УДК 517.929.2

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ СИСТЕМА В АНАЛИЗЕ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА С НОСИТЕЛЕМ В СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

**В. В. Провоторов**[1], **А. П. Жабко**[2]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Санкт-Петербургский государственный университет*

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

**Аннотация**. В работе рассматривается начально-краевая задача для эволюционной системы Навье-Стокса с пространственной переменной, изменяющийся в $n$-мерной сетеподобной ограниченной области. Такая область характеризуется наличием конечного числа подобластей, попарно примыкающих между собой в узловых местах частями своих границ. Для исследователя представляется возможность устанавливать условия примыкания подобластей в узловых местах в соответствии с требованиями задач прикладного характера. Схема исследования разрешимости поставленной задачи имеет существенное отличие от классической. А именно, исходная система Навье-Стокса редуцируется к дифференциально-разностной с использованием процесса полу-дискретизации по временной переменной. Этот подход не только несколько облегчает анализ разрешимости эволюционной системы, но и открывает путь к алгоритмизации поставленной задачи. Для дифференциально-разностной системы устанавливаются априорные оценки норм слабых решений, аналогичные энергетическим неравенствам, основываясь при этом, на методе Галеркина со специальным базисом, каковым является совокупность обобщенных собственных функций эллиптического оператора системы Навье-Стокса. Указанные оценки дают возможность показать слабую компактность кусочно-постоянных интерполяций по временной переменной семейства приближенный решений эволюционной задачи и, как следствие, установить разрешимость исходной задачи. Для полноты картины исследование дополнено рассмотрением случая временного запаздывания. Полученные результаты будут использованы при изучении оптимизационных задач для систем Навье-Стокса в сетевых гидродинамических процессах.

**Ключевые слова**: дифференциально-разностная система Навье-Стокса, сетеподобная область изменения переменных, эволюционная система Навье-Стокса, слабая разрешимость.

# DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEM IN THE ANALYSIS OF THE NAVIER-STOKES EVOLUTIONARY SYSTEM WITH A CARRIER IN A NETWORK-LIKE DOMAIN

**V. V. Provotorov, A. P. Zhabko**

**Abstract**. The paper be considered the initial boundary value problem for the Navier-Stokes evolutionary system with a spatial variable changeable in an $n$-dimensional network-like bounded domain. Such a domain is characterized by the presence of a finite number of subdomains, pairwise adjacent to each other in nodal places by parts of their boundaries. For the researcher, it is possible to establish the conditions for the adjoining of subdomains in nodal places in accordance with the requirements of applied problems. The scheme for studying the solvability of the problem has a significant difference from the classical one. Namely, the original Navier-Stokes system is reduced to a differential-difference using a semi-sampling process over a time variable. This approach not only somewhat facilitates the analysis of the solvability of the evolutionary system, but also opens the way to the algorithmically of the problem. For a differential-difference system, a priori estimates of the norms of weak solutions similar to energy inequalities are established, based on the Galerkin method with a special basis, which is the set of generalized eigenfunctions of the elliptical operator of the Navier-Stokes system. These estimates make it possible to show the weak compactness of piecewise-constant interpolations on the time variable of the family approximate to the solutions of the evolutionary problem and, as a result, to establish the solvability of the original problem For completeness of the picture, the study is supplemented by a consideration of the case of a temporary delay. The obtained results will be used in the study of optimization problems for Navier-Stokes systems in network hydrodynamic processes.

**Keywords**: differential-difference Navier-Stokes system, network-like domain of variable change, evolutionary Navier-Stokes system, weak solvability.

