УДК 517

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ВАЛЛЕ–ПУАССЕНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

Ал-Гарайхоли Иван Абдулкариим Хузам, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.09.2022 г.

Аннотация. В работе доказывается аналог теоремы Валле–Пуссена об оценке снизу расстояния между двумя последовательными нулями решения дифференциального уравнения с негладкими решениями.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, негладное решение, теорема Валле–Пуссена, оценка снизу.

ANALOGUE OF VALLÉY-POISSIN'S THEOREM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH NONSMOOTH SOLUTIONS

Al-Garayholi Evan Abdulkareem Huzam, S. A. Shabrov

Abstract. The paper proves an analogue of the Vallée-Poussin theorem on a lower estimate of the distance between two successive zeros of a solution to a differential equation with nonsmooth solutions.

Keywords: differential equation, non-smooth solution, Vallée-Poussin theorem, lower bound.

Результаты этой работы дополняют качественную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с негладкими решениями, разработанной Ю. В. Покорным и его учениками [1–7]. Часть результатов построенной теории была перенесена на краевые задачи четвертого и шестого порядков [8–19].

Рассмотрим уравнение

$$u''_{x\sigma} + q(x)u = 0 \tag{1}$$

с производными по мере. Уравнение (1) задано на специальном расширении отрезка $[0;\ell]$, которое строится следующим образом.

Пусть $\sigma(x)$ — строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция, порождающая на $[0;\ell]$ меру; $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. В случае, когда $S(\sigma) \neq \varnothing$, на отрезке $[0;\ell]$ появляются атомы меры: точки, классическая мера Лебега которых равна нулю, а мера σ — нет.

На $[0;\ell]$ введем метрику $\rho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. В интересующем нас случае: $S(\sigma) \neq \varnothing$, метрическое пространство $([0;\ell];\rho)$ не является полным. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на тройку собственных элементов $\{\xi_-, \xi, \xi_+\}$, мы обозначим $\overline{[0;\ell]}_\sigma$.

Уравнение (1) в точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$, понимается как равенство

$$\Delta u'_x(\xi) + u(\xi)q(\xi) = 0,$$

где $\Delta\varphi(\xi) = \varphi(\xi+0) - \varphi(\xi-0)$ — полный скачок функции $\varphi(x)$ в точке ξ.

Решение (1) ищется в классе абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, первая производная $u'_x(x)$ которых σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1 (Аналог теоремы Валле–Пуассена)**.** *Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \ell$ — два последовательных нуля решения $u(x)$ уравнения (1). Кроме того, пусть $|q(x)| \leqslant R$ для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\sigma$. Обозначим через h разность $x_2 - x_1$, т. е. $h = x_2 - x_1$. Тогда,*

$$h \geqslant \sqrt{\frac{1}{R\left(\sigma(\ell) - \sigma(0)\right)}}. \tag{2}$$

Доказательство. Для всякого x, принадлежащего множеству $\overline{[x_1+0;x_2-0]}_S$, имеем

$$hu'_x(x) = \int\limits_{x_1+0}^{x} (s - x_1)\, du'_x(s) - \int\limits_{x}^{x_2-0} (x_2 - s)\, du'_x(s). \tag{3}$$

Для доказательства в выражении

$$\int\limits_{x_1+0}^{x} (s - x_1)\, du'_x(s) - \int\limits_{x}^{x_2-0} (x_2 - s)\, du'_x(s)$$

каждый интеграл проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{x_1+0}^{x} (s - x_1)\, du'_x(s) - \int\limits_{x}^{x_2-0} (x_2 - s)\, du'_x(s) = \\ &\qquad = (s - x_1)u'_x(s)\Big|_{x_1+0}^{x} - \int\limits_{x_1+0}^{x} u'_x(s)\, d(s - x_1) - \\ &\qquad - (x_2 - s)u'_x(s)\Big|_{x}^{x_2-0} + \int\limits_{x}^{x_2-0} u'_x(s)\, d(x_2 - s) = \\ &\qquad = (x - x_1)u'_x(x) + (x_2 - x)u'_x(x) - \int\limits_{x_1+0}^{x_2-0} u'_x(s)\, ds = hu'_x(x), \end{aligned} \tag{4}$$

что и требовалось доказать.

Из равенства (1) вытекает

$$u'_x(x) = u'_x(0+0) - \int\limits_{0+0}^{x} u(s)q(s)\, d\sigma(s), \tag{5}$$

где $x \in \overline{[0;\ell]}_S$.

Пусть æ — максимум $|u'_x(x)|$ на множестве $\overline{[x_1+0;x_2-0]}_S$. Тогда, из равенств

$$u(x) = \int\limits_{x_1+0}^{x} u'_x(s)\,ds \quad \text{и} \quad u(x) = -\int\limits_{x}^{x_2-0} u'_x(s)\,ds, \tag{6}$$

так как $u(x_1) = u(x_2) = 0$, получаем

$$|u(x)| \leqslant æ(x - x_1) \quad \text{и} \quad |u(x)| \leqslant æ(x_2 - x) \tag{7}$$

для всех $x \in [x_1; x_2]$. Из (7) следуют неравенства

$$(x - x_1)|u(x)| \leqslant æ(x - x_1)(x_2 - x) \tag{8}$$

и

$$(x_2 - x)|u(x)| \leqslant æ(x - x_1)(x_2 - x), \tag{9}$$

справедливых для всех $x \in [x_1; x_2]$.

