

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ЧИСЛА ЗАЯВОК СМО С ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Д. Б. Прокопьева¹, Т. А. Жук², Н. И. Головкин³

¹ — Тихоокеанское высшее военно – морское училище им. С. О. Макарова;

² — Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет;

³ — Дальневосточный федеральный университет

Поступила в редакцию 20.02.2022 г.

Аннотация. Исследуется система массового обслуживания (СМО) с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$, коэффициентом диффузии b и упругими границами α, β . В работе разработан численный метод и приведен численный анализ вероятностных характеристик числа заявок исследуемой СМО в зависимости от значений входных параметров.

Ключевые слова: система массового обслуживания, дважды стохастический пуассоновский поток, диффузионный процесс, вероятностные характеристики числа заявок.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE APPLICATIONS NUMBER CHARACTERISTICS OF QUEUING SYSTEMS WITH DIFFUSIVE INPUT FLOW INTENSITY

D. B. Prokopenko, T. A. Zhuk, N. I. Golovko

Abstract. We study a queuing system with an infinite storage device, one servicing device and exponential maintenance. The input of the queuing system receives a doubly stochastic Poisson flow, the intensity of which $\lambda(t)$ is a diffusion process with a zero drift coefficient $a = 0$, a diffusion coefficient b and elastic boundaries α, β . In this work, a numerical method has been developed and a numerical analysis of the customers number probabilistic characteristics depending on the values of the input parameters is presented.

Keywords: Queuing system, double stochastic Poisson flow, diffusion process, probabilistic characteristics of the customers number.

ВВЕДЕНИЕ

С целью повышения эффективности работы информационных сетей разрабатываются новые средства мониторинга. Для создания и модернизации средств мониторинга используют модели информационных сетей и систем. В качестве аналитических моделей информационных сетей и их элементов применяют системы массового обслуживания. Общие закономерности построения информационных сетей позволяют рассматривать сеть и каждый сервер в качестве СМО, где совокупность поступающих заявок образует входной поток заявок системы обслуживания. Вероятностные процессы, возникающие при поступлении требований в СМО, их характеристики изучены, например, в [1–5].

При моделировании систем массового обслуживания большое внимание уделяется изучению дважды стохастических потоков, как правило, пуассоновских. Статистический анализ

потока заявок, поступающих на web-серверы, показывает диффузионный характер изменения интенсивности входного дважды стохастического пуассоновского потока [6].

В [7] для СМО с конечным накопителем и диффузионной интенсивностью входного потока представлены краевые задачи и предлагается матричный метод анализа стационарных характеристик числа заявок. Для СМО с бесконечным накопителем и диффузионной интенсивностью входного потока с нулевым в [8] и ненулевым в [9] коэффициентом сноса представлен вывод уравнений типа Колмогорова – Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера – Планка относительно вероятностных характеристик числа заявок. Различные методы решения дифференциальных уравнений, в том числе численные методы решения уравнений Колмогорова – Чепмена, представлены в [10–12]. В [13] доказано необходимое условие существования стационарного режима и неотрицательности стационарных характеристик числа заявок СМО с бесконечным накопителем и диффузионной интенсивностью входного потока. Предложен метод решения бесконечных систем дифференциальных уравнений типа Колмогорова – Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера – Планка относительно характеристик числа заявок с применением производящей функции. Получены моменты числа заявок в СМО. Данная работа, являясь логическим продолжением [13], содержит разработку численного метода и численный анализ вероятностных характеристик числа заявок рассматриваемой СМО в зависимости от значений входных параметров.

ОПИСАНИЕ СМО

Исследуется система массового обслуживания с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ . На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ изменяется на промежутке $[\alpha, \beta]$ и представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$, коэффициентом диффузии b и упругими границами α, β . Такие СМО используются при моделировании web-узлов Интернет [6].

Согласно определению диффузионный процесс представляет собой марковский случайный процесс второго порядка с независимыми приращениями, диффузионные операторные моменты первого и второго порядка которого равны соответственно коэффициенту сноса a и коэффициенту диффузии b [14].

В дальнейшем интенсивность входного потока в нестационарном режиме будем обозначать через $\lambda(t)$, в стационарном через $\hat{\lambda}$. Пусть $Q_k(t, x)dx = P\{\nu(t) = k, x \leq \lambda(t) < x + dx\}$, где $\nu(t)$ — число заявок в СМО в момент t , $q_k(x)dx = P\{\hat{\nu} = k, x \leq \hat{\lambda} < x + dx\}$, где $\hat{\nu}$ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $Q_k(t, x)$, $q_k(x)$ — плотности по x , представляют собой нестационарные и стационарные характеристики числа заявок, $k \geq 0$; $f(t, x)dx = P\{x \leq \lambda(t) < x + dx\}$, $\hat{f}(x)dx = P\{x \leq \hat{\lambda} < x + dx\}$, $f(t, x)$, $\hat{f}(x)$ — нестационарная и стационарная плотности интенсивности входного потока, $x \in [\alpha, \beta]$.

Интегралы $\int_{\alpha}^{\beta} Q_k(t, x)dx = P_k(t)$, $\int_{\alpha}^{\beta} q_k(x)dx = p_k$, $k \geq 0$, представляют собой нестационарное и стационарное распределение числа заявок соответственно.

Обозначим через $M\hat{\nu} = \sum_{k \geq 1} kp_k$ среднее число (математическое ожидание числа) заявок в СМО в стационарном режиме. Пусть $M(x)dx = \sum_{k \geq 1} kq_k(x)dx$, где $M(x)$ — плотность распределения среднего числа заявок по интенсивности $\hat{\lambda}$ в стационарном режиме. Обозначим через $D\hat{\nu} = \sum_{k \geq 0} (k - M\hat{\nu})^2 p_k$ дисперсию числа заявок в стационарном режиме; $D(x)dx = \sum_{k \geq 0} (k - M\hat{\nu})^2 q_k(x)dx$, где $D(x)$ — плотность распределения дисперсии числа заявок по интенсивности $\hat{\lambda}$ в стационарном режиме.