## ВВЕДЕНИЕ

Метод полу-дискретизации по временному переменному классического уравнения Навье-Стокса в сетеподобной области n-мерного евклидова пространства приводит к дифференциально-разностной системе Навье-Стокса, аналогичной представленной в работе [1]. Анализ дифференциально-разностной системы, базирующийся на установлении априорных оценках норм слабых решений, является основой для доказательства слабой разрешимости исходной дифференциальной системы Навье-Стокса и построения приближений для отыскания ее слабого решения. При этом используется метод Фаэдо-Галеркина со специальным базисом, каковым является множество обобщенных собственных функций эллиптического оператора уравнения Навье-Стокса [2]. Редукция дифференциальной системы к дифференциально-разностной дает возможность не только установить разрешимость исходной системы, но и открывает пути анализа оптимизационных задач для систем Навье-Стокса в сетевых гидродинамических процессах, а также сетеподобных процессов переноса сплошных сред иного характера [3 – 5]. Для полноты картины исследование дополнено рассмотрением случая временного запаздывания.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Рассмотрим ограниченную сетеподобную область $\Im \subset \mathrm{R}^n$, содержащую $N$ подобластей $\Im_l$ ($l \in I_N = \{1,2,...,N\}$), соединенных между собой в $M$ ($1 \leqslant M \leqslant N-1$) узловых местах $\omega_j$ ($j \in I_M = \{1,2,...,M\}$): $\Im = \widehat{\Im} \bigcup \widehat{\omega}$, где $\widehat{\Im} = \bigcup\limits_{l=1}^{N} \Im_i$, $\widehat{\omega} = \bigcup\limits_{j=1}^{M} \omega_j$, причем $\Im_l \bigcap \Im_{l'} = \varnothing$ ($l \neq l'$), $\omega_j \bigcap \omega_{j'} = \varnothing$ ($j \neq j'$), $\Im_l \bigcap \omega_j = \varnothing$ [6]. Узловые места определяются общими границами подобластей $\Im_l$, которые назовем поверхностями примыкания узловых мест. Каждое узловое место $\omega_j$ ($j \in I_M$) определяется фиксированном числом подобластей, а именно, подобласть $\Im_{l_j}$ и подобласти $\Im_{l'_s}$, $l'_s \in I_M(j) \subset I_M$, $s = \overline{1,m_j}$. Из сказанного следует, что при фиксированном $j \in I_M$ существует фиксированная с помощью этого индекса поверхность $S_j$ ($meas S_j > 0$) примыкания $\Im_{l_j}$ к $\Im_{l'_s}$ подповерхностями $S_{j,s}$ ($meas S_{js} > 0$), $s = \overline{1,m_j}$, причем $S_j$ является частью границы $\Im_{l_j}$ ($S_j \subset \partial\Im_{l_j}$), а $S_{j,s}$ — частями границ $\Im_{l'_s}$ ($S_{j,s} \subset \partial\Im_{l'_s}$) и, кроме того, $S_j = \bigcup\limits_{s=1}^{m_j} S_{js}$. Таким образом, каждое узловое место $\omega_j$ (при фиксированном $j \in I_M$) характеризуется поверхностью $S_j$, подповерхности $S_{js} \subset S_j$ описывают способ примыкания границ $\Im_{l_j}$ к $\Im_{l'_s}$, $l'_s \in I_M(j)$, $s = \overline{1,m_j}$. Исходя из этого, границу $\partial\Im$ области $\Im$ определим объединением границ $\partial\Im_l$ подобластей $\Im_l$ ($l \in I_N$), не включающим в себя все поверхности примыкания всех узловых мест: $\partial\Im = \bigcup\limits_{l=1}^{N} \partial\Im_l \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{M} S_j$. Предполагается, что $S_{js}$ гладкие, а $\Im_l$,

$l \in I_N$, звездные (звездность относительно некоторого шара подобластей $\Im_l$). Везде ниже используются суммируемые на $\Im$ функции, при этом $\int\limits_{\Im} \varphi(x)\,dx = \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{\Im} \varphi(x)\,dx$.

Заметим, что область $\Im$ имеет структуру ограниченного геометрического графа-дерево [7], причем любая подобласть области $\Im$ также имеет структуру ограниченного геометрического графа.

Далее рассматривается математическая модель процесса переноса вязкой жидкости по сетеподобным носителям (в приложениях сетевые и магистральные трубопроводы).

## СИСТЕМА НАВЬЕ-СТОКСА

В области $\Im_T = \Im \times (0,T)$ для векторной функции $Y(x,t) = \{y_1(x,t),y_2(x,t),...,y_n(x,t)\}$, $x,t \in \Im_T$ ($x = \{x_1,x_2,...,x_n\}$, $T < \infty$) рассматривается система

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} - \nu\Delta Y(x,t) + \sum_{i=1}^{n} Y_i(x,t)\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x_i} = f(x,t) - \operatorname{grad} p(x,t), \tag{1}$$

$$\operatorname{div} Y(x,t) = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y(x,t)}{\partial x_i} = 0\right), \tag{2}$$

с условиями примыкания, определяемыми соотношениями

$$Y(x,t)|_{x\in S_{j\iota}\subset\partial\Im_{l_j}} = Y(x,t)|_{x\in S_{j\iota}\subset\partial\Im_{l'_\iota}}, \iota = \overline{1,m_j}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{S_j} \frac{\partial Y(x,t)}{\partial n_j}\,ds + \sum_{\iota=1}^{m_j} \int\limits_{S_{j\iota}} \frac{\partial Y(x,t)}{\partial n_{j\iota}}\,ds = 0, \tag{4}$$

на поверхностях примыкания $S_j$, $S_{j\iota}$ ($\iota = \overline{1,m_j}$) узловых мест $\omega_j$, $j = \overline{1,M}$ для $t \in (0,T)$. Здесь через $n_j$ и $n_{j\iota}$ обозначены внешние нормали к поверхностям $S_j$ и $S_{j\iota}$, $\iota = \overline{1,m_j}$, соответственно; начальные и граничные условия определяются следующими соотношениями:

$$Y(x,t)|_{t=0} = Y_0(x), \;\; x \in \Im, \tag{5}$$

$$Y(x,t)|_{x\in\partial\Im} = 0. \tag{6}$$

Соотношения (1)–(6) определяют начально-краевую задачу для системы Навье-Стокса (1)–(5) в сетеподобной области $\Im_T$ (ниже – это дифференциальная система (1)–(6)) для функций $Y(x,t)$, $p(x,t)$ в области $\overline{\Im}_T$ $\;(\overline{\Im}_T = (\Im \cup \partial\Im) \times [0,T])$ с исходными данными $Y_0(x)$, $f(x,t)$.

В прикладных вопросах математического моделирования процессов транспортировки вязких жидкостей сетеподобная область $\Im$ (носитель гидравлического потока) принадлежит $\mathrm{R}^3$ и определяет модель трубопроводной сети или магистральной гидросистемы, $Y(x,t)$ является количественной характеристикой вектора скоростей гидравлического потока в $\Im_T$, система уравнений Навье-Стокса (1), (2) является математической моделью транспортировки жидкости с вязкостью $\nu$ по гидросистеме, соотношения (4), (5) характеризуют закономерность протекания потоков в местах ветвления (узловых местах) гидросистемы, $p(x,t)$ – давление в гидросистеме [3, 6].

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ СИСТЕМА НАВЬЕ-СТОКСА

Для установления условий разрешимости системы (1)–(6) рассмотрим дифференциально-разностную систему Навье-Стокса

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\tau}[Y(k)-Y(k-1)] - \nu\Delta Y(k) + \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i(k)\frac{\partial Y(k)}{\partial x_i} = f_\tau(k) - \operatorname{grad} p_\tau(k), \\ \operatorname{div} Y(k) = 0, \;\; k = 1,2,...,K, \;\; y(0) = Y_0(x), \end{array} \tag{7}$$

$$Y(k)|_{x\in\partial\Im} = 0, k = 1,2,...,K, \tag{8}$$

здесь $\tau = T/K$, $k\tau \in [0,T]$ $(k = 1,2,...,K-1)$, $Y(k) := Y(x;k)$, $Y(k)_t := \frac{1}{\tau}[Y(k)-Y(k-1)]$, $f_\tau(k) := f_\tau(x;k) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(k-1}^{k\tau} f(x,t)\,dt$, $p_\tau(k) := p_\tau(x;k) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(k-1)}^{k\tau} p(x,t)\,dt$, $k = 1,2,...,K$.

Пусть $L_2(\Im)^n$ — пространство действительных функций $u(x) = \{u_1(x,t),u_2(x,t),...,u_n(x,t)\}$, измеримых по Лебегу со скалярным произведением и нормой вида

$$(u,v) = \int\limits_{\Im} u(x)v(x)\,dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u,u)}.$$

Обозначим через $D(\Im)^n$ пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в области $\Im$. Введем пространство $\mathrm{D}(\Im)^n = \{\varphi: \;\; \varphi \in D(\Im)^n, \;\; div\varphi = 0\}$ и пространство $\mathcal{H}(\Im)$ как замыкание $\mathrm{D}(\Im)^n$ в $L_2(\Im)^n$. Далее введем пространство $\mathcal{H}^1(\Im)$, элементами которого являются функции $\varphi(x) \in \mathcal{H}(\Im)$ с обобщенными производными $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \in L_2(\Im)^n$, скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}^1(\Im)$ определяются соответствующими соотношениями:

$$(\mu,\rho)_1 = (\mu,\rho) + \left(\frac{\partial\mu}{\partial x},\frac{\partial\rho}{\partial x}\right), \quad \|u\|_1 = \sqrt{(u,u)_1}.$$

Пространством состояний $V_0^1(\Im)$ дифференциально-разностной системы (7), (8) является замыкание в $\mathcal{H}^1(\Im)$ множества всех функций $\varphi \in \mathrm{D}(\Im)^n$, удовлетворяющих условиям

$$\int\limits_{S_j}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n_j}\,ds + \sum_{\iota=1}^{m_j}\int\limits_{S_{j\iota}}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n_{j\iota}}\,ds = 0.$$

Пусть функции $Y_0(x)$, $f(x,t)$ удовлетворяют условиям $Y_0(x) \in V_0^1(\Im)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Im_T)^n$ (элементы $u \in L_1(\Im_T)^n$ пространства $L_{2,1}(\Im_T)^n$ имеют конечной норму $\|u\|_{2,1} = \int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Im}\|u\|^2\,dx\right)^{1/2} dt$), последнее означает $f_\tau(k) \in L_2(\Im)^n$. Введем следующие обозначения:

$$\rho(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,dx, \quad \widetilde{\rho}(u,v,\omega) = \sum_{i,k=1}^{n}\int\limits_{\Im} u_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\omega_i\,dx;$$

дифференциальные формы $\rho(u,v)$ и $\widetilde{\rho}(u,v,\omega)$ определены на элементах пространства $V_0^1(\Im)$.

**Определение 1.** *Совокупность* $\left\{Y(k): \;\; Y(k) \in V_0^1(\Im),\, k = 1,2,...,K, \;\; p_\tau(k) \in C(\Im)\right\}$, *для которой при каждом фиксированном* $k$ $(k = 1,2,...,K-1)$ *функция* $Y(k)$ *удовлетворяет тождеству*

$$\frac{1}{\tau}(Y(k)_t,\eta) + \nu\rho(Y(k),\eta) + \widetilde{\rho}(Y(k),Y(k),\eta) = (f_\tau(k),\eta), \;\; Y(0) = Y_0(x), \tag{9}$$

*для произвольных* $\eta(x) \in V_0^1(\Im)$, *называется слабым решением дифференциально-разностной системы Навье-Стокса* (7), (8).

**Замечание 1.** Из соотношения (9) определения следует, что для $p_\tau(k) := p_\tau(x;k)$ достаточно принадлежности классу непрерывных функций $C(\Im)$, а значит, существование $p_\tau(k)$ вытекет из существования функций $Y(k) \in V_0^1(\Im)$, $k = 1,2,...,K$.

В дальнейших рассуждениях потребуются следующие утверждения (смотри также [8, с. 79]).