Равенство (3), с учетом (5), принимает вид

$$hu'_x(x) = -\int\limits_{x_1+0}^{x} (s - x_1)q(s)u(s)\,d\sigma(s) + \int\limits_{x}^{x_2-0} (x_2 - s)q(s)u(s)\,d\sigma(s). \tag{10}$$

Из равенства (10) получаем оценку

$$h \cdot |u'_x(x)| \leqslant R\int\limits_{x_1+0}^{x} (s - x_1)|u(s)|\,d\sigma(s) + R\int\limits_{x}^{x_2-0} (x_2 - s)|u(s)|\,d\sigma(s), \tag{11}$$

или, с учетом (8), (9),

$$h \cdot |u'_x(x)| \leqslant R \cdot æ\int\limits_{x_1+0}^{x} (s - x_1)(x_2 - s)\,d\sigma(s) + R \cdot æ\int\limits_{x}^{x_2-0} (s - x_1)(x_2 - s)\,d\sigma(s) =$$
$$= R \cdot æ\int\limits_{x_1+0}^{x_2-0} (s - x_1)(x_2 - s)\,d\sigma(s). \tag{12}$$

Так как для всех $x \in [x_1; x_2]$ справедливо неравенство $(x - x_1)(x_2 - x) \leqslant h^2$, то оценку (12) можно переписать в следующем виде

$$\frac{|u'_x(x)|}{æ} \leqslant R \cdot h^2 \cdot (\sigma(\ell) - \sigma(0)). \tag{13}$$

Неравенство (13) справедливо для всех $x \in \overline{[x_1+0;x_2-0]}_S$. Поэтому из (13) мы находим

$$1 \leqslant R \cdot h^2 \cdot (\sigma(\ell) - \sigma(0)). \tag{14}$$

Из (14) вытекает требуемая оценка (2). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

5. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

8. Тимашова, Е. В. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2–1. — С. 3–8.

9. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

10. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

11. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

12. Шабров, С. А. Об одной спектральной задаче четвертого порядка с производными Радона–Никодима и со спектральным параметром / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 163–167.

13. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Головко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

14. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи с производными по мере и спектральным параметром при второй производной / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина, М. В. Шаброва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 203–207.

15. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

16. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

17. Borodina, E. A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E. A. Borodina, S. A. Shabrov, M. V. Shabrova // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

18. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives / S. A. Shabrov, O. M. Ilina, E. A. Shaina, D. A. Chechin // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012044.

19. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 3. — С. 93–100.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

4. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

8. Ivannikova T.A., Timashova E.V, Shabrov S.A. On Necessary Conditions for a Minimum

of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa i nulevym koe'fficientom pri starshej proizvodnoj na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2–1, pp. 3–8.

9. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

10. Shabrov S.A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an integral Stieltjes. [Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

11. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

12. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M. On one spectral problem of the fourth order with Radon–Nikodim derivatives and with spectral parameter at the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M. Ob odnoyj spektral'noyj zadache chetvertogo poryadka s proizvodnymi Radona–Nikodima i so spektral'nym parametrom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 163–167.

13. Shabrov S.A., Golovko N.I. About the velocity of increase of eigenvalue of a different order spectral problem with derivative on the measure. [Shabrov S.A., Golovko N.I. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj raznoporyadkovoyj spektral'noyj zadachi s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 186–195.

14. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M., Shabrova M.V. On the rate of growth of the eigenvalues of one spectral problem with derivatives of the measure and a spectral parameter in the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M., Shabrova M.V. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj spektral'noyj zadachi s proizvodnymi po mere i spektral'nym parametrom pri vtoroyj proizvodnoyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 203–207.

15. Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About one boundary value problem of the sixth order with a strong nonlinearity. [Borodina E.A., Golovanyova F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj granichnoyj zadache shestogo poryadka s sil'noyj nelineyjnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 65–69.

16. Davydova M.B., Shabrov S.A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

17. Borodina E.A., Shabrov S.A., Shabrova M.V. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity. Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012023.

18. Shabrov S.A., Ilina O.M., Shaina E.A., Chechin D.A. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012044.

19. Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davidova M.B. On the number of solutions of the nonlinear boundary problem of the fourth order with derivatives by measure. [Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davydova M.B. O chisle reshenij nelinejnoj granichnoj zadachi chetvertogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 93–100.

Ал-Гарайхоли Иван Абдулкариим Хузам, аспирант математического факультета, Воронеж, Россия
E-mail: evan.abd3@gmail.com

Al-Garayholi Evan Abdulkareem Huzam, Postgraduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh, Russia
E-mail: evan.abd3@gmail.com

Шабров Сергей Александрович, доктор физико–математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru