УДК 531-14, 531.113.8

К ВОПРОСУ О ТРАЕКТОРИИ СВОБОДНО ПАДАЮЩЕГО ТЕЛА В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

С. Б. Богданова, С. О. Гладков

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Аннотация. Получена система дифференциальных уравнений, описывающих движение свободно падающего тела с точки зрения неподвижного наблюдателя, находящегося в центре естественного базиса заданной плоской кривой и движущегося вместе с ним. С помощью компьютерного моделирования построены соответствующие траектории в двух случаях: когда наблюдатель движется по окружности или с постоянной угловой скоростью, или с переменной, меняющейся по заданным законам в виде косинуса и в виде функции Бесселя.

Ключевые слова: подвижный базис плоской кривой, абсолютное и относительное движение, неинерциальная система отсчета.

ON THE QUESTION OF THE TRAJECTORY OF A FREELY FALLING BODY IN NONINERTIALE REFERENCE SYSTEMS

S. B. Bogdanova, S. O. Gladkov

Abstract. The system of differential equations, describing the motion of free falling body from the point of the fixed observer view in the center of the standard basis of the certain plave curve and moving with it, was obtained.

Using some computer simulations, we built desired trajectories for the case of the observer was moving along the circumference either with constant angular velocities, or with an angular velocity that varied in accordance to the cosine law or Bessel function.

Keywords: moving basis of plane curve, absolute and relative motion, noninertial frame of reference.

ВВЕДЕНИЕ

Решение любой механической задачи предполагает известным, какие силы и со стороны каких тел они действуют на заданное тело, приводя последнее в движение. Это обстоятельство вместе с принципом относительности Галилея позволяет составлять уравнение движения тела, инвариантное относительно всех инерциальных систем отсчета [1]. Однако, как хорошо известно, это вовсе не означает, что одно и то же движение должно выглядеть одинаково во всех инерциальных системах отсчета [2]. Вполне естественно было бы при этом предположить, что одно и то же движение тела не может выглядеть одинаково в инерциальной и неинерциальной системах отсчета.

Специфической особенностью описания движения тела в неинерциальной системе отсчета (НСО) является учет так называемых сил инерции, которые связаны не с взаимодействием тел, а с ускоренным движением самой системы отсчета. К таким силам относятся, например, поступательные и центробежные силы инерции, сила Кориолиса. С подробным анализом динамических уравнений движения тела в НСО можно познакомиться по любому учебнику физики [1–4], чего нельзя сказать об исследовании вида их траекторий движения в НСО. Более детальное знакомство с исследованиями, касающимися этого направления (см. [5–10]) также показало, что предпочтение отдается анализу динамики движения тел в НСО, но не описанию их траекторий с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре НСО.

Вместе с тем, актуальность этого исследования не может быть объяснена чисто академическим любопытством. На самом деле, наблюдение за движением того или иного тела из окна ускоренного движущегося поезда, летательного аппарата или любого наземного транспорта может помочь в решении таких важных практических вопросов, как, например, точность стрельбы или точность приземления летательных аппаратов.

В настоящей работе приводится подробный анализ решения задачи о виде траектории свободно падающих тел в неинерциальных системах отсчета (НСО) с точки зрения неподвижного наблюдателя, находящегося в центре подвижного базиса $\tau - n$, который движется по заданной плоской кривой $R_0(t) = ix_0(t) + jy_0(t)$ со скоростью $v_0 = \left|\dot{R}_0(t)\right|$. С помощью полученной ниже системы дифференциальных уравнений оказывается возможным находить любые траектории движения тел (в частности, свободно падающих под действием лишь силы тяжести) с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре НСО. При решении задачи предполагаются известными:

1. Все неинерциальные силы и физические факторы, действующие на тело, траекторию которого мы ищем в НСО;

2. Закон движения самой НСО (он считается заданным).

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

На рис. 1 на плоскости xoy показана кривая

$$R_0(t) = ix_0(t) + jy_0(t), \tag{1}$$

вместе со своим естественным (мгновенным подвижным) базисом $\tau - n$, состоящим из единичного вектора касательной τ и единичного вектора нормали n к этой кривой [11–13]. Базис $\tau - n$ естественным образом движется вдоль кривой со скоростью $v_0 = \left|\dot{R}_0(t)\right| = \left|\frac{dR_0(t)}{dt}\right|$, где $t-$ это абсолютный момент времени в нерелятивистском приближении ($v_0 \ll c$, где c — скорость света в вакууме), образуя при этом неинерциальную систему отсчета относительно наблюдателя, находящегося в центре неподвижной системы (xoy), орты которой, естественно, $i - j$.

Орты $i - j$ неподвижной системы (xoy) связаны с ортами $\tau - n$ НСО по правилу

$$\begin{cases} i = \tau\cos\alpha - n\sin\alpha, \\ j = \tau\sin\alpha + n\cos\alpha, \end{cases} \tag{2}$$

где α между касательной к кривой и положительным направлением оси ox, а ds — дифференциал длины дуги кривой, в силу соотношения $\frac{d\tau}{ds} = Kn$ [14–15], причем кривизна K определяется формулой

$$K = \frac{|\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \dot{y}_0\ddot{x}_0|}{\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

Итак, пусть точечное тело массы m находится в произвольной точке $\widetilde{M}(X,Y)$ (см. рис. 1), где координаты (X,Y) относятся к НСО, а наблюдатель движется вместе с ней и находится в ее начале. Точки $M(x,y)$ и $\widetilde{M}(X,Y)$ по своему смыслу совпадают, однако первая относится к неподвижной системе отсчета $i - j$, а вторая — к НСК $\tau - n$. Радиус–вектор точки

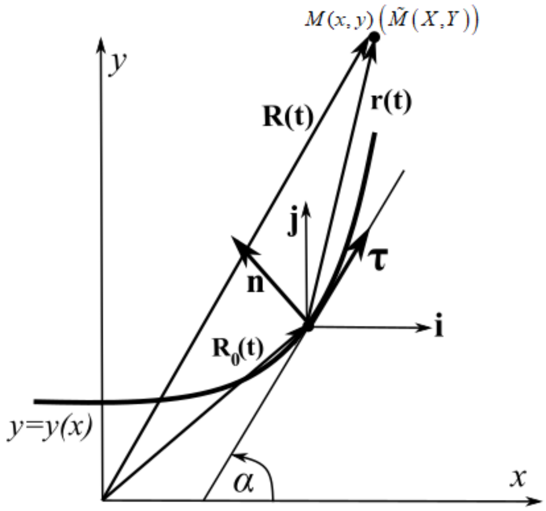

Рис. 1. *На этом рисунке схематически проиллюстрирована постановка задачи. Здесь кривая $y_0 = y_0(x)$ считается годографом вектор–функции $R_0\left(t\right) = ix_0\left(t\right) + jy_0\left(t\right)$.*

$M\left(x,y\right)$ согласно геометрии рис. 1 определяется как $R = R_0 + r$, где $r = \tau X + nY$. После дифференцирования вектора R получим выражение для абсолютной скорости движения тела относительно неподвижной системы $i - j$:

$$\mathbf{v}_{abs} = \dot{R} = \dot{R}_0 + \dot{r}, \tag{4}$$

при этом $\dot{R}_0(t) = v_0\tau$, а

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\tau X + nY\right) = \tau\dot{X} + n\dot{Y} + \dot{\tau}X + \dot{n}Y.$$

В силу известных соотношений [14–15]

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dt} = v_0 K n, \\ \frac{dn}{dt} = -v_0 K \tau, \end{cases}$$

выражение (4) для абсолютной скорости окончательно примет вид:

$$\mathbf{v}_{abs} = \tau\dot{X} + n\dot{Y} + \left[\tau\left(1 - KY\right) + nKX\right]v_0 = \tau\left[\dot{X} + \left(1 - KY\right)v_0\right] + \mathbf{n}\left(\dot{Y} + KXv_0\right), \tag{5}$$

где $\mathbf{v}_{rel} = \tau\dot{X} + n\dot{Y}$ — относительная скорость движения тела, т.е. скорость тела относительно НСО $\tau - n$, а вектор $\left[\tau\left(1 - KY\right) + nKX\right]v_0$ представляет собой линейную связь скорости тела в системе НСО $\tau - n$, движущейся вдоль кривой $R_0 = ix_0 + jy_0$ со скоростью $v_0 = \left|\dot{R}_0\right|$.

Повторное дифференцирование формулы (4) дает:

$$a_{abs} = \ddot{R} = \ddot{R}_0 + \ddot{r}, \tag{6}$$

где $\ddot{R} = a_{abs}$ — абсолютное ускорение в неподвижной системе $i - j$, причем

$$\ddot{R}_0 = \frac{d}{dt}\left(v_0\tau\right) = \dot{v}_0\tau + v_0^2 K n \tag{7}$$

определяет значения тангенциального $\dot{v}_0$ и центростремительного v_0^2K ускорений. Второе же слагаемое в правой части (6) имеет вид

$$\ddot{r} = \ddot{X}\tau + \ddot{Y}n + \left\{ -\tau\left(2v_0K\dot{Y} + \frac{d\left(v_0K\right)}{dt}y + v_0^2K^2X\right) + n\left(2v_0K\dot{X} + \frac{d\left(v_0K\right)}{dt}X - v_0^2K^2Y\right)\right\}, \tag{8}$$

где сумма $\ddot{X}\tau + \ddot{Y}n = a_{rel}$ — относительное ускорение в НСК $\tau - n$. Подстановка (7) и (8) в формулу (6) позволяет записать выражение для абсолютного ускорения тела, выраженное в координатах подвижного базиса $\tau - n$:

$$a_{abs} = a_{rel} + \tau\left(\dot{v}_0 - 2v_0K\dot{Y} + \frac{d\left(v_0K\right)}{dt}Y + v_0^2K^2X\right) + \\ + n\left(v_0^2K + 2v_0K\dot{X} + \frac{d\left(v_0K\right)}{dt}X - v_0^2K^2Y\right). \tag{9}$$

Структура формулы (11) позволяет ввести понятие не только относительного ускорения $a_{rel} = \ddot{X}\tau + \ddot{Y}n$, но и переносного

$$a_{mov} = \tau\left(\dot{v}_0 - 2v_0K\dot{Y} + \frac{d\left(v_0K\right)}{dt}Y + v_0^2K^2X\right) + n\left(v_0^2K + 2v_0K\dot{X} + \frac{d\left(v_0K\right)}{dt}X - v_0^2K^2Y\right). \tag{10}$$

Иными словами:

$$a_{abs} = a_{rel} + a_{mov}. \tag{11}$$

Сравнивая (11) с выражением второго закона Ньютона $a_{abs} = \frac{F}{m}$, запишем:

$$a_{rel} = \frac{F}{m} - a_{mov}, \tag{12}$$

или, учитывая соотношение $a_{rel} = \ddot{X}\tau + \ddot{Y}n$ и формулу (11):

$$a_{mov} = \tau\left(\dot{v}_0 - 2v_0K\dot{Y} + \frac{d\left(v_0K\right)}{dt}Y + v_0^2K^2X\right) + n\left(v_0^2K + 2v_0K\dot{X} + \frac{d\left(v_0K\right)}{dt}X - v_0^2K^2Y\right). \tag{13}$$

Проектируя (13) на орты $\tau - n$, получим систему дифференциальных уравнений, описывающую движение тела в НСО:

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{F_\tau}{m} - \dot{v}_0 + 2v_0K\dot{Y} - \frac{d(v_0K)}{dt}Y - v_0^2K^2X, \\ \ddot{Y} = \frac{F_n}{m} - v_0^2K - 2v_0K\dot{X} - \frac{d(v_0K)}{dt}X + v_0^2K^2Y. \end{cases} \tag{14}$$

Уравнения (14) позволяют нам находить траекторию движения тела в подвижном базисе $\tau - n$, если траектория движения наблюдателя, находящегося в центре базиса НСО, нам известна.

