

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ГАЗА ВНУТРИ ТОРНАДО

Ю. А. Чиркунов, Е. О. Пикмуллина

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 08.01.2023 г.

Аннотация. Настоящая статья посвящена математическому моделированию движения частиц газа внутри торнадо с помощью инвариантных подмоделей модели, задаваемой системой дифференциальных уравнений теплового движения газа в сильно разреженном пространстве. Найдены все существенно различные (не связанные точечными преобразованиями) подмодели ранга 1, инвариантные относительно подгрупп восьми-параметрической группы, порождаемой операторами переноса, растяжения, вращения и гиперболического вращения (оператор Лоренца). Получены основные механические характеристики описываемого ими течения газа. Приведены условия существования этих подмоделей. Для каждой подмодели получены фактор системы, и в результате численного решения построены траектории движения частиц газа при заданных в начальный момент их местоположениях и скоростях.

Ключевые слова: движение частиц газа внутри торнадо, массовые лагранжевы переменные, инвариантные подмодели.

MATHEMATICAL MODELING OF THE MOVEMENT OF GAS PARTICLES INSIDE A TORNADO

Yu. A. Chirkunov, E. O. Pikmullina

Abstract. This article is devoted to mathematical modeling of the motion of gas particles inside a tornado using invariant submodels of the model defined by a system of differential equations for the thermal motion of gas in a highly rarefied space. All essentially different (not related by point transformations) submodels of rank 1 that are invariant with respect to subgroups of the eight-parameter group generated by the translation, extension, rotation, and hyperbolic rotation operators (Lorentz operator) are found. The main mechanical characteristics of the gas flow described by them are obtained. Conditions for the existence of these submodels are given. For each submodel, the system factor is obtained and, as a result of a numerical solution, the trajectories of the movement of gas particles are constructed for their locations and velocities given at the initial moment.

Keywords: motion of gas particles inside a tornado, mass Lagrangian variables, invariant submodels.

ВВЕДЕНИЕ

Основные модели движения газа в трехмерном пространстве были получены в работе [1]. В списке этих моделей содержится модель, описывающая тепловое движение газа в разреженном пространстве. Одномерная версия этой модели была использована для решения задачи о сильном взрыве в работах [2–4]. В работах [5–7] рассматривался n -мерный случай ($n \geq 2$) этой модели, для которого было выполнено групповое расслоение относительно бесконечной подгруппы основной группы системы уравнений, описывающих эту модель. Для заданного

начального распределения давления, с помощью специального выбора массовых лагранжевых переменных, был осуществлен переход к редуцированной системе дифференциальных уравнений, у которой число независимых переменных на единицу меньше, чем у исходной системы. В работе [8] подробно исследовался трехмерный случай ($n = 3$). Были найдены все нетривиальные законы сохранения первого порядка и получены следующие точные решения: 1) решение, описывающее состояние среды за фронтом ударной волны после очень сильного взрыва, 2) решение, которое зависит от времени по экспоненциальному закону, и описывает следующие динамические процессы в сильно разреженной среде: или рассеяние частиц газа до бесконечности, или локализацию частиц газа вблизи неподвижной поверхности, 3) решение, которое описывает в сильно разреженном пространстве динамический процесс, в котором каждая частица совершает периодические колебания, 4) решение, которое описывает состояние среды после проведения серии очень сильных взрывов, 5) решения, которые описывают процессы, происходящие внутри торнадо. Установлено, что, в сильно разреженном пространстве для каждого заданного начального распределения давления, в каждый момент времени все частицы газа локализованы на $(n - 1)$ -мерной поверхности, движущейся в этом пространстве. В каждой точке этой поверхности вектор ускорения коллинеарен ее вектору нормали.

Настоящая статья посвящена математическому моделированию движения частиц газа внутри торнадо с помощью инвариантных подмоделей модели, задаваемой системой дифференциальных уравнений теплового движения газа в сильно разреженном пространстве.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Модель теплового движения газа в трехмерном разреженном пространстве определяется следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$u_t + (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \rho_t + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, p_t + u \cdot \nabla p = 0, \quad (1)$$

где t — время, $x = x(x, y, z) \in R^3$, $u = u(t, x) \in R^3$ — вектор скорости, $\rho = \rho(t, x)$ — плотность, $p = p(t, x)$ — давление.

Следуя работам [5–8] преобразуем эту систему к более удобному для исследования виду. Пусть переменные $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ суть начальные значения переменных $x = x(t, \xi) = (x, y, z)$, т. е. $x(0, \xi) = \xi$.

С помощью этих переменных система (1) записывается [5–8] в виде

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|^{-1} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^T x_{tt} + \frac{1}{\rho_0} p_\xi = 0, \rho = \rho_0 \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|^{-1}, p_t = 0, \quad (2)$$

где $\rho_0 = \rho_0(\xi)$ — начальное распределение плотности. Решением последнего уравнения системы (2) является $p = p(\xi)$, где $p(\xi)$ — заданная функция, определяющая начальное распределение давления. Так как давление сохраняется в частице, то это переменная Лагранжа.