**Лемма 1.** *Формы* $\rho(u,v)$ *и* $\widetilde{\rho}(u,v,\omega)$ *непрерывны по* $u, v$ *и* $u, v, \omega$ *на* $V_0^1(\Im)\times V_0^1(\Im)$ *и* $L_4(\Im)^n \times V_0^1(\Im) \times L_4(\Im)^n$, *соответственно.*

**Доказательство.** Используя неравенства Коши-Буняковского для $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ и $u_k$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, $\omega_i$ в представлениях $\rho(u,v)$ и $\widetilde{\rho}(u,v,\omega)$, приходим к следующим неравенствам:

$$\left|\int\limits_{\Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant \left(\int\limits_{\Im}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Im}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\,dx\right)^{1/2} \leqslant \|u_j\|_{V_0^1(\Im)}\|v_j\|_{V_0^1(\Im)}, \qquad (10)$$

$$\left|\int\limits_{\Im} u_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\omega_i dx\right| \leqslant \left(\int\limits_{\Im}(u_k\omega_i)^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Im}(\frac{\partial v_i}{\partial x_k})^2dx\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\Im} u_k^4dx\right)^{1/4}\left(\int\limits_{\Im}(\frac{\partial v_i}{\partial x_k})^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Im}\omega_i^4dx\right)^{1/4} \leqslant \|u_k\|_{L_4(\Im)^n}\,\|v_j\|_{V_0^1(\Im)}\,\|\omega_i\|_{L_4(\Im)^n}\,. \qquad (11)$$

Утверждения леммы для $\rho(u,v)$ и $\widetilde{\rho}(u,v,\omega)$ следуют из неравенств (10) и (11), соответственно.

**Лемма 2.** *Для произвольных* $u,\, \omega \in V_0^1(\Im)$ *справедливы следующие соотношения*: 1) $\widetilde{\rho}(u,u,\omega) = -\widetilde{\rho}(u,\omega,u)$, 2) $\widetilde{\rho}(u,\omega,\omega) = 0$, 3) $\widetilde{\rho}(\omega,\omega,\omega) = 0$.

**Доказательство.** Интегрирование по частям всех слагаемых в выражении $\sum\limits_{i,k=1}^{n}\int\limits_{\Im} u_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\omega_i\,dx$ приводит к первому соотношению, оставшиеся соотношения являются следствиями первого.

**Лемма 3.** *Из слабой сходимости в* $L_2(\Im)^n$ *последовательностей* $\{u_m\}$, $\{v_m\}$ *вытекает слабая сходимость в* $L_2(\Im)^n$ *к* $uv$ *последовательности* $\{u_m v_m\}$.

**Доказательство.** Покажем сходимость $\int\limits_{\Im_T} u_m v_m \varsigma\, dxdt$ к $\int\limits_{\Im_T} uv\,\varsigma\, dxdt$ при $m \to \infty$ для произвольного элемента $\varsigma(x) \in V_0^1(\Im)$. Из слабой сходимости $\{u_m\}$, $\{v_m\}$ к $u,v$ следует ограниченность $u_m$, $v_m$, а значит, неравенства: $\|u_m\| + \|u\| \leqslant c$, $\|v_m\| + \|v\| \leqslant c$. Последовательности $\{u_m\varsigma\}$, $\{v_m\varsigma\}$ сильно сходятся в $L_2(\Im)^n$ к $u_\varsigma$, $v_\varsigma$, соответственно, как это следует из цепочки неравенств

$$\|v_m\varsigma - v\varsigma\|_{L_2(\Im)^n} \leqslant \|v_m - v\|_{L_2(\Im)^n}\,\|\,\varsigma\,\|_{L_2(\Im)^n} \leqslant \varepsilon\left(\|v_m\|_{L_2(\Im)^n} + \|\,v\,\|_{L_2(\Im)^n}\right) \leqslant \varepsilon\, c,$$

если в качестве $\varsigma(x)$ взять $\frac{\varepsilon}{\|\varsigma\|_{L_2(\Im)^n}}\varsigma(x)$ (для $u_m\varsigma$ неравенства аналогичные). Отсюда и из оценок

$$\left|\int\limits_{\Im} u_m v_m\varsigma dx - \int\limits_{\Im} u_m v\varsigma dx\right| = \int\limits_{\Im}|(u_m v_m - uv)\varsigma|\,dx \leqslant \|u_m\|_{L_2(\Im)^n}\,\|v_m\varsigma - v\varsigma\|_{L_2(\Im)^n}\,,$$

$$\left|\int\limits_{\Im} u_m v_m \varsigma dx - \int\limits_{\Im} uv\varsigma dx\right| = \int\limits_{\Im} \left|(u_m v_m - uv)\,\varsigma\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \|u_m\|_{L_2(\Im)^n} \|v_m\varsigma - v\varsigma\|_{L_2(\Im)^n} + \| v \|_{L_2(\Im)^n} \|v_m\varsigma - v\varsigma\|_{L_2(\Im)^n}$$

следует утверждение леммы.

Анализ слабой разрешимости системы (1)–(6) использует априорные оценки и системы (7), (8) и метод Галеркина, основанный на базисе пространства $V_0^1(\Im)$ (а также и $L_2(\Im)$), каковым является система обобщенных собственных функций $\{U_i(x)\}$ оператора $\Delta Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2}$ [6].

Обратимся к вопросу построения априорных оценок слабого решения дифференциально-разностной системы (7), (8). Пусть исходные данные $Y_0(x) \in V_0^1(\Im)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Im_T)^n$ для системы (1)–(7) (пространство $L_{2,1}(\Im_T)^n$ состоит из элементов $u \in L_1(\Im_T)^n$, $\|u\|_{2,1} = \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Im} \|u\|^2\,dx\right)^{1/2}$), что означает $f_\tau(k) \in L_{2,}(\Im)^n$ для системы (7), (8). Для определения приближений $Y_m(k)$ слабого решения $Y(k)$ $(k = 1,2,...,K-1)$ системы (7), (8) будем использовать разложение $Y_m(k) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{i,\,m}^k U_i(x)$. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\tau}\left(Y_m(k)_t,\, U_i\right) + \nu\rho\left(Y_m(k),\, U_i\right) + \widetilde{\rho}\left(Y_m(k),Y_m(k),\, U_i\right) = \\ &= \left(f_\tau(k),\, U_i\right), \quad i = 1,2,...,m, \quad k = 1,2,...,K, \end{aligned} \tag{12}$$

$$Y_m(0) = Y_{0,\,m}(x), \tag{13}$$

где $Y_{0,\,m}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{i,\,m}^0 U_i(x)$ ($g_{i,\,m}^0$ — const), $Y_{0,\,m}(x) \to Y_0(x)$ в норме $V_0^1(\Im)$.

Вначале получим априорные оценки норм функций $Y(k)$, $k = 1,2,...,K$, через нормы исходных данных $Y_0(x)$, $f_\tau(k)$, $k = 1,2,...,K$.

**Теорема 1.** *Если $Y_0(x) \in V_0^1(\Im)$, $f_\tau(k) \in L_2(\Im)^n$ $(k = 1,2,...,K)$, тогда для функций $Y_m(k)$, $k = 1,2,...,K$, совокупности $\left\{Y(k):\ Y(k) \in V_0^1(\Im),\ k = 1,2,...,K\right\}$ справедливы априорные оценки*

$$\|Y_m(k)\| \leqslant \|Y_m(0)\| + 2\sum_{k'=1}^{k} \tau\|f_\tau(k')\| = \|Y_0\| + 2\|f_\tau(k)\|_{2,1}', \ \ k = 1,2,...,K, \tag{14}$$

$$\|Y_m(k)\|^2 + 2\tau\nu \sum_{k'=1}^{k} \|\frac{\partial Y_m(k')}{\partial x}\|^2 \leqslant C\left(\|Y_0\|^2 + (\|f_\tau(k)\|_{2,1}')^2\right), \ \ k = 1,2,...,K, \tag{15}$$

*с независящей от $\tau$ постоянной $C$; $\| f_\tau(k) \|_{2,\,1}' = \sum\limits_{k'=1}^{k} \tau \| f_\tau(k') \|$.*

Указанные в теореме оценки вытекают из соотношения (9) и оценок для дифференциальных форм $\rho(u,v)$ и $\widetilde{\rho}(u,v,\omega)$. Полученные оценки используются при доказательстве разрешимости начально-краевой задачи (1)–(6) системы Навье-Стокса.