АНАЛИЗ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ (14) ПРИ ДВИЖЕНИИ НСО ПО ОКРУЖНОСТИ

Пусть НСО $\tau - n$ вращается по окружности радиуса R (см. рис. 2), а тело массой m падает под действием собственной силы тяжести (сопротивление среды не учитываем). В силу разложения (2) ясно, что

$$F = -mg\left(\sin\alpha \cdot \tau + \cos\alpha \cdot n\right). \tag{15}$$

Вначале рассмотрим случай равномерного движения НСО, т.е. считаем угловую скорость ω постоянной, $v_0 = \omega R = const$, $K = \frac{1}{R} = const$, а движение начинается из точки A против часовой стрелки. Ясно, что угол α зависит от времени линейно как $\alpha = \omega t$ (рис. 2). Тогда переносное ускорение согласно (13) можно записать в виде:

$$a_{mov} = \tau K \left(-2v_0\dot{Y} + v_0^2 KX\right) + nK\left(v_0^2 + 2v_0X - v_0^2KY\right).$$

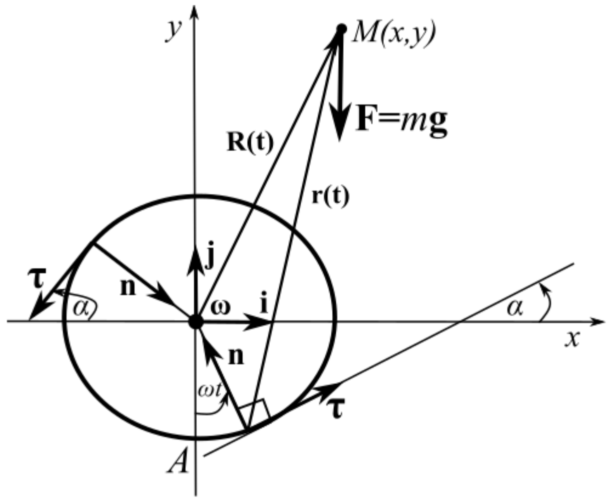

Рис. 2. *НСО непрерывным образом движется по окружности, увлекая за собой и угол α.*

Основная система уравнений (14) в этом случае преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{F_\tau}{m} + 2\omega\dot{Y} - \omega^2 X, \\ \ddot{Y} = \frac{F_n}{m} - \omega^2 R - 2\omega\dot{X} + \omega^2 Y. \end{cases} \tag{16}$$

а с учетом явного разложения (15) переходят в следующую систему

$$\begin{cases} \ddot{X} = -g\sin\alpha + 2\omega\dot{Y} - \omega^2 X, \\ \ddot{Y} = -g\cos\alpha - \omega^2 R - 2\omega\dot{X} + \omega^2 Y. \end{cases} \tag{17}$$

Результат компьютерного моделирования уравнений (17) показан на рисунке 3.

Исследуем теперь вопрос, как будет выглядеть траектория свободно падающего тела с точки зрения наблюдателя, движущегося неравномерным образом по окружности. Формула (13) для относительного ускорения при этом несколько усложняется:

$$\begin{aligned} a_{mov} = \tau \cdot \left(\dot{v}_0(t) - \frac{2v_0(t)}{R}\cdot\dot{Y}(t) + \frac{\dot{v}_0(t)}{R}\cdot Y(t) + \frac{v_0^2(t)}{R^2}\cdot X(t)\right) + \\ +n\cdot\left(\frac{v_0^2(t)}{R} + \frac{2v_0(t)}{R}\cdot\dot{X}(t) + \frac{\dot{v}_0(t)}{R}\cdot X(t) - \frac{v_0^2(t)}{R^2}\cdot Y(t)\right), \end{aligned} \tag{18}$$