Моменты числа заявок выражаются через плотности моментов числа заявок следующим

образом

$$M\hat{\nu} = \int_{\alpha}^{\beta} M(x) dx, D\hat{\nu} = \int_{\alpha}^{\beta} D(x) dx. \quad (1)$$

Будем рассматривать функции $\hat{f}(x)$, $q_k(x)$ в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^2[\alpha, \beta]$, функции $f(t, x)$, $Q_k(t, x)$ в пространстве непрерывно дифференцируемых функций \mathcal{L} . Функции в \mathcal{L} являются непрерывными и ограниченными в области определения $\{t \geq 0, x \in [\alpha, \beta]\}$, непрерывными и ограниченными являются их частные производные по t , по x первого и второго порядков в области определения $\{t \geq 0, x \in (\alpha, \beta)\}$. Будем считать частные производные по x функций первого и второго порядка непрерывно продолжаемыми при $x \rightarrow \alpha, x \rightarrow \beta$. В дальнейшем будем использовать частные производные данных функций, повторно не оговаривая указанные свойства.

В [8] приведен вывод уравнений относительно $f(t, x), Q_k(t, x), q_k(x)$ с помощью Δt -метода для СМО с диффузионной интенсивностью входного потока с упругими границами α, β с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$.

Нестационарные характеристики числа заявок $Q_k(t, x)$, $k \geq 0$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

1) во внутренних точках $x \in (\alpha, \beta)$ нестационарным уравнениям типа Колмогорова — Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера — Планка

$$\frac{\partial Q_0(t, x)}{\partial t} = -xQ_0(t, x) + \mu Q_1(t, x) + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 Q_0(t, x)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k(t, x)}{\partial t} = xQ_{k-1}(t, x) - (x + \mu)Q_k(t, x) + \mu Q_{k+1}(t, x) + \\ + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 Q_k(t, x)}{\partial x^2}, k \geq 1, \end{aligned} \quad (3)$$

2) в граничных точках $r_1 = \alpha, r_2 = \beta$ краевым условиям

$$\frac{\partial Q_k(t, r_i)}{\partial x} = 0, k \geq 0, i = 1, 2, \quad (4)$$

3) начальным условиям с начальными плотностями $\xi_k(x)$

$$Q_k(0, x) = \xi_k(x), \xi_k(x) \geq 0, \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k \geq 0} \xi_k(x) dx = 1, k \geq 0, \quad (5)$$

4) условию нормировки

$$\sum_{k \geq 0} Q_k(t, x) = f(t, x), t \geq 0, x \in [\alpha, \beta]. \quad (6)$$

Для решения краевой задачи (2)–(6) введем производящую функцию

$$R(t, x, z) = \sum_{k \geq 0} Q_k(t, x) z^k, \quad t \geq 0, x \in [\alpha, \beta], |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

с областью определения

$$D_{txz} = \{(t, x, z) : t \geq 0, x \in [\alpha, \beta], |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}\}.$$

В результате умножения уравнений (2)–(3) на z^{k+1} , уравнений (4) на z^k , суммирования по $k \geq 0$, получим краевую задачу относительно производящей функции $R(t, x, z)$:

$$R(t, x, z) \left[xz^2 - (x + \mu)z + \mu \right] + \frac{b}{2} z R''_{xx}(t, x, z) = z R'_t(t, x, z) + (1 - z) \mu Q_0(t, x)$$

с краевыми условиями

$$R'_x(t, \alpha, z) = 0, \quad R'_x(t, \beta, z) = 0,$$

начальным условием

$$R(0, x, z) = \sum_{k \geq 0} Q_k(0, x) z^k$$

и условием нормировки

$$R(t, x, 1) = f(t, x).$$

Если в СМО существует стационарный режим, то стационарные характеристики $q_k(x)$, $k \geq 0$, рассматриваемой СМО удовлетворяют следующим уравнениям:

1) во внутренних точках $x \in (\alpha, \beta)$ стационарным уравнениям типа Колмогорова – Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера – Планка

$$-xq_0(x) + \mu q_1(x) + \frac{b}{2} q_0''(x) = 0, \quad (8)$$

$$xq_{k-1}(x) - (x + \mu)q_k(x) + \mu q_{k+1}(x) + \frac{b}{2} q_k''(x) = 0, \quad k \geq 1, \quad (9)$$

2) в граничных точках α, β краевым условиям

$$q'_k(\alpha) = 0, \quad q'_k(\beta) = 0, \quad k \geq 0, \quad (10)$$

3) условию нормировки

$$\sum_{k \geq 0} q_k(x) = \hat{f}(x). \quad (11)$$

Система дифференциальных уравнений (8)–(9) во внутренних точках $x \in (\alpha, \beta)$ вместе с краевыми условиями (10) и условием нормировки (11) названа первой моделью стационарной СМО [13].

Введем производящую функцию

$$\hat{R}(x, z) = \sum_{k \geq 0} q_k(x) z^k, \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (12)$$

с областью определения

$$D_{xz} = \{(x, z) : x \in [\alpha, \beta], |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}\}.$$

В результате умножения уравнений (8)–(9) на z^{k+1} , уравнений (10) на z^k , суммирования по $k \geq 0$, получим краевую задачу относительно производящей функции $\hat{R}(x, z)$:

$$\hat{R}(x, z) \left[xz^2 - (x + \mu)z + \mu \right] + \frac{b}{2} z \hat{R}''_{xx}(x, z) = (1 - z) \mu q_0(x) \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$\hat{R}'_x(\alpha, z) = 0, \quad \hat{R}'_x(\beta, z) = 0. \quad (14)$$

Заметим, что с учетом условия нормировки (11) выполняется равенство

$$\hat{R}(x, 1) = \sum_{k \geq 0} q_k(x) = \hat{f}(x). \quad (15)$$

В результате суммирования уравнений (8)–(10) получим краевую задачу относительно $\hat{f}(x)$

$$\hat{f}''(x) = 0, \quad \hat{f}'(\alpha) = 0, \quad \hat{f}'(\beta) = 0,$$

решение которой представляет собой плотность равномерного распределения

$$\hat{f}(x) = 1/(\beta - \alpha).$$

В [13] показано, что необходимое условие существования решения первой модели стационарной СМО и неотрицательности характеристик $q_k(x), k \geq 0$, имеет вид

$$\bar{\lambda} < \mu, \tag{16}$$

где $\bar{\lambda} = \int_{\alpha}^{\beta} x \hat{f}(x) dx$ – среднее значение интенсивности входного потока в стационарном режиме. Причем вероятность простоя p_0 СМО удовлетворяет условию

$$0 < p_0 = \int_{\alpha}^{\beta} q_0(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (1 - x/\mu) \hat{f}(x) dx < 1.$$

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК

Для наблюдения за установлением стационарного режима в зависимости от значений входных параметров применен численный метод расчета характеристик числа заявок.

Нестационарное и стационарное распределения числа заявок предлагается вычислять с применением решения задачи Коши и краевых условий относительно производящей функции $R(t, x, z)$.

Значения функции $R(t, x, z)$ для сеточных значений $t \in [0; T]$, $x \in [\alpha; \beta]$, $z \in \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| = r\}$ вычисляются последовательно в моменты времени $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ через значения $R(0, x, z)$ в начальный момент времени $t = 0$. На каждом шаге по t значения функции $R(t + \Delta t, x, z)$ вычисляются с учетом начального условия

$$R(0, x, z) = \sum_{k \geq 0} Q_k(0, x) z^k, \tag{17}$$

по формуле Эйлера

$$R(t + \Delta t, x, z) = R(t, x, z) + \left[R(t, x, z) [xz^2 - (x + \mu)z + \mu] + \frac{b}{2} z R''_{xx}(t, x, z) - (1 - z)\mu Q_0(t, x) \right] \Delta t/z, \tag{18}$$

с учетом краевых условий

$$\frac{R(t, \alpha + \Delta x, z) - R(t, \alpha, z)}{\Delta x} = 0, \quad \frac{R(t, \beta, z) - R(t, \beta - \Delta x, z)}{\Delta x} = 0, \tag{19}$$

и разностной производной второго порядка ([12], с. 142)

$$R''_{xx}(t, x, z) = \frac{R(t, x + \Delta x, z) - 2R(t, x, z) + R(t, x - \Delta x, z)}{(\Delta x)^2}. \tag{20}$$

На каждом шаге по t плотности $Q_k(t, x)$ вычисляются по формуле обратного преобразования Лорана

$$Q_k(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{R(t, x, \xi)}{\xi^{k+1}} d\xi, k \geq 0, \tag{21}$$

где i — мнимая единица.

Нестационарное $P_k(t)$, $k \geq 0$, и стационарное $q_k(x)$, p_k , $k \geq 0$, распределения числа заявок вычисляются по формулам

$$P_k(t) = \int_{\alpha}^{\beta} Q_k(t,x)dx, \tag{22}$$

$$q_k(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_k(t,x), p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t). \tag{23}$$

Согласно [13] в стационарном режиме плотности $M(x)$ и $D(x)$ выражаются через производящую функцию $\hat{R}(x,z)$ следующим образом:

$$M(x) = \hat{R}'_z(x,1), \tag{24}$$

$$D(x) = \hat{R}''_{zz}(x,1) + \hat{R}'_z(x,1) - 2\hat{R}'_z(x,1)M\hat{\nu} + (M\hat{\nu})^2\hat{f}(x), \tag{25}$$

$$\hat{R}'_z(x,1) = \lim_{t \rightarrow \infty} R'_z(t,x,1), \hat{R}''_{zz}(x,1) = \lim_{t \rightarrow \infty} R''_{zz}(t,x,1).$$

Численный метод расчета характеристик числа заявок, в котором применяются формулы Эйлера и Лорана, назовем методом Эйлера – Лорана. Метод Эйлера – Лорана позволяет выполнить численный анализ нестационарного и стационарного распределения числа заявок для значений параметров СМО при различных начальных распределениях числа заявок в СМО. Для применения метода Эйлера – Лорана в [13] показано выполнение необходимого условия (16) существования и единственности стационарного режима в СМО.

Для численного вычисления нестационарных характеристик числа заявок были сделаны разбиения отрезков $[\alpha, \beta]$, $[0, T]$ и окружности $|\xi| = r$ в комплексной области на \bar{n} , \bar{m} и $\bar{l} + 1$ частей соответственно.

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ точками $x_0, x_1, \dots, x_{\bar{n}}$ на \bar{n} частей, где $x_0 = \alpha$, $x_n = x_0 + n \cdot \Delta x$, $\Delta x = (\beta - \alpha)/\bar{n}$, $0 \leq n \leq \bar{n}$.

Разобьем интервал времени $[0, T]$ точками $t_0, t_1, \dots, t_{\bar{m}}$ на \bar{m} частей, где $t_0 = 0$, $t_m = t_0 + m \cdot \Delta t$, $\Delta t = T/\bar{m}$, $0 \leq m \leq \bar{m}$.

Разобьем окружность $|\xi| = r$ в комплексной области с центром в начале координат радиуса r точками $z_0, z_1, \dots, z_{\bar{l}}$ на $\bar{l} + 1$ секторов, где

$$\Delta l = (2\pi r)/(\bar{l} + 1), \varphi_l = (2\pi)/(\bar{l} + 1) \cdot l, 0 \leq l \leq \bar{l},$$

$$x_l = r \cos \varphi_l, y_l = r \sin \varphi_l,$$

$z_l = x_l + i y_l$, где i — мнимая единица; $\Delta z_l = z_l - z_{l-1}$.

Рассмотрим ступенчатую функцию 3-х аргументов $\tilde{R}(t,x,z)$, значение которой равно $\tilde{R}_{m,n,l} = R(t_m, x_n, z_l)$, если $t \in [t_m, t_m + \Delta t]$, $x \in [x_n, x_n + \Delta x]$, z принадлежит l -му сектору единичной окружности, $0 \leq m \leq \bar{m}$, $0 \leq n \leq \bar{n} - 1$, $0 \leq l \leq \bar{l}$. Будем обозначать эту ступенчатую функцию $\tilde{R}_{m,n,l} = \tilde{R}(t_m, x_n, z_l)$, т.е. так же как и значения функции.

Разностным производным для $R'_x(t,x,z), R''_{xx}(t,x,z)$ аналогичным образом поставим в соответствие ступенчатые функции

$$\tilde{R}'_x(t_{m-1}, x_0, z_l) \approx \frac{\tilde{R}_{m-1,1,l} - \tilde{R}_{m-1,0,l}}{\Delta x},$$

$$\tilde{R}'_x(t_{m-1}, x_{\bar{n}-1}, z_l) \approx \frac{\tilde{R}_{m-1,\bar{n}-1,l} - \tilde{R}_{m-1,\bar{n}-2,l}}{\Delta x},$$

$$\tilde{R}''_{xx}(t_{m-1}, x_n, z_l) \approx \frac{\tilde{R}_{m-1,n+1,l} - 2\tilde{R}_{m-1,n,l} + \tilde{R}_{m-1,n-1,l}}{(\Delta x)^2},$$

$$1 \leq m \leq \bar{m}, 1 \leq n \leq \bar{n} - 2, 0 \leq l \leq \bar{l}.$$

На каждом шаге по t значения функции $\tilde{R}_{m,n,l}$ вычислялись с учетом начального условия (17), с использованием формулы Эйлера (18), краевых условий (19), разностной производной (20) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 m = 0, 0 \leq n \leq \bar{n} - 1, 0 \leq l \leq \bar{l} : \tilde{R}_{0,n,l} &= \sum_{k \geq 0} Q_k(0, x_n) z_l^k; \\
 1 \leq m \leq \bar{m}, 1 \leq n \leq \bar{n} - 2, 0 \leq l \leq \bar{l} : \\
 \tilde{R}_{m,n,l} &= \tilde{R}_{m-1,n,l} + \left[\tilde{R}_{m-1,n,l} [x_n z_l^2 - (x_n + \mu) z_l + \mu] + \frac{b}{2} z_l \tilde{R}_{xx}''(t_{m-1}, x_n, z_l) - \right. \\
 &\quad \left. - (1 - z) \mu Q_0(t_{m-1}, x_n) \right] \Delta t / z_l, \\
 n = 0, 0 \leq l \leq \bar{l} : \tilde{R}_{m,0,l} &= \tilde{R}_{m,1,l}; \\
 n = \bar{n} - 1, 0 \leq l \leq \bar{l} : \tilde{R}_{m,\bar{n}-1,l} &= \tilde{R}_{m,\bar{n}-2,l}.
 \end{aligned}$$

Плотности $Q_0(t_m, x_n)$, $Q_k(t_m, x_n)$ при $t_0 = 0$ находились из начальных условий

$$Q_k(0, x_n) = \xi_k(x_n), k \geq 0,$$

плотности $Q_0(t_m, x_n)$, $Q_k(t_m, x_n)$, $1 \leq m \leq \bar{m}$, находились с использованием формулы обратного преобразования Лорана (21)

$$\begin{aligned}
 Q_k(t_m, x_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{\tilde{R}(t_m, x_n, \xi)}{\xi^{k+1}} d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{R}(t_m, x_n, \xi)}{\xi^{k+1}} r e^{i\varphi} d\varphi \approx \\
 &\approx \frac{r}{2\pi} \sum_{l=0}^{\bar{l}} \frac{\tilde{R}(t_m, x_n, z_l) e^{i\varphi_l}}{z_l^{k+1}} \Delta\varphi, k \geq 0.
 \end{aligned}$$

Нестационарные распределения числа заявок $P_k(t)$, $k \geq 0$, вычислялись согласно (22). Для приближенного вычисления интегралов применяли метод прямоугольников:

$$P_k(t_m) \approx \Delta x \left[Q_k(t_m, x_1) + Q_k(t_m, x_2) + \dots + Q_k(t_m, x_{\bar{n}-1}) + Q_k(t_m, x_{\bar{n}}) \right].$$

Функции $\hat{R}(x, z)$ рассматриваем в линейном пространстве \hat{L} степенных рядов

$$\hat{R}(x, z) = \sum_{k \geq 0} q_k(x) z^k, q_k(x) \in C^2[\alpha, \beta],$$

сходящихся равномерно и абсолютно по x, z на множестве D_{xz} . Функции $\hat{R}(x, z) \in \hat{L}$ являются непрерывными и ограниченными на множестве D_{xz} , непрерывными и ограниченными являются их частные производные по x первого и второго порядков на множестве D_{xz} . Линейное пространство \hat{L} определим таким образом, что ряды $\hat{R}(x, z)$, $\hat{R}'_x(x, z)$, $\hat{R}''_{xx}(x, z)$ сходятся равномерно и абсолютно по x, z .

Введем в линейном пространстве \hat{L} норму для стационарной функции $\hat{R}(x, z)$ следующим образом:

$$\|\hat{R}\|_{\hat{L}} = \sum_{0 \leq s \leq 2} \max_{x \in [\alpha, \beta], |z|=1} \left| \hat{R}_x^{(s)}(x, z) \right|. \quad (26)$$

Функции $R(t, x, z)$ рассматриваем в линейном пространстве M степенных рядов

$$R(t, x, z) = \sum_{k \geq 0} Q_k(t, x) z^k, Q_k(t, x) \in \mathcal{L},$$

сходящихся равномерно и абсолютно по t, x, z на множестве D_{txz} .

Введем норму для нестационарной функции $R(t, x, z)$ в линейном пространстве M следующим образом:

$$\|R\|_M = \sum_{0 \leq s \leq 2} \max_{x \in [\alpha, \beta], |z|=1} |R_x^{(s)}(t, x, z)|. \tag{27}$$

Обозначим через \mathcal{M} пространство ступенчатых функций $\tilde{R}(t_m, x_n, z_l)$. Норма в линейном пространстве \mathcal{M} вычисляется согласно (27):

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}\|_{\mathcal{M}} = \max_{0 \leq n \leq \bar{n}, 0 \leq l \leq \bar{l}} & \left[|\tilde{R}(t_m, x_n, z_l)| + \left| \frac{\tilde{R}(t_m, x_n, z_l) - \tilde{R}(t_m, x_{n-1}, z_l)}{\Delta x} \right| + \right. \\ & \left. \left| \frac{\tilde{R}(t_m, x_{n-1}, z_l) - 2\tilde{R}(t_m, x_n, z_l) + \tilde{R}(t_m, x_{n+1}, z_l)}{(\Delta x)^2} \right| \right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Стабилизация режима СМО в широком смысле означает стабилизацию в СМО среднего числа заявок, стабилизация режима СМО в узком смысле означает стабилизацию всех нестационарных характеристик СМО [1]. Из стабилизации в узком смысле следует стабилизация в широком смысле, но не наоборот.

Введем ступенчатую функцию $\Upsilon(t_m, x_n, z_l) = \tilde{R}(t_{m+1}, x_n, z_l) - \tilde{R}(t_m, x_n, z_l)$. Стабилизация режима СМО наблюдалась при выполнении неравенства $\|\Upsilon\|_{\mathcal{M}} < \varepsilon$. В работе наблюдалась стабилизация режима СМО и в узком, и в широком смысле.

Обозначим через $t_{\hat{m}}$ момент времени, в который произошла стабилизация. После достижения стабилизации выполняется равенство $\hat{R}(x, z) = R(t, x, z)$ при $t \geq t_{\hat{m}}$.

Рассмотрим ступенчатые разностные производные функции $\hat{R}'_z(x, z), \hat{R}''_{zz}(x, z)$ в точках (x_n, z_0) :

$$\begin{aligned} \hat{R}'_z(x_n, z_0) & \approx \frac{\hat{R}(x_n, z_1) - \hat{R}(x_n, z_0)}{\Delta z_0}, \\ \hat{R}''_{zz}(x_n, z_0) & \approx \left[\frac{\hat{R}(x_n, z_1) - \hat{R}(x_n, z_0)}{\Delta z_0} - \frac{\hat{R}(x_n, z_0) - \hat{R}(x_n, z_{\bar{l}})}{\Delta z_{\bar{l}}} \right] / \Delta z_0. \end{aligned}$$

После установления стабилизации значения плотности математического ожидания числа заявок $M(x_n)$ вычислялись с использованием (24):

$$M(x_n) = \hat{R}'_z(x_n, z_0). \tag{29}$$

Интегралы в (1) расчета стационарных моментов числа заявок аппроксимировались интегральными суммами по методу прямоугольников. Сначала находилось матожидание числа заявок $M\hat{\nu}$

$$M\hat{\nu} \approx \Delta x \left[M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_{\bar{n}-1}) + M(x_{\bar{n}}) \right].$$

Значения плотности дисперсии числа заявок вычислялись с использованием (25):

$$D(x_n) = \hat{R}''_{zz}(x_n, z_0) + \hat{R}'_z(x_n, z_0) - 2\hat{R}'_z(x_n, z_0)M\hat{\nu} + (M\hat{\nu})^2 \hat{f}(x). \tag{30}$$

Дисперсия числа заявок $D\hat{\nu}$ рассчитывалась аналогично среднему числу заявок

$$D\hat{\nu} \approx \Delta x \left[D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_{\bar{n}-1}) + D(x_{\bar{n}}) \right].$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численный анализ характеристик числа заявок исследуемой СМО с бесконечным накопителем, диффузионной интенсивностью входного потока и экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ на одном приборе проводился с целью наблюдения за установлением стационарного режима в зависимости от значений входных параметров СМО, обоснования наблюдаемых свойств стационарных характеристик. Одной из задач являлось сравнение стационарного распределения числа заявок рассматриваемой СМО и классической СМО. Классическая система массового обслуживания представляет собой СМО с простейшим пуассоновским входным потоком заявок с интенсивностью входного потока $\bar{\lambda} = (\alpha + \beta)/2$ и экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ . В классической СМО интенсивность входного потока $\bar{\lambda}$ получается усреднением значений стационарного процесса $\hat{\lambda}$.

СМО имеет 5 входных параметров:

α, β — границы интервала $[\alpha, \beta]$ значений процесса $\lambda(t)$;

μ — интенсивность экспоненциального обслуживания;

a — коэффициент сноса;

b — коэффициент диффузии.

Под опорным планом будем понимать фиксированный набор входных данных $\{\alpha, \beta, \mu, a, b\}$, при котором существуют и неотрицательны стационарные характеристики $q_k(x)$, $k \geq 0$, $M(x)$, $D(x)$ и вероятности распределения числа заявок $P_k(t)$, p_k , $k \geq 0$.

Под сечением по параметру $\eta \in \{\alpha, \beta, \mu, a, b\}$ будем понимать наборы входных параметров, отличающиеся друг от друга только параметром η , остальные параметры неизменны и взяты из опорного плана.

Расчет нестационарных и стационарных характеристик числа заявок СМО проводился для фиксированного опорного плана входных параметров по различным сечениям входных параметров.

Численный анализ имеет 6 рабочих параметров:

$\bar{n}, \bar{m}, \bar{l}$ — показывают разбиения отрезков $[\alpha, \beta]$, $[0, T]$ и окружности $|\xi| = r$ в комплексной области на $\bar{n}, \bar{m}, \bar{l} + 1$ частей соответственно;

r — радиус комплексной окружности с центром в начале координат в формуле Лорана;

T — временной интервал наблюдения стабилизации нестационарных характеристик СМО;

ε — точность вычислений рядов и стабилизации.

В качестве опорного плана были взяты следующие значения параметров:

$\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$, $\mu = 3$, $a = 0$, $b = 2$.

Для расчета вероятностных характеристик числа заявок исследуемой СМО и вывода результатов расчетов на графиках функций составлена программа на языке программирования FORTRAN 77. В силу ограниченных возможностей программы использовались следующие значения рабочих параметров: $\bar{n} = 30$ — количество точек для характеристик СМО, $\bar{l} = 1024$ — количество точек для комплексной окружности радиуса r в методе Лорана, $r = 1$, $T = 15$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

В [8] показано, что $\Delta t = \Delta^2 x/b$. Отсюда получен численный параметр

$$\bar{m} = \frac{\bar{n}^2 b T}{(\beta - \alpha)^2}.$$

Такой выбор параметров и полученная точность при указанных ограничениях памяти программы оказались вполне допустимыми для получения неотрицательных характеристик СМО, их достаточно гладких графиков и стабилизации.

Проводился численный анализ вероятностных характеристик числа заявок исследуемой СМО в нестационарном режиме. Численные расчеты нестационарного распределения числа

заявок с применением метода Эйлера – Лорана (18)–(22) для значений параметров СМО из опорного плана проводились при различных начальных распределениях.

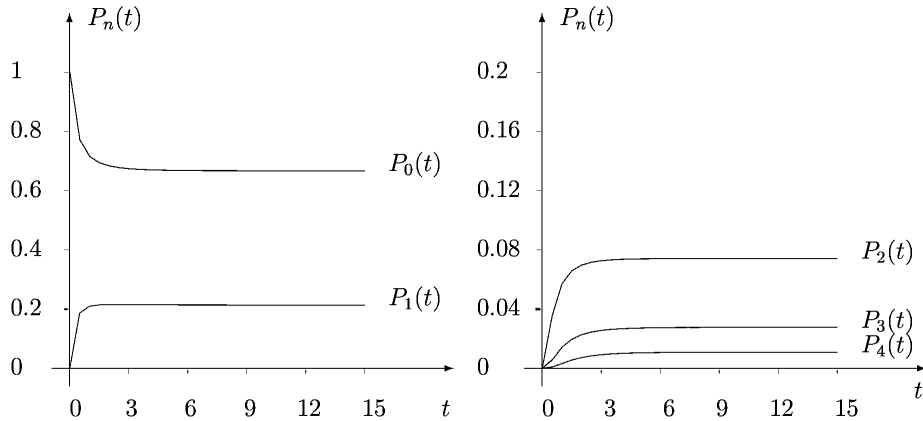


Рис. 1. Зависимость $P_k(t)$ от t .

Пример нестационарных вероятностей $P_0(t), \dots, P_4(t)$, полученных методом Эйлера – Лорана при начальном распределении $Q_0(0, x) = 1/(\beta - \alpha), Q_k(0, x) = 0, k \geq 1$, приведен на рис. 1.