После замены переменных:

$$\xi' = \xi'(\xi), \eta' = \eta'(\xi), \zeta' = p(\xi), \quad (3)$$

такой, что

$$\frac{\partial(\xi', \eta', p)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \rho_0(\xi), \quad (4)$$

система уравнений (2) преобразуется [5–8] к эквивалентной системе (штрихи опущены)

$$x_{tt} + x_\xi \times x_\eta = 0 \quad (5)$$

Вектор скорости и плотность определяются по формулам

$$u = x_t, \frac{1}{\rho} = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|.$$

Уравнения (5) не содержит переменную ζ и производную $\partial_\zeta x$. Таким образом, специальный выбор массовых переменных Лагранжа, по формулам (3) и (4) позволяет преобразовать систему (1) к уравнениям (5), содержащим только три независимые переменные. Переменная $\zeta = p$ является параметром, который, с учетом (3) и (4), определяет переменные уравнений (5). Это означает, что имеет место расслоение сильно разреженного газа по отношению к давлению. А именно, в сильно разреженном пространстве для каждого заданного начального распределения давления, в каждый момент времени все частицы газа локализованы [5–8] на двумерной поверхности S_t , определяемой уравнением $x = x(t, \xi, \eta)$. Поверхность S_t с течением времени движется в этом пространстве. В каждой точке поверхности S_t , вектор ускорения коллинеарен вектору нормали к этой поверхности.

Далее предполагается, что начальное распределение давления в сильно разреженном газе задано.

Система уравнений (5) является основным объектом исследования в настоящей статье.

2. ГРУППОВОЕ СВОЙСТВО

Основная группа Ли преобразований уравнений (5) найдена в работе [5]. Она является бесконечной псевдогруппой Ли преобразований и порождается операторами:

$$P_0 = \partial_t, R_1 = t\partial_t + \xi\partial_\xi + \eta\partial_\eta, R_2 = t\partial_t - 2x \cdot \partial_x, Q = g_\eta\partial_\xi - g_\xi\partial_\eta,$$

$$X = \partial_x, Y = t\partial_x, Z = x \times \partial_x,$$

где $g = g(\xi, \eta)$ — произвольная функция. Для $g(\xi, \eta) = \eta$ оператор Q является инфинитезимальным оператором переноса $P_1 = \partial_\xi$, а для $g(\xi, \eta) = \xi$ — инфинитезимальным оператором переноса $P_2 = \partial_\eta$. Для $g(\xi, \eta) = \xi\eta$ оператор Q является инфинитезимальным оператором растяжения $R_3 = \xi\partial_\xi - \eta\partial_\eta$. Для $g(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2)$ оператор Q является инфинитезимальным оператором вращения $Q_1 = \eta\partial_\xi - \xi\partial_\eta$ а для $g(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)$ — инфинитезимальным оператором Лоренца $Q_2 = \eta\partial_\xi + \xi\partial_\eta$.

Далее рассматривается инвариантность системы (5) относительно группы Ли преобразований G_8 , порождаемой операторами

$$P_0, P_1, P_2, R_1, R_2, R_3, Q_1, Q_2 \tag{6}$$

Подмодели, описываемые инвариантными решениями ранга 1 уравнений (5), будем называть инвариантными подмоделями ранга 1 модели теплового движения газа в разреженном пространстве.

Для классификации инвариантных подмоделей ранга 1 модели, задаваемой системой (5), т.е. для получения существенно различных (не связанных точечными преобразованиями) инвариантных подмоделей строится оптимальная система неподобных двумерных подалгебр алгебры Ли A_8 с базисом (6).

Действие группы внутренних автоморфизмов алгебры Ли A_8 на эту алгебру Ли разбивает ее на непересекающиеся классы подобных подалгебр. Выбор в каждом таком классе простейшего представителя дает оптимальную систему неподобных подалгебр алгебры Ли A_8 . Каждой подалгебре из оптимальной системы подалгебр соответствует порождаемая ею подгруппа группы G_8 , допускаемой системой (5). Применение критерия инвариантности функции относительно группы Ли преобразований [7, 11] позволяет получить в пространстве

$R^6(t, \xi, \eta, x, y, z)$ универсальный инвариант каждой подгруппы из построенной оптимальной системы подгрупп.

Решением системы (5) является вектор-функция

$$x = tu(\xi, \eta) + x_0(\xi, \eta),$$

где $u = u(\xi, \eta)$ и $x_0 = x_0(\xi, \eta)$ – произвольные функции. Подмодель, задаваемая этим решением, описывает течение газа, при котором каждая частица движется с постоянной скоростью $u = u(\xi, \eta)$ и имеет нулевое ускорение. Эта подмодель будет называться тривиальной.

Приведенная ниже таблица определяет оптимальную систему двухпараметрических подгрупп, содержащую только такие подгруппы H , для которых инвариантные подмодели, определяемые инвариантными H -решениями уравнений (5), не являются тривиальными. Входящие в эту таблицу величины α, β являются произвольными постоянными, удовлетворяющими указанным ниже ограничениям.