и потому система (14) запишется как:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -g\sin\alpha + \dot{v}_0(t) - \frac{2v_0(t)}{R}\cdot\dot{Y}(t) + \frac{\dot{v}_0(t)}{R}\cdot Y(t) + \frac{v_0^2(t)}{R^2}\cdot X(t), \\ \ddot{Y} = -g\cos\alpha + \frac{v_0^2(t)}{R} + \frac{2v_0(t)}{R}\cdot\dot{X}(t) + \frac{\dot{v}_0(t)}{R}\cdot X(t) - \frac{v_0^2(t)}{R^2}\cdot Y(t). \end{cases} \tag{19}$$

Результат численного моделирования системы (19) для различных законов изменения скорости движения НСО показаны на рис. 4–5.

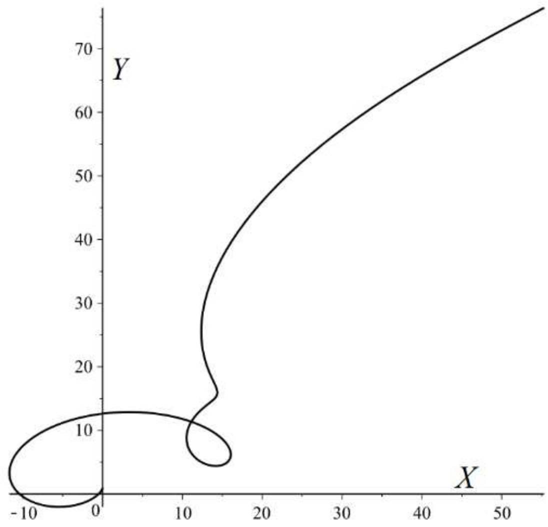

Рис. 3. *Траектория тела в системе $\tau - n$, совершающей 1,5 оборота по окружности радиуса $R = 1$ с частотой $\omega = 1$, $0 \leqslant t \leqslant 3\pi\omega^{-1}$. Начальные условия $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$.*

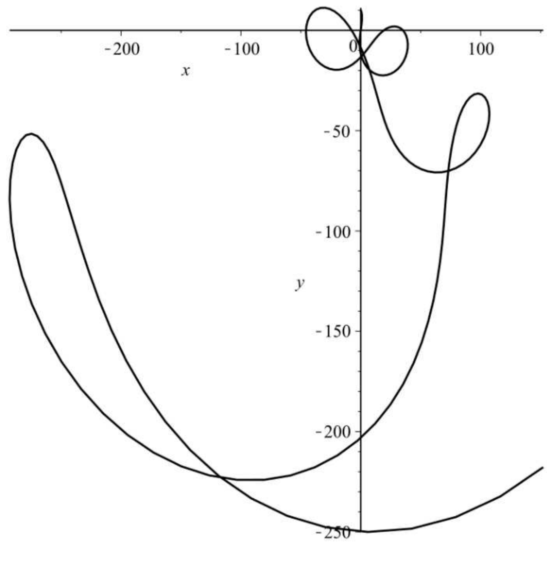

Рис. 4. *Траектория свободно падающего тела в НСО $\tau - n$, совершающей первые 2,5 оборота по окружности радиуса $R = 10$ с частотой $\omega(t) = \cos t$. Начальные условия $X(0) = 0, Y(0) = 10, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$.*