При начальном распределении $Q_1(0, x) = 1/(\beta - \alpha), Q_k(0, x) = 0, k = 0, k \geq 2$ и при начальном распределении

$$Q_k(0, x) = (1 - \bar{\rho})\bar{\rho}^k, k \geq 0, \bar{\rho} = \bar{\lambda}/\mu, \bar{\lambda} = \int_{\alpha}^{\beta} x \hat{f}(x) dx, \quad (31)$$

рисунки аналогичны. Для нулевого коэффициента сноса $a = 0$ имеем $\bar{\lambda} = (\alpha + \beta)/2$.

Следует отметить, что стабилизация вероятностей $P_k(t)$ при заданных начальных распределениях наступает достаточно быстро, стабилизация плотностей $Q_k(t, x), k \geq 0$, продолжается вплоть до значений $t = 15$.

Проводился численный анализ вероятностных характеристик числа заявок исследуемой СМО в стационарном режиме.

Результаты численных расчетов показали неотрицательность всех наблюдаемых стационарных характеристик $q_k(x)$ исследуемой СМО. Стационарные характеристики СМО $q_0(x), \dots, q_4(x)$ для опорного плана показаны на рис. 2.

Следует отметить гладкость наблюдаемых характеристик и выполнение краевых условий. Это означает, что на краях интервала $[\alpha, \beta]$ касательные к характеристикам горизонтальны.

Стационарные характеристики СМО $M(x), D(x)$ для опорного плана приведены на рис. 3.

Для проверки неотрицательности наблюдаемых плотностей $q_0(x), \dots, q_4(x), M(x), D(x)$ наблюдался минимум этих характеристик.

Наблюдались стационарные моменты числа заявок, среднее число заявок $M\nu$ и дисперсия числа заявок $D\nu$. По каждому из входных параметров СМО μ, α, β, b проводились сечения с учетом опорного плана. Результаты сечений по параметрам μ, β, b показаны на рис. 4, 5, 6.

Для всех сечений параметров наблюдалось условие неотрицательности характеристик числа заявок рассматриваемой СМО. Вычисления показали, что с увеличением μ математическое ожидание и дисперсия числа заявок уменьшаются. При увеличении интенсивности обслуживания μ заявки быстрее обслуживаются и покидают СМО, поэтому среднее число заявок, как и дисперсия, уменьшается.

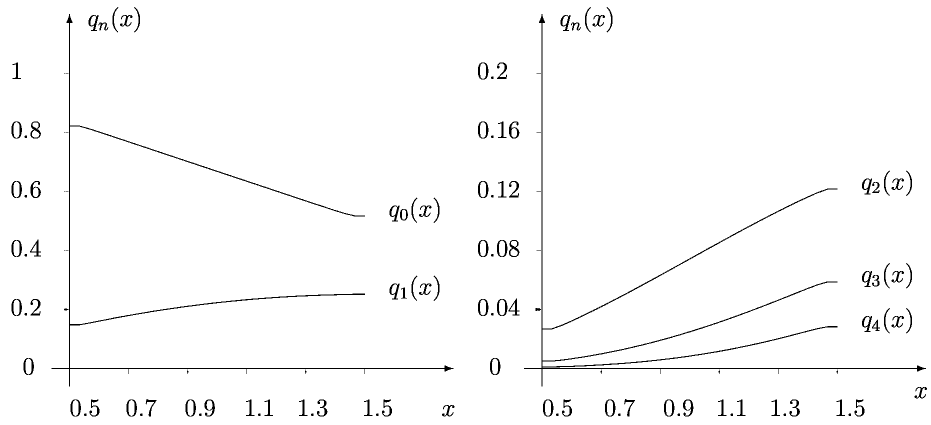


Рис. 2. Зависимость $q_k(x)$ от x .

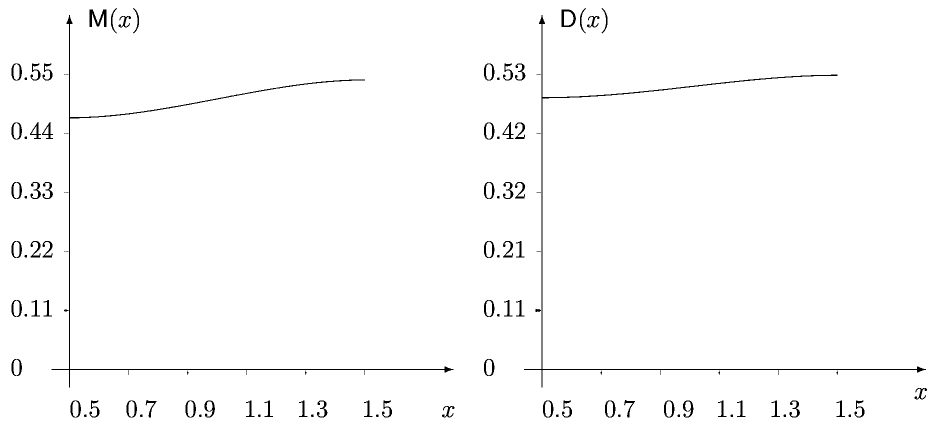


Рис. 3. Зависимость $M(x)$ и $D(x)$ от x .

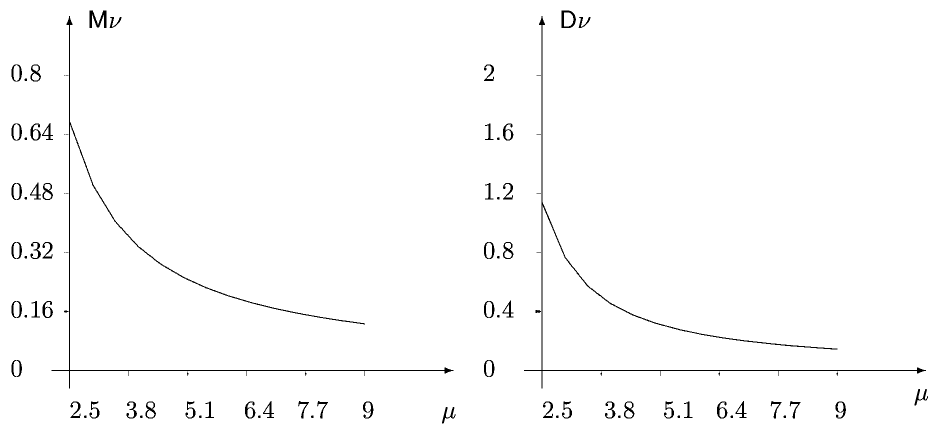


Рис. 4. Зависимость $M\nu$ и $D\nu$ от μ .

Результаты показали, что при увеличении β математическое ожидание числа заявок увеличивается. Это объясняется тем, что с увеличением β увеличивается среднее значение $\bar{\lambda}$

интенсивности входного потока λ , и в соответствии с приближенной формулой Литтла [1] $M\nu = \bar{\lambda}/\mu$, среднее число заявок $M\nu$ в СМО увеличивается.

Дисперсия числа заявок ведет себя аналогично математическому ожиданию числа заявок, что также объясняется увеличением интенсивности входного потока.

С увеличением α значение математического ожидания $M\nu$ и дисперсии числа заявок $D\nu$ увеличивается. Это объясняется тем, что с возрастанием α увеличивается среднее значение $\bar{\lambda}$ интенсивности входного потока λ , то есть увеличивается число заявок, поступающих в СМО. Следовательно, возрастают среднее и дисперсия числа заявок в СМО.

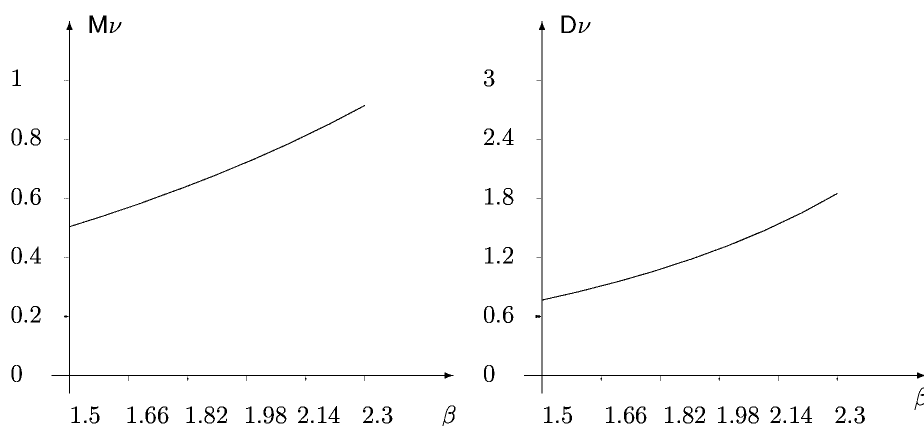


Рис. 5. Зависимость $M\nu$ и $D\nu$ от β .

Математическое ожидание $M\nu$ и дисперсия числа заявок $D\nu$ в начале интервала изменения коэффициента диффузии b претерпевают некоторые изменения. В целом на интервале изменения значений параметра b характеристики СМО $M\nu, D\nu$ остаются практически неизменными, что показано на рис. 6.

При проведении расчетов по сечениям параметров μ, β, α, b для сравнения моментов числа заявок $M\nu$ и $D\nu$ рассматриваемой СМО с моментами классической СМО $M_{c\nu}$ и $D_{c\nu}$ вычислялись относительные отклонения среднего числа заявок $\varepsilon_o(M\nu) = |(M\nu - M_{c\nu})/M\nu| \cdot 100\%$ и дисперсии числа заявок $\varepsilon_o(D\nu) = |(D\nu - D_{c\nu})/D\nu| \cdot 100\%$.

Расчеты показали изменение относительного отклонения $\varepsilon_o(M\nu)$ в пределах 0.75 – 4%, что говорит о близости среднего числа заявок в рассматриваемой СМО и в классической. Однако дисперсии числа заявок в рассматриваемой СМО и в классической различаются на 0.75 – 11%.

Следовательно, при проектировании СМО с диффузионной интенсивностью при расчете среднего числа заявок можно взять за основу среднее число заявок классической СМО, однако, если необходимо рассчитывать дисперсию числа заявок, то необходимо проводить расчеты согласно теории, приведенной в данной работе.

Численный анализ нестационарного распределения числа заявок в СМО подтвердил экспоненциальную скорость сходимости нестационарных характеристик к финальным, совпадение финальных характеристик со стационарными при заданной точности вычислений и независимость финальных характеристик от начального распределения.

Численные расчеты показали, что метод Эйлера – Лорана позволяет вычислять стационарные плотности $q_k(x), k \geq 0$, с любой заданной точностью с учетом ресурсов программной среды. Точность метода проверялась по невязке исходной системы дифференциальных уравнений. При расчете стационарных плотностей $q_k(x), k \geq 0$, методом Эйлера – Лорана для

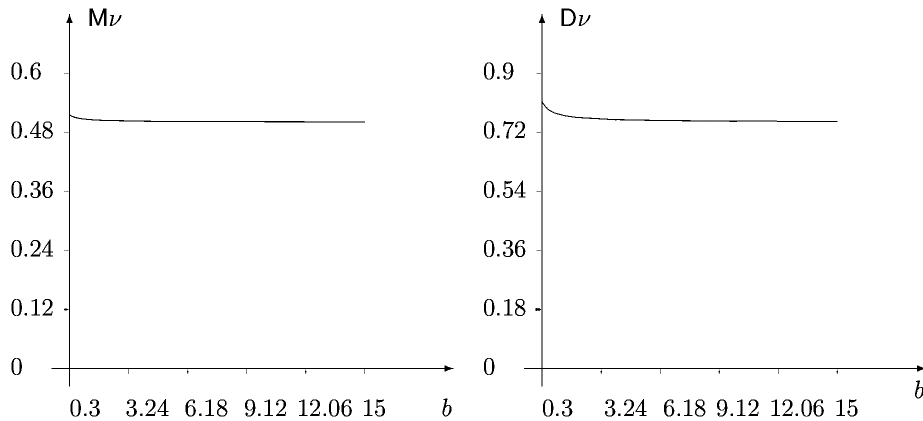


Рис. 6. Зависимость $M\nu$ и $D\nu$ от b .

ускорения стабилизации рекомендуется брать в качестве начального распределения классическое распределение (31).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуется СМО с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса, ненулевым коэффициентом диффузии и упругими границами. Разработан и применен численный метод расчета нестационарных и стационарных вероятностных характеристик числа заявок исследуемой СМО, названный методом Эйлера – Лорана. Выполнен численный анализ нестационарного и стационарного распределения числа заявок для значений параметров СМО при различных начальных распределениях числа заявок в СМО. Численный анализ вероятностных характеристик числа заявок проведен с целью наблюдения за установлением стационарного режима в зависимости от значений входных параметров СМО, обоснования наблюдаемых свойств стационарных характеристик.