Таблица 1. Двухпараметрические подгруппы $\theta_{2,k}$ и их универсальные инварианты.

k	Базис подалгебры	Универсальные инварианты
1	$R_1 + \alpha R, \beta R_2 + Q_1$	$t(\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{\alpha+1}{2}} \exp(\beta \operatorname{arctg}(\xi^{-1}\eta)), (\xi^2 + \eta^2)^\alpha \exp(-2\beta \operatorname{arctg}(\xi^{-1}\eta)) x$
2	$P_2 + R_2, R_1 + R_3$	$t\xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta), \exp(2\eta) x$
3	$R_1 + \alpha R_2, \beta R_2 + Q_1 + Q_2$	$t\eta^{-\alpha-1} \exp(-\beta\xi(2\eta)^{-1}), \eta^{2\alpha} \exp(\beta\xi\eta^{-1}) x$
4	$R_1 + \alpha R_2, 2\beta R_2 + R_3$	$t\xi^{-\frac{\alpha+1+2\beta}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}}, \xi^{\alpha+2\beta} \eta^{\alpha-2\beta} x$
5	$P_0 + P_1, R_1 + \alpha(R_2 + R_3) + Q_1 + Q_2$ ($\alpha(\alpha-1) \neq 0$)	$(\alpha(t-\xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}, \eta^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} x$
6	$P_0 + P_1, R_2 + R_3$	$t\eta^{-\alpha-1} \exp(-\beta\xi(2\eta)^{-1}), \eta^{2\alpha} \exp(\beta\xi\eta^{-1}) x$
7	$P_0 + P_1, R_1 + \alpha(R_2 + R_3)$ ($\alpha(\alpha-1) \neq 0$)	$(t-\xi) \eta^{\frac{1+\alpha}{\alpha-1}}, \eta^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} x$

3. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ РАНГА 1

В силу таблицы 1 мы можем записать общий вид всех инвариантных решений ранга 1, задающих инвариантные подмодели ранга 1. Исследуем эти подмодели.

Во всех последующих формулах величины $c_1 > 0, c_2, c_3$ являются произвольными постоянными, а $\theta = \theta(t, \xi, \eta)$ – угол между $w = w(t, \xi, \eta)$ и $w' = w'(t, \xi, \eta)$.

3.1. Инвариантное $\theta_{2,1} \langle R_1 + \alpha R, \beta R_2 + Q_1 \rangle$ – решение

Это решение задает подмодель, которая описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$x = (\xi^2 + \eta^2)^{-\alpha} \exp\left(-2\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right) w(\lambda), \lambda = t(\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{\alpha+1}{2}} \exp\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right). \quad (7)$$

Подстановка (7) в систему уравнений (5) дает фактор систему

$$w'' + 2\beta\lambda w' \times w = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что основные механические характеристики этого течения газа определяются по формулам:

$$|x| = \frac{\exp\left(2\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^\alpha} f(\xi, \eta), |u| = \frac{c_1 \exp\left(3\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3\alpha+1}{2}}},$$

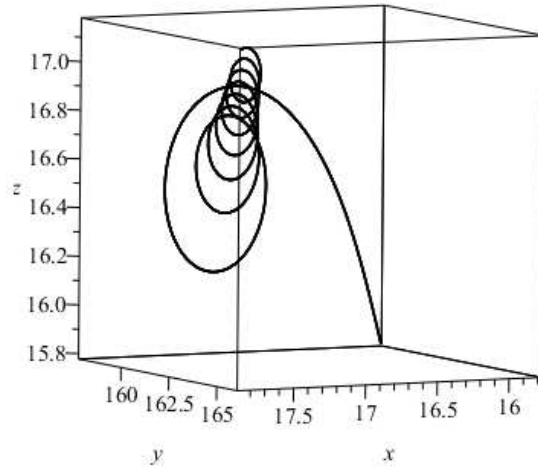


Рис. 1. Траектория движения частицы $\xi = 0.8; \eta = 0.8$ при $t > 0$.

$$|a| = \frac{2c_1 |\beta| t \exp\left(5\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right) (\sin \theta) f(\xi, \eta)}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{5\alpha+3}{2}}},$$

$$f(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{c_1^2 t^2 \exp\left(2\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^{\alpha+1}} + \frac{c_2 t \exp\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} + c_3}$$

Вектор скорости u перпендикулярен вектору ускорения a .

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$, то эта подмодель существует только в двух случаях:
либо при

$$\frac{t \exp\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} < -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3}\right),$$

либо при

$$\frac{t \exp\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} > -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3}\right).$$

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$, то эта подмодель существует при всех t, ξ, η .

Пусть $\alpha = 1, \beta = 2$, а для частицы $\xi = 0.8; \eta = 0.8$ в момент времени $t = t_0 = 0$ заданы ее место местоположение $x = x_0 = \frac{\exp \pi}{1.28} (1; 10; 1)$ и скорость $u = u_0 = \frac{\exp(2\pi)}{(1.28)^2} (0.2; 0.3; 0.4)$. В этом случае начальные условия для системы (8) имеют вид

$$w(0) = (1; 10; 1), w'(0) = (0.2; 0.3; 0.4). \quad (9)$$

Численное решение методом Рунге-Кутга-Фельберга (4–5 порядка точности) задачи Коши (8), (9) и применение формул (7) позволяет получить траекторию движения этой частицы газа в фазовом пространстве, при $t > 0$. Эта траектория представлена на рисунке 1.

3.2. Инвариантное $\theta_{2,2}\langle P_2 + R_2, R_1 + R_3 \rangle$ – решение

Это решение задает подмодель, которая описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$x = \exp(-2\eta) w(\lambda), \lambda = t\xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta). \quad (10)$$

Функция w является решением системы

$$w'' + \lambda w' \times w = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Основные механические характеристики этого течения газа определяются по формулам:

$$|x| = \exp(-2\eta) \sqrt{c_1^2 t^2 \xi^{-1} \exp(-2\eta) + c_2 t \xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta) + c_3}, |u| = c_1 \xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-3\eta),$$

$$|a| = c_1 t \xi^{-\frac{3}{2}} \exp(-5\eta) (\sin \theta) \sqrt{c_1^2 t^2 \xi^{-1} \exp(-2\eta) + c_2 t \xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta) + c_3}.$$

Вектор скорости u перпендикулярен вектору ускорения a .

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$, то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$t\xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta) < -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),$$

либо при

$$t\xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta) > -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right).$$

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$, то эта подмодель существует при всех t, ξ, η .

Пусть для частицы $\xi = 0.5; \eta = 0.5$ в момент времени $t = t_0 = 0$ заданы ее место место-положение $x = x_0 = (0; 10e^{-1}; 0)$ и скорость $u = u_0 = \sqrt{2} (2; 3; 4)$. В этом случае начальные условия для системы (11) имеют вид

$$w(0) = (1; 10; 1), w'(0) = (0.2; 0.3; 0.4). \quad (12)$$

Численное решение методом Рунге-Кутты-Фельберга (4–5 порядка точности) задачи Коши (11), (12) и применение формул (10) позволяет получить траекторию движения этой частицы газа в фазовом пространстве, при $t > 0$. Эта траектория представлена на рисунке 2.

3.3. Инвариантное $\theta_{2,3}\langle R_1 + \alpha R_2, \beta R_2 + Q_1 + Q_2 \rangle$ – решение

Это решение задает подмодель, которая описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$x = \eta^{-2\alpha} \exp\left(-\frac{\beta\xi}{\eta}\right) w(\lambda), \lambda = t\eta^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta\xi}{2\eta}\right). \quad (13)$$

Функция w является решением системы

$$w'' + (\alpha - \alpha\beta - \beta) \lambda w' \times w = \mathbf{0}. \quad (14)$$

Основные механические характеристики этого течения газа определяются по формулам:

$$|x| = \eta^{-2\alpha} \exp\left(-\frac{\beta\xi}{\eta}\right) f(\xi, \eta), |u| = c_1 |\eta^{-3\alpha-1}| \exp\left(-\frac{3\beta\xi}{2\eta}\right),$$

$$|a| = c_1 t (\sin \theta) |(\alpha\beta + \beta - \alpha) \eta^{-5\alpha-3}| \exp\left(-\frac{5\beta\xi}{2\eta}\right) f(\xi, \eta),$$

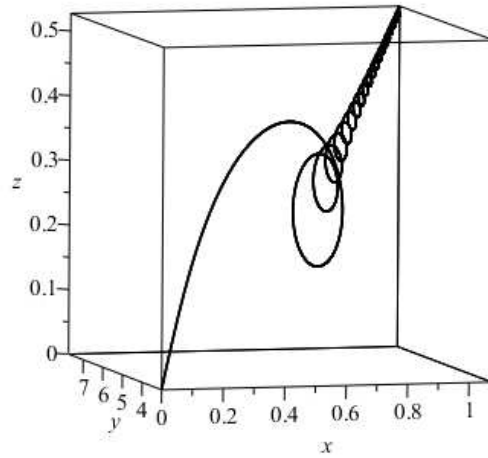


Рис. 2. Траектория движения частицы $\xi = 0.5; \eta = 0.5$ при $t > 0$.

$$f(\xi, \eta) = \sqrt{c_1^2 t^2 \eta^{-2\alpha-2} \exp\left(-\frac{\beta\xi}{\eta}\right) + c_2 t \eta^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta\xi}{2\eta}\right) + c_3}$$

Вектор скорости u перпендикулярен вектору ускорения a .

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$, то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$t \eta^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta\xi}{2\eta}\right) < -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3}\right),$$

либо при

$$t \eta^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta\xi}{2\eta}\right) > -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3}\right).$$

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$, то эта подмодель существует при всех t, ξ, η .

Пусть $\alpha = 3, \beta = 2$, а для частицы $\xi = 0.5; \eta = 0.5$ в момент времени $t = t_0 = 0$ заданы ее место местоположение $x = x_0 = \left(\frac{5}{32 \exp 2}; 0; 0\right)$ и скорость $u = u_0 = \frac{1}{2^{10} \exp 3} (2; 3; 4)$. В этом случае начальные условия для системы (14) имеют вид

$$w(0) = (10; 0; 0), \quad w'(0) = (2; 3; 4). \quad (15)$$

Численное решение методом Рунге-Кутты-Фельберга (4–5 порядка точности) задачи Коши (14), (15) и применение формул (13) позволяет получить траекторию движения этой частицы газа в фазовом пространстве, при $t > 0$. Эта траектория представлена на рисунке 3.

3.4. Инвариантное $\theta_{2,4} \langle R_1 + \alpha R_2, 2\beta R_2 + R_3 \rangle$ – решение

Это решение задает подмодель, которая описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$x = \xi^{-\alpha-2\beta} \eta^{2\beta-\alpha} w(\lambda), \quad \lambda = t \xi^{-\frac{\alpha+2\beta+1}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}}. \quad (16)$$

Функция w является решением системы

$$w'' - 2\beta\lambda w' \times w = \mathbf{0}. \quad (17)$$

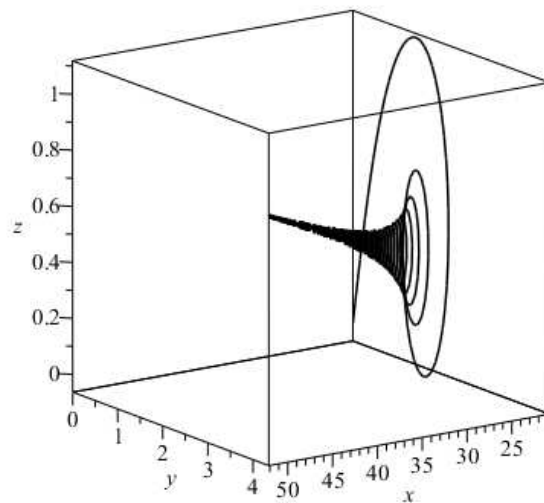


Рис. 3. Траектория движения частицы $\xi = 0.5; \eta = 0.5$ при $t > 0$.

Основные механические характеристики этого течения газа определяются по формулам:

$$|x| = \xi^{-\alpha-2\beta} \eta^{2\beta-\alpha} f(\xi, \eta), |u| = c_1 \xi^{\frac{-3\alpha-6\beta-1}{2}} \eta^{\frac{6\beta-3\alpha-1}{2}},$$

$$|a| = 2c_1 |\beta| t \xi^{\frac{-5\alpha-10\beta-3}{2}} \eta^{\frac{10\beta-5\alpha-3}{2}} (\sin \theta) f(\xi, \eta),$$

$$f(\xi, \eta) = \sqrt{c_1^2 t^2 \xi^{-\alpha-2\beta-1} \eta^{2\beta-\alpha-1} + c_2 t \xi^{-\frac{\alpha+2\beta+1}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}} + c_3}$$

Вектор скорости u перпендикулярен вектору ускорения a .

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$, то эта подмодель существует только в двух случаях:
либо при

$$t \xi^{-\frac{\alpha+2\beta+1}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}} < -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),$$

либо при

$$t \xi^{-\frac{\alpha+2\beta+1}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}} > -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right).$$

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$, то эта подмодель существует при всех t, ξ, η .

Пусть $\alpha = 1, \beta = 2$, а для частицы $\xi = 0.8; \eta = 0.8$ в момент времени $t = t_0 = 0$ заданы ее место местоположение $x = x_0 = \frac{25}{16} (1; 1; 1)$ и скорость $u = u_0 = \frac{25}{64} (1; 1.5; 2)$. В этом случае начальные условия для системы (17) имеют вид

$$w(0) = (1; 1; 1), w'(0) = (0.2; 0.3; 0.4). \quad (18)$$

Численное решение методом Рунге-Кутта-Фельберга (4-5 порядка точности) задачи Коши (17), (18) и применение формул (16) позволяет получить траекторию движения этой частицы газа в фазовом пространстве, при $t > 0$. Эта траектория представлена на рисунке 4.

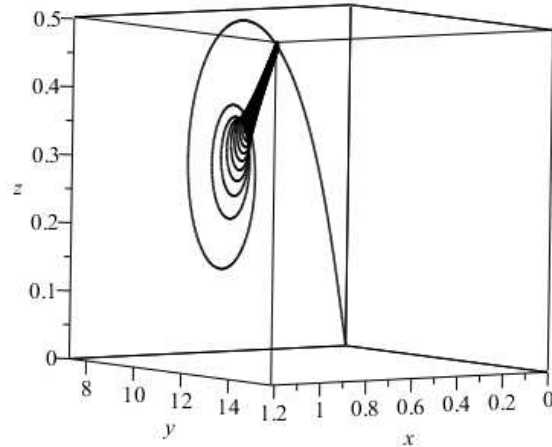


Рис. 4. Траектория движения частицы $\xi = 0.8; \eta = 0.8$ при $t > 0$.