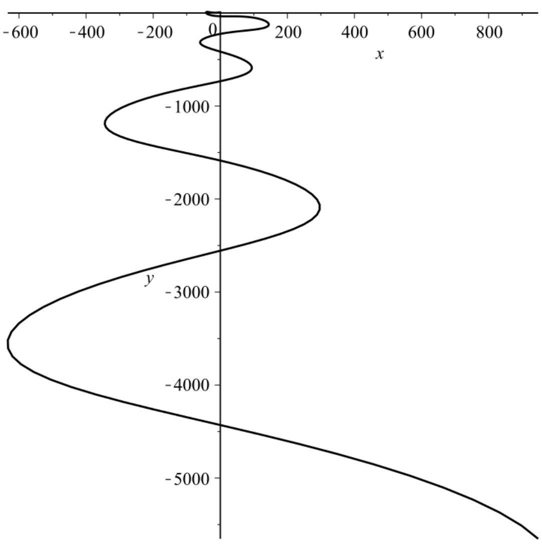

Рис. 5. *Траектория свободно падающего тела в системе $\tau - n$, совершающей первые 4,5 оборота по окружности радиуса $R = 10$ с угловой частотой $\omega(t) = Bessel\ (1,x)$. Начальные условия $X(0.001) = 0,Y(0.001) = 10,X'(0.001) = 0,Y'(0.001) = 0$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог вышеизложенному, отметим:

1. Впервые получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющая описывать траектории свободно падающих тела с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с базисом $\tau - n$ по заданной кривой $y = y(x)$;

2. С помощью компьютерного моделирования приведены зависимости $Y = Y(X)$ для свободно падающих тел в двух случаях: в условиях равномерного движении по окружности и при заданном законе изменения скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Механика / Л. Д. Ландау, И. Е. Лифшиц. — М. : Наука, 1988. — 216 с.

2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Механика / Д. В. Сивухин. — М. : Физматлит, 2010. — 560 с.

3. Стрелков, С. П. Механика / С. П. Стрелков. — М. : Наука, 1975. — 560 с.

4. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 2 т. Т. 1 / И. В. Савельев. — М. : Наука, 1982. — 432 с.

5. Вервейко, Н. Д. Пространственная траектория движения материальной точки в цилиндрической вращающейся системе отсчета в отсутствии поперечных усилий / Н. Д. Вервейко, Е. А. Тришина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 2. — С. 26–29.

6. Егоров, Г. В. О силах инерции / Г. В. Егоров // Вестник Брянского государственного университета. — 2013. — № 1. — С. 223–226.

7. Закиров, Р. Р. Силы инерции на примере опыта с вращающейся платформой / Р. Р. Закиров, И. И. Латыпов // Физическое образование в ВУЗах. — 2014. — Т. 20, № 4. — С. 39–46.

8. Денисов, М. М. Оптические эффекты во вращающейся системе отсчета / М. М. Денисов, Н. В. Кравцов, И. В. Кривченков // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической

физики. — 2007. — Т. 85, № 7–8. — С. 498–500.

9. Гайнутдинов, О. И. О преимуществах использования неинерциальных систем отсчета при решении некоторых физических задач / О. И. Гайнутдинов // Вестник Тамбовского государственного технического университета. — 2012. — Т. 18, № 2. — С. 441–448.

10. Хатмуллина, М. Т. Моделирование движения тела в вязкой среде в неинерциальной системе отсчета / М. Т. Хатмуллина // Проблемы современного физического образования. Сборник материалов V Всероссийской научно-методической конференции. — Уфа, 2019. — С. 110–112.

11. Гладков, С. О. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. — 2016. — № 1. — 161101–1–5.

12. Гладков, С. О. О форме брахистохроны, вращающейся в вертикальной плоскости / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2022. — № 78. — С. 86–98.

13. Gladkov, S. O. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases / S. O. Gladkov, S. B. Bogdanova // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — V. 245, № 4. — P. 528–537.

14. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Физматлит, 1962. — 607 с.

15. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Т. 3 / В. И. Смирнов. — М. : Физматлит, 1967. — 656 с.

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshits I.Ye. Theoretical physics. Mechanics. [Landau L.D., Lifshits I.Ye. Teoreticheskaya fizika. Mekhanika]. Moscow, 1988, 216 p.

2. Sivukhin D.V. General course of physics. Mechanics. [Sivukhin D.V. Obshchiy kurs fiziki. Mekhanika]. Moscow, 2010, 560 p.