**Доказательство.** Соотношение $Y(k-1) = Y(k) - \tau Y(k)_t$ приводит к очевидному соотношению $2\tau(Y(k),Y(k)_t) = Y^2(k) + \tau^2 Y(k)_t^2 - Y^2(k-1)$. Умножая (22), (13) на $2\tau g_{i,m}^k$ и суммируя полученное по $i$ от 1 до $m$, приходим к соотношениям

$$Y_m^2(k) - Y_m^2(k-1)) + \tau^2 Y_m^2(k)_t + 2\tau\nu\rho(Y_m(k),Y_m(k) = 2\tau(f_\tau(k),Y_m(k)), \ \ k = 1,2,...,K,$$

учитывая $\rho(Y_m(k),Y_m(k),Y_m(k)) = 0$ (лемма 2, утверждение 3), откуда получаем

$$\|Y_m(k)\|^2 - \|Y_m(k-1)\|^2 + \tau^2\|Y_m(k)_t\|^2 + 2\tau\nu\|\frac{\partial Y_m(k)}{\partial x}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\tau\|f_\tau(k)\|\|Y_m(k)\|, \ \ k = 1,2,...,K, \tag{16}$$

а значит,

$$\|Y_m(k)\|^2 - \|Y_m(k-1)\|^2 \leqslant 2\tau \|f_\tau(k)\| \|Y_m(k)\|, k = 1,2,...,K. \tag{17}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1). Пусть $\|Y_m(k)\| + \|Y_m(k-1)\| > 0$. Так как $\frac{\|Y_m(k)\|}{\|Y_m(k)\|+\|Y_m(k-1)\|} \leqslant 1$, то деля соотношение (17) на $\|Y_m(k)\| + \|Y_m(k-1)\|$, приходим к неравенствам

$$\|Y_m(k)\| - \|Y_m(k-1)\| \leqslant 2\tau \|f_\tau(k)\|, \quad k = 1,2,...,K. \tag{18}$$

2). Если $\|Y_m(k)\| + \|Y_m(k-1)\| = 0$, то из (17) следует $0 \leqslant 2\tau \|f_\tau(k)\| \|Y_m(k)\|$ и

$$\|Y_m(k)\|^2 - \|Y_m(k-1)\|^2 \leqslant 2\tau \|f_\tau(k)\| \|Y_m(k)\|, \quad k = 1,2,...,K,$$

мы снова приходим к (18).

Суммируя соотношения (18) по $k'$ от 1 до $k$, получим оценку (14), суммируя соотношения (16) по $k'$ от 1 до $k$ и при этом используя оценки (14), получим неравенство

$$\| Y_m(k) \|^2 + 2\tau\nu \sum_{k'=1}^{k} \| \frac{\partial Y_m(k')}{\partial x} \|^2 \leqslant \| Y_m(k) \|^2 + \tau^2 \sum_{k'=1}^{k} \| Y_m(k)_t \|^2 + 2\tau\nu \sum_{k'=1}^{k} \| \frac{\partial Y_m(k')}{\partial x} \|^2,$$

приводящее к оценке (15). Отметим при этом, что норма $\|\cdot\|'_{2,1}$ — "полудискретный" аналог нормы $\|\cdot\|_{2,1}$ пространства $L_{2,1}(\Im_T)^n$.

**Замечание 2.** При условии отсутствия слагаемого $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i}$ в соотношениях (1) и (8), а значит, формы $\widetilde{\rho}(Y(k),Y(k),\eta)$ в (9), из оценок (14), (15) непосредственно вытекает непрерывная зависимость слабого решения $\left\{Y(k): \quad Y(k) \in V_0^1(\Im), \quad k = 1,2,...,K\right\}$ дифференциально-разностной системы (8), (12) от исходных данных $Y_0(x)$, $f_\tau(k)$.