Для применения метода Эйлера – Лорана в [13] авторами доказано необходимое условие существования и единственности стационарного режима СМО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — М. : Машиностроение, 1979. — 600 с.
2. Harchol-Balter, M. Open problems in queueing theory inspired by datacenter computing / M. Harchol-Balter // Queueing Systems. — 2021. — № 97. — P. 3–37.
3. Purdue, P. The M/M/1 queue in a Markovian environment / P. Purdue // Operations Research. — 1974. — V. 22, № 3. — P. 562–569.
4. Schwarz, M. M/M/1 Queueing systems with inventory / M. Schwarz, C. Sauer, H. Daduna // Queueing Systems. — 2006. — № 54. — P. 55–78.
5. Massey, W. A. Dynamic rate Erlang-A Queues / W. A. Massey // Queueing Systems. — 2018. — V. 89, № 1. — P. 127–164.
6. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н. И. Головкин, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сиб. журн. индустр. математики. — 2008. — Т. 2, № 34. — С. 50–64.

7. Головки, Н. И. Краевые задачи в стационарных системах массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока / Н. И. Головки, В. В. Катрахов, Т. А. Писаренко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 305–312.
8. Прокопьева, Д. Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головки // Известия КГТУ. — 2017. — № 46. — С. 184–193.
9. Прокопьева, Д. Б. Вывод уравнений типа Колмогорова – Чепмена с оператором Фоккера – Планка / Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головки // Дальневосточный математический журнал. — 2020. — № 1. — С. 90–107.
10. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — М. : Сов. радио, 1977. — 488 с.
11. Бахвалов, Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н. С. Бахвалов. — М. : Наука, 1975. — 628 с.
12. Самарский, А. А. Введение в численные методы. / А. А. Самарский. — СПб. : Лань, 2005. — 288 с.
13. Прокопьева, Д. Б. Моменты числа заявок в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока / Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головки // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2022. — № 1. — С. 75–86.
14. Баруча–Рид, А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А. Т. Баруча–Рид. — М. : Наука, 1969. — 511 с.

REFERENCES

1. Kleinrock L. Queueing Systems. [Klejnrok L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya]. Moscow, 1979, 600 p.
2. Harchol-Balter M. Open problems in queueing theory inspired by datacenter computing. Queueing Systems, 2021, no. 97, pp. 3–37.
3. Purdue P. The M/M/1 queue in a Markovian environment. Operations Research, 1974, vol. 22, no. 3, pp. 562–569.
4. Schwarz M., Sauer C., Daduna H. M/M/1 Queueing systems with inventory. Queueing Systems, 2006, no. 54, pp. 55–78.
5. Massey W.A. Dinamic rate Erlang-A Queues. Queueing Systems, 2018, vol. 89, no. 1, pp. 127–164.
6. Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E. and Safonyuk I.I. Research of queueing systems models in information networks. [Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E. and Safonyuk I.I. Issledovanie modelej sistem massovogo obsluzhivaniya v informacionnyh setyah]. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki — Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2008, vol. 2, no. 34, pp. 50–64.
7. Golovko N.I., Katrakhov V.V., Pisarenko T.A. Boundary Value Problems in Stationary Queueing Systems with Diffusion Intensity of the Input Flow. [Golovko N.I., Katrakhov V.V., Pisarenko T.A. Kraevye zadachi v stacionarnyh sistemah massovogo obsluzhivaniya s diffuzionnoj intensivnost'yu vhodnogo potoka]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 3, pp. 305–312.
8. Prokopena D.B., Zhuk T.A., Golovko N.I. Derivation of equations for queueing systems with the diffusion intensity of the input stream and zero ratio of drift. [Prokopieva D.B., Zhuk T.A., Golovko N.I. Vyvod uravneniy dlya system massovogo obsluzhivaniya s diffusionnoy intensivnostyu vhodnogo potoka i nylevym koefficientom snosa]. *Izvestiya KGTU — KSTU News*, 2017, no. 46, pp. 184–193.
9. Prokopena D.B., Zhuk T.A., Golovko N.I. Derivation of Kolmogorov – Chapman type equations with the Fokker – Planck operator. [Prokopieva D.B., Zhuk T.A., Golovko N.I. Vyvod

uravneniy tipa Kolmogorova – Chepmana s operatorom Fokkera – Planka]. *Dal'nevostochnyj matematicheskij zhurnal – Far Eastern mathematical journal*, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 90–107.

10. Tikhonov V.I., Mironov M.A. Markov processes. [Tihonov V.I., Mironov M.A. Markovskie processy]. Moscow, 1977, 488 p.

11. Bakhvalov N.S. Numerical methods (analysis, algebra, ordinary differential equations). [Baxvalov N.S. Chislenny'e metody' (analiz, algebra, oby'knoveny'e differencial'ny'e uravneniya)]. Moscow, 1975, 628 p.

12. Samarskiy A.A. Introduction to numerical methods. [Samarskiy A.A. Vvedenie v chislenny'e metody']. Saint Petersburg, 2005, 288 p.

13. Prokopeva D.B., Zhuk T.A., Golovko N.I. Moments of the applications number in the queuing system with the diffusion intensity of the input stream. [Prokopieva D.B., Zhuk T.A., Golovko N.I. Momenty' chisla zayavok v sisteme massovogo obsluzhivaniya s diffuzionnoj intensivnost'yu vkhodnogo potoka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2022, no. 1, pp. 75–86.

14. Bharucha–Reid A.T. Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. [Barucha–Rid, A.T. Elementy teorii markovskih processov i ih prilozheniya]. Moscow, 1969, 511 p.

Прокопьева Дина Борисовна, доцент кафедры математики, Тихоокеанское высшее военно–морское училище им. С. О. Макарова, Владивосток, Россия
E-mail: Prokopievad@yandex.ru

Prokopeva Dina Borisovna, associate Professor of mathematics Pacific Higher Naval School named after S. O. Makarov, Vladivostok, Russia
E-mail: Prokopievad@yandex.ru

Татьяна Алексеевна, доцент кафедры высшей математики, Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет, Владивосток, Россия
E-mail: Tatyana_zhukdv@mail.ru

Zhuk Tatyana Alekseevna, associate Professor of higher mathematics, Far Eastern state technical fisheries University, Vladivostok, Russia
E-mail: Tatyana_zhukdv@mail.ru

Головко Николай Иванович, доктор технических наук, профессор департамента математики Института математики и компьютерных технологий, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
E-mail: golovko.ni@dvfu.ru

Golovko Nikolay Ivanovich, doctor of engineering, Professor of the Mathematics Department of the Institute of Mathematical and Computer Technologies, Far Eastern federal University, Vladivostok, Russia
E-mail: golovko.ni@dvfu.ru