}, \tag{51}$$

где коэффициенты A_i находятся как [3], [14]

$$A_i = \frac{4\cdot(-1)^{i-1}(1-2^{1-2i})(2i-1)!\zeta(2i)}{\pi(2\pi)^{2i}}\left(1+\sum_{j=1+i}^{\infty}\frac{(2j-1)!\zeta(2j)}{(2j-2i)!(2i-1)!2^{2j-1}}\right). \tag{52}$$

В таблице 1 представлены результаты вычислений отклонения величины $\Lambda_{ex,n}$ от верхней границы ее оценки (46) при различных значениях n. Расчеты выполнены на основании (46)-(48) при $l = 1$. Там же приведены соответствующие значения отклонений, восстановленные по формулам (49)-(52). При использовании (51) и (52) суммирование в (51) ограничено $i = 1$, в (52) – значением $j = (i+1)+10$.

Таблица 1. *Значение $M_n - \Lambda_{ex,n}$ в зависимости от n*

n	$M_n - \Lambda_{ex,n}$		
	(45)	[13]	[14]
11	$1.1\cdot10^{-9}$	$6.0\cdot10^{-7}$	$6.0\cdot10^{-7}$
21	$2.6\cdot10^{-11}$	$4.5\cdot10^{-8}$	$4.5\cdot10^{-8}$
31	$2.6\cdot10^{-12}$	$9.5\cdot10^{-9}$	$9.5\cdot10^{-9}$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена оценка сверху для константы Лебега для случая узловых точек, которые являются точками экстремума полинома Чебышева первого рода нечетной степени. Выражение для верхней границы этой оценки представлено в виде суммы членов усеченного асимптотического знакочередующегося ряда с использованием свойств логарифмической производной от гаммы-функции Эйлера и дзета-функции Римана. Проведен анализ полученных выражений. В зависимости от числа узлов интерполяционного процесса найдены предельные значения для индекса суммирования в усеченном асимптотическом ряде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко, К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. — М.–Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. — 848 с.

2. Привалов, А. А. Теория интерполирования функций / А. А. Привалов. — Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. — 229 с.

3. Bayram, A. I. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation / A. I. Bayram // Journal of Inequalities and Applications. — 2016. — V. 93. — P. 1–15.

4. Mason, J. Chebyshev polynomials / J. Mason, D. Handscomb. — Florida : CRC Press, 2003. — 335 p.

5. Ehlich, H. Auswertung der Normen von Interpolationsoperatoren / H. Ehlich, K. Zeller // Math. Ann. — 1966. — V. 164. — P. 105–112.

6. Powell, M. J. D. On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria / M. J. D. Powell // Comput. J. — 1967. — V. 9. — P. 404–407.

7. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М. : Наука, 1979. — 832 с.

8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1973. — 296 с.

9. Espinosa, O. A generalized polygamma function / O. Espinosa, V. Moll // Integral Transforms and Special Functions. — 2004. — V. 15, № 2. — P. 101–115.

10. Люк, Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. — М. : Мир, 1980. — 608 с.

11. Murty, M. R. Transcendental values of the digamma function / M. R. Murty, N. Saradha // J. Num. Theo. — 2007. — V. 125. — P. 298–318.

12. Sherwood, H. Sums of power of integers and Bernoulli numbers / H. Sherwood // The Mathematical Gazette. — 1970. — V. 54. — P. 272–274.

13. Gunttner, R. Evaluation of Lebesgue constants / R. Gunttner // SIAM J. Numer. Anal. — 1980. — V. 17, № 4. — P. 512–520.

14. Dzjadik, V. K. On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points / V. K. Dzjadik, V. V. Ivanov // Anal. Math. — 1983. — V. 9, № 2. — P. 85–97.

REFERENCES

1. Babenko K.I. Fundamentals of numerical analysis. [Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza]. Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2002, 848 p.

2. Privalov A.A. Theory of interpolation of functions. [Privalov A.A. Teoriya interpolirovaniya funkcij]. Saratov: Saratov University, 1990, 229 p.

3. Bayram A.I. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation. Journal of Inequalities and Applications, 2016, vol. 93, pp. 1–15.

4. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida: CRC Press, 2003, 335 p.

5. Ehlich H., Zeller K. Auswertung der Normen von Interpolationsoperatoren. Math. Ann., 1966, vol. 164, pp. 105–112.

6. Powell M.J.D. On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria. Comput. J., 1967, vol. 9, pp. 404–407.

7. Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical functions. [Abramowitz M., Stegun I.A. Spravochnik po special'nym funkciyam]. Moscow, 1979, 832 p.

8. Bateman H., Erdeyi A. Higher Transcendental Functions. Part. 1. Hypergeometric function, Legendre functions. [Bejtmen G., Erdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. Tom 1. Gipergeometricheskaya funkciya, funkcii Lezhandra]. Moscow, 1973, 296 p.

9. Espinosa O., Moll V. A generalized polygamma function. Integral Transforms and Special Functions, 2004, vol. 15, no. 2, pp. 101–115.

10. Luke Y.L. The Special Functions and their Approximations. [Lyuk YU. Special'nye matematicheskie funkcii i ih approksimacii]. Moscow, 1980, 608 p.

11. Murty M.R., Saradha N. Transcendental values of the digamma function. J. Num. Theo., 2007, vol. 125, pp. 298–318.

12. Sherwood H. Sums of power of integers and Bernoulli numbers. The Mathematical Gazette, 1970, vol. 54, pp. 272–274.

13. Gunttner R. Evaluation of Lebesgue constants. SIAM J. Numer. Anal., 1980, vol. 17, no. 4, pp. 512–520.

14. Dzjadik V.K., Ivanov V.V. On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points. Anal. Math., 1983, vol. 9, no. 2, pp. 85–97.

Гермидер О. В., к. ф.-м.н., доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия
E-mail: o.germider@narfu.ru

Germider O. V., candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of engineering structures, architecture and graphics, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia
E-mail: o.germider@narfu.ru

Попов В. Н., д. ф.-м.н., профессор кафедры высшей и прикладной математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия
E-mail: v.popov@narfu.ru

Popov V. N., doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of higher and applied mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia
E-mail: v.popov@narfu.ru