3.5. Инвариантное $\theta_{2.5} \langle P_0 + P_1, R_1 + \alpha(R_2 + R_3) + Q_1 + Q_2 (\alpha(\alpha - 1) \neq 0) \rangle$ – решение

Это решение задает подмодель, которая описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$x = \eta^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} w(\lambda), \lambda = (\alpha(t - \xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}, \tag{19}$$

Функция w является решением системы

$$w'' - \frac{2}{\alpha - 1} w' \times w = \mathbf{0}. \tag{20}$$

Основные механические характеристики этого течения газа определяются по формулам:

$$|x| = \left| \eta^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \sqrt{c_1^2 (\alpha(t - \xi) - \eta)^2 \eta^{\frac{2\alpha+2}{\alpha-1}} + c_2 (\alpha(t - \xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + c_3} \right|, |u| = c_1 \left| \alpha \eta^{\frac{3\alpha+1}{\alpha-1}} \right|,$$

$$|a| = \frac{2c_1 \alpha^2 (\sin \theta)}{|\alpha - 1|} \left| \eta^{\frac{4\alpha+2}{\alpha-1}} \sqrt{c_1^2 (\alpha(t - \xi) - \eta)^2 \eta^{\frac{2\alpha+2}{\alpha-1}} + c_2 (\alpha(t - \xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + c_3} \right|,$$

Вектор скорости u перпендикулярен вектору ускорения a .

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$, то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$(\alpha(t - \xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} < -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),$$

либо при

$$(\alpha(t - \xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} > -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right).$$

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$, то эта подмодель существует при всех t, ξ, η .

Пусть $\alpha = 2$, а для частицы $\xi = 0.8; \eta = 0.8$ в момент времени $t = t_0 = 1.2$ заданы ее место местоположение $x = x_0 = (0; 4.096; 0)$ и скорость $u = u_0 = (0.8)^7 (2; 4; 6)$. В этом случае начальные условия для системы (20) имеют вид

$$w(0) = (0; 10; 0), \quad w'(0) = (1; 2; 3). \quad (21)$$

Численное решение методом Рунге-Кутты-Фельберга (4–5 порядка точности) задачи Коши (20), (21) и применение формул (19) позволяет получить траекторию движения этой частицы газа в фазовом пространстве, при $t > 1.2$. Эта траектория представлена на рисунке 5.

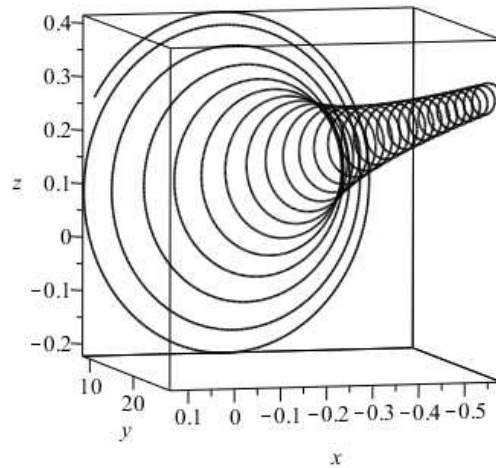


Рис. 5. Траектория движения частицы $\xi = 0.8; \eta = 0.8$ при $t > 1.2$.

3.6. Инвариантное $\theta_{2.6} \langle P_0 + P_1, R_2 + R_3 \rangle$ – решение

Это решение задает подмодель, которая описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$x = \eta^2 w(\lambda), \quad \lambda = (t - \xi) \eta. \quad (22)$$

Функция w является решением системы

$$w'' - 2w' \times w = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Основные механические характеристики этого течения газа имеют вид:

$$|x| = \eta^2 \sqrt{c_1^2 (t - \xi)^2 \eta^2 + c_2 (t - \xi) \eta + c_3}, \quad |u| = c_1 |\eta^3|,$$

$$|a| = 2c_1 \eta^4 (\sin \theta) \sqrt{c_1^2 (t - \xi)^2 \eta^2 + c_2 (t - \xi) \eta + c_3}.$$

Вектор скорости u перпендикулярен вектору ускорения a .

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$, то эта подмодель существует только в двух случаях: либо при

$$(t - \xi) \eta < -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),$$

либо при

$$(t - \xi) \eta > -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right) ..$$

Если $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$, то эта подмодель существует при всех t, ξ, η .

Пусть в момент времени $t = t_0 = 0.4$ для частицы $\xi = 0.4; \eta = 0.4$ заданы ее место место-положение $x = x_0 = (0; 1.6; 0)$ и скорость $u = u_0 = 0.064 (2; 3; 4)$. В этом случае начальные условия для системы (23) имеют вид

$$w(0) = (0; 10; 0), \quad w'(0) = (2; 3; 4). \quad (24)$$

Численное решение методом Рунге-Кутга-Фельберга (4-5 порядка точности) задачи Коши (23), (24) и применение формул (22) позволяет получить траекторию движения этой частицы газа в фазовом пространстве при $t > 0.4$, представленную на рисунке 6.