3. Strelkov S.P. Mechanics. [Strelkov S.P. Mekhanika]. Moscow, 1975, 560 p.

4. Savel'yev I.V. Course of general physics. V. 1. [Savel'yev I.V. Kurs obshchey fiziki. T. 1]. Moscow, 1982, 432 p.

5. Verveyko N.D., Trishina Ye.A. Spatial trajectory of movement of a material point in cylindrical rotating system of readout in absence of cross-section efforts. [Verveyko N.D., Trishina Ye.A. Prostranstvennaya trayektoriya dvizheniya material'noy tochki v tsilin-dricheskoy vrashchayushcheysya sisteme otscheta v otsutstvii poperechnykh usiliy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 2, pp. 26–29.

6. Egorov G.V. On the inertia forces. [Yegorov G.V. O silakh inertsii]. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta — The Bryansk state university herald*, 2013, no. 1, pp. 223–226.

7. Zakirov R.R., Latypov I.I. Forces of inertia on the example of an experiment with a rotating platform. [Zakirov R.R., Latypov I.I. Sily inertsii na primere opyta s vrashchayushcheysya platformoy]. *Fizicheskoye obrazovaniye v vuzakh — Physics in higher education*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 39–46.

8. Denisov M.M., Kravtsov N.V., Krivchenkov I.V. Optical effects in a rotating frame of reference. [Denisov M.M., Kravtsov N.V., Krivchenkov I.V. Opticheskiye effekty vo vrashchayushcheysya sisteme otscheta]. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki — JETP LETTERS*, 2007, vol. 85, no. 7–8, pp. 498–500.

9. Gaynutdinov O.I. On the Benefits of Using Non-Inertial Reference Systems in Solving Certain Physical Tasks. [Gaynutdinov O.I. O preimushchestvakh ispol'zovaniya neinertsial'nykh sistem otscheta pri reshenii nekotorykh fizicheskikh zadach]. *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta — Transactions TSTU*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 441–448.

10. Khatmullina M.T. Mogeling of body motion in a viscous medium in a non-inertial frame of reference. [Khatmullina M.T. Modelirovaniye dvizheniya tela v vyazkoy srede v neinertsi-al'noy sisteme otscheta]. Problems of modern physical education. Collection of materials of the V All-Russian Scientific and Methodological Conference. Ufa: 2019, pp. 110–112.

11. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Geometrical phase transition in the brachistochrone transition. [Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Geometricheskiy fazovyy perekhod v zadache o brakhistokhrone]. *Uchenyye Zapiski Fizicheskogo Fakul'teta Moskovskogo Universiteta — Memoires of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, 2016, no. 1, pp. 161101–1–5.

12. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On the shape of the brachistichrone rotating in a vertical plane. [Gladkov S.O., Bogdanova S.B. O forme brakhistokhrony, vrashchayushcheysya v vertikal'noy ploskosti]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2022, no. 78, pp. 86–98.

13. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. Journal of Mathematical Sciences, 2020, vol. 245, no. 4, pp. 528–537.

14. Fikhtengolts G.M. Course of differential and integrak calculus. V. 1. [Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 1]. Moscow, 1962, 607 p.

15. Smirnov V.I. Course of higher mathematics. V. 3. [Smirnov V.I. Kurs vysshey matematiki. T. 3]. Mocsow, 1967, 656 p.

Богданова Софья Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры 311 “Прикладные программные средства и математические методы” Московского авиационного института (МАИ), Москва, Россия
E-mail: sonjaf@list.ru

Bogdanova Sophie B., Candidate of Physics and Mathematics, associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
E-mail: sonjaf@list.ru

Гладков Сергей Октябринович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры 311 “Прикладные программные средства и математические методы” Московского авиационного института (МАИ), Москва, Россия
E-mail: sglad51@mail.ru

Gladkov Sergey O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
E-mail: sglad51@mail.ru