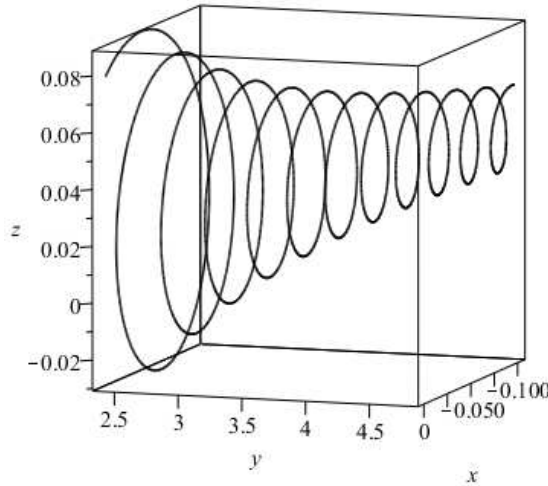


Рис. 6. Траектория движения частицы $\xi = 0.4; \eta = 0.4$ при $t > 0.4$.

3.7. Инвариантное $\theta_{2.7} \langle P_0 + P_1, R_1 + \alpha(R_2 + R_3) (\alpha \neq 1) \rangle$ – решение

Это решение задает подмодель, которая описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$x = \eta^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} w(\lambda), \quad \lambda = (t - \xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}. \quad (25)$$

Функция w является решением системы

$$w'' - \frac{2\alpha}{\alpha-1} w' \times w = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Основные механические характеристики этого течения газа имеют вид:

$$|x| = \left| \eta^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \sqrt{c_1^2 (t - \xi)^2 \eta^{\frac{2\alpha+2}{\alpha-1}} + c_2 (t - \xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + c_3} \right|, \quad |u| = c_1 \left| \eta^{\frac{3\alpha+1}{\alpha-1}} \right|,$$

$$|a| = 2c_1 (\sin \theta) \left| \frac{\alpha}{\alpha-1} \eta^{\frac{4\alpha+2}{\alpha-1}} \right| \sqrt{c_1^2 (t - \xi)^2 \eta^{\frac{2\alpha+2}{\alpha-1}} + c_2 (t - \xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + c_3}.$$

Вектор скорости u перпендикулярен вектору ускорения a .

Если $c_2^2 - 4c_1^2c_3 > 0$, то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$(t - \xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} < -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2c_3} \right),$$

либо при

$$(t - \xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} > -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2c_3} \right).$$

Если $c_2^2 - 4c_1^2c_3 < 0$, то эта подмодель существует при всех t, ξ, η .

Пусть $\alpha = 2$, а для частицы $\xi = 0.5; \eta = 0.5$ в момент времени $t = t_0 = 0.5$ заданы ее место местоположение $x = x_0 = (0; 0.625; 0)$ и скорость $u = u_0 = (0.5)^7 (0.2; 0.3; 0.4)$. В этом случае начальные условия для системы (26) имеют вид

$$w(0) = (0; 10; 0), \quad w'(0) = (0.2; 0.3; 0.4). \quad (27)$$

Численное решение методом Рунге-Кутта-Фельберга (4-5 порядка точности) задачи Коши (26), (27) и применение формул (25) позволяет получить траекторию движения этой частицы газа в фазовом пространстве, при $t > 0.5$. Эта траектория представлена на рисунке 7.

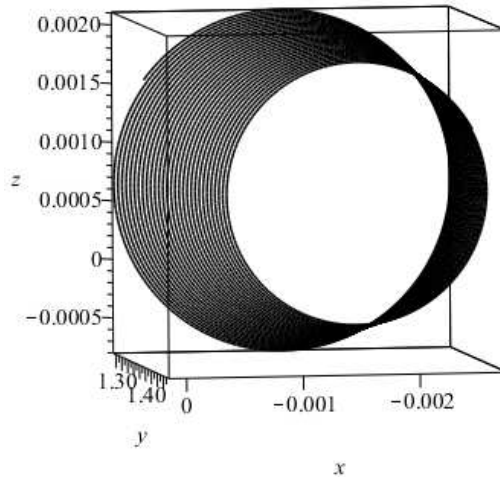


Рис. 7. Траектория движения частицы $\xi = 0.5; \eta = 0.5$ при $t > 0.5$.

Рисунки 1–7 показывают, что все полученные подмодели описывают движение частицы газа внутри торнадо.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные модели движения газа в трехмерном пространстве были получены академиком Л. В. Овсянниковым в работе [1]. В этой работе, модель, описывающая тепловое движение газа в сильно разреженном пространстве, получила несчастливый номер 13. Мы использовали эту модель для описания движения частиц газа внутри торнадо. Специальный выбор лагранжевых переменных, предложенный в работах [5–8] приводит к модели, задаваемой редуцированной системой дифференциальных уравнений, содержащей на единицу меньше

независимых переменных по сравнению с исходной системой. Эта редуцированная система допускает [5–8] бесконечную псевдогруппу Ли преобразований, подгруппой которой является восьмипараметрическая группа G_8 , порождаемая операторами переноса, растяжения, вращения и гиперболического вращения (оператор Лоренца).

В настоящей работе найдены все существенно различные (не связанные точечными преобразованиями) инвариантные относительно двухпараметрических подгрупп группы G_8 , подмодели этой редуцированной модели, отличные от полученных в работах [5–8]. Приведены условия существования этих подмоделей.

Получены основные механические характеристики течения газа, описываемого этими подмоделями. Для каждой подмодели численно найдены траектории движения частиц газа при заданных в начальный момент их местоположениях и скоростях. Приведены соответствующие графики.

Полученная редуцированная система дифференциальных уравнений требует дальнейшего исследования. Прежде всего, это относится к исследованию ее инвариантных подмоделей ранга 2 и частично инвариантных подмоделей. Это представляет самостоятельный интерес, как с математической точки зрения, так и с точки зрения физических приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников, Л. В. Программа подмодели. Газовая динамика / Овсянников Л. В. // ПММ. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 30–55.
2. Седов, Л. И. Распространение сильных взрывных волн / Л. И. Седов // ПММ. — 1946. — Т. 10, № 2. — С. 241–250.
3. Taylor, G. The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. / G. Taylor // Theoretical discussion. In: Proceedings of the Royal Society. Ser. A. — 1950. — V. 201. — P. 159–174.
4. The point source solution, Blast wave Los-Alamos Scientific Laboratory Report LA-2000 / J. von Neuman, H. A. Bethe, K. Fuchs, J. O. Hirschfelder et al // 1958. — P. 27–55.
5. Chirkunov, Yu. A. The conservation laws and group properties of the equations of gas dynamics with zero velocity of sound / Yu. A. Chirkunov / J. Appl. Math. Mech. — 2012. — V. 73(4). — P. 421–425.
6. Чиркунов, Ю. А. Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений / Ю. А. Чиркунов. — Новосибирск : НГУЭиУ, 2007. — 362 с.
7. Чиркунов, Ю. А. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. — Новосибирск : НГТУ, 2012. — 659 с.
8. Chirkunov, Yu. A. Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space / Yu. A. Chirkunov // Int. J. Non-Linear Mech. — 2016. — V. 83. — P. 9–14.
9. Pucci, E. Bogus Transformations in Mechanics of Continua / E. Pucci, G. Saccomandi, R. Vitolo // Int. J. of Eng. Sci. — 2016. — V. 99. — P. 13–21.
10. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 399 с.

REFERENCES

1. Ovsyannikov L.V. Submodel program. Gas dynamics. [Ovsyannikov L.V. Programma podmodeli. Gazovaya dinamika]. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 30–55.
2. Sedov L.I. Propagation of strong blast waves. [Sedov L.I. Rasprostranenie sil'nykh vzryvnykh voln]. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1946, vol. 10, no. 2, pp. 241–250.

3. Taylor G. The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion. In: Proceedings of the Royal Society. Ser. A, 1950, vol. 201, pp. 159–174.
4. Neuman J. von, Bethe H.A., Fuchs K., Hirschfelderetal J.O. The point source solution, Blast wave Los-Alamos Scientific Laboratory Report LA-2000, 1958, pp. 27–55.
5. Chirkunov Yu.A. The conservation laws and group properties of the equations of gas dynamics with zero velocity of sound, J. Appl. Math. Mech., 2012, vol. 73(4), pp. 421–425.
6. Chirkunov Yu.A. Group analysis of linear and quasi-linear differential equations. [Chirkunov YU.A. Gruppovoj analiz linejnyh i kvazilinejnyh differencial'nyh uravnenij]. Novosibirsk: NGUEiU, 2007, 362 p.
7. Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics. [Chirkunov YU.A., Habirov S.V. Elementy simmetrijnogo analiza differencial'nyh uravnenij mekhaniki sploshnoj sredy]. Novosibirsk: NSTU, 2012, 659 p.
8. Chirkunov Yu.A. Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space. Int. J. Non-Linear Mech., 2016, vol. 83, pp. 9–14.
9. Pucci E., Saccomandi G., Vitolo R. Bogus Transformations in Mechanics of Continua. Int. J. of Eng. Sci., 2016, vol. 99, pp. 13–21.
10. Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. [Ovsyannikov L.V. Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij]. Moscow: Nauka, 1978, 399 p.

*Чиркунов Юрий Александрович, д.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой высшей математики, зав. и ведущий научный сотрудник НИЛ «Математические модели механики сплошной среды», ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)», Новосибирск, Россия
E-mail: chr101@mail.ru*

*Chirkunov Yury Alexandrovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Head. and Leading Researcher the Scientific Research Laboratory «Mathematical Models of Continuum Mechanics» FGBOU VO «Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)», Novosibirsk, Russia
E-mail: chr101@mail.ru*

*Пикмуллина Елена Олеговна, к.ф.-м.н., инженер НИЛ «Математические модели механики сплошной среды», ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)», Новосибирск, Россия
E-mail: elena187@list.ru*

*Pikmullina Elena Olegovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Engineer of the Scientific Research Laboratory «Mathematical Models of Continuum Mechanics», FGBOU VO «Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)», Novosibirsk, Russia
E-mail: elena187@list.ru*