**Замечание 3.** Априорные оценки, представленные утверждениями теоремы 1 (см. (14), (15)), лежат в основе получения условий разрешимости дифференциальной системы (1)–(6).

## РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА

Для анализа системы Навье-Стокса введем пространства функций переменных $x = \{x_1,x_2,...,x_n\}$ и $t \in (0, T)$:

1) $W^{1,0}(\Im_T)$ — пространство функций $u(x,t) \in L_2(\Im_T)^n$, обобщенные производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ которых из $L_2(\Im_T)^n$, $\|u\|_{W^{1,0}(\Im_T)} = \left(\|u\|^2 + \|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2\right)^{1/2}$,

2) $W^1(\Im_T)$ — пространство функций $u(x,t) \in L_2(\Im_T)^n$, обобщенные производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ которых из $L_2(\Im_T)^n$, норма определена формулой$\|u\|_{W^1(\Im_T)} = \left(\|u\|^2 + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2 + \|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2\right)^{1/2}$.

При этом элементы $u(x,t)$пространств $W^{1,0}(\Im_T)$ и $W^1(\Im_T)$ обладают следующими свойствами:

а) $u(x,t)$ непрерывны по $t$ в норме $L_2(\Im)^n$,

б) следы $u(x,t)$ на плоскостях $t = t_0 \in (0,T)$ области $\Im_T$ принадлежат $L_2(\Im)^n$.

Введем множества $\Omega_1(\Im_T) \subset W^{1,0}(\Im_T)$ и $\Omega_2(\Im_T) \subset W^1(\Im_T)$, элементы которых принадлежат $V_0^1(\Im)$ при фиксированном $t \in (0,T)$. Замыкания $\Omega_1(\Im_T)$, $\Omega_2(\Im_T)$ в соотвествующих пространствах $W^{1,0}(\Im_T)$, $W^1(\Im_T)$ обозначим через $W_0^{1,0}(\Im_T)$, $W_0^1(\Im_T)$, тогда $u|_{\partial\Im} = 0$, при $u(x,t) \in W_0^{1,0}(\Im_T)$ или $u(x,t) \in W_0^1(\Im_T)$.

**Определение 2.** *Совокупность*

$$\left\{Y(x,t),p(x,t): \quad Y(x,t) \in W_0^{1,0}(\Im_T),\ p(x,t) \in C(\Im_T)\right\},$$

*называется слабым решением дифференциальной системы* (1)–(6), *если* $Y(x,t)$ *удовлетворяет тождеству*

$$-\int\limits_{\Im_T} Y(x,\tau)\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau}dxd\tau+\nu\int\limits_0^T\rho(Y,\eta)d\tau+\int\limits_0^T\rho(Y,Y,\eta)d\tau=$$

$$=(Y_0(x),\eta(x,0))+\int\limits_{\Im_T} f(x,\tau)\eta(x,\tau)dxd\tau\quad\forall\ \eta(x,t)\in W_0^1(\Im_T),\ \ \eta(x,T)=0. \quad (19)$$

**Теорема 2.** *Если* $Y_0(x)\in V_0^1(\Im)$, $f(x,t)\in L_{2,1}(\Im_T)^n$, *тогда начально-краевая задача (1)–(6) системы Навье-Стокса слабо разрешима.*

**Доказательство.** При доказательстве утверждения теоремы используется решение $\{Y(k)\in V_0^1(\Im),\ k=1,2,...,K\}$ дифференциально-разностной системы (8), (12). Вводятся функции $Y_K(x,t)$ вида $Y_K(x,t)=Y(k)$, $t\in((k-1)\tau,k\tau]$, $k=1,2,...,K$, $Y_K(x,0)=Y_0(x)$ и показывается ограниченность их в совокупности, используя априорные оценки (утверждения теоремы 1). Вытекающая отсюда слабая компактнсть последовательности $\{Y_K(x,t)\}$ дает воможность установить существование слабого предела подпоследовательности указанной последовательности, для которого справедливо тождество (19).

Исходя из решения $\{Y(k)\in V_0^1(\Im), k=1,2,...,K\}$ дифференциально-разностной системы (8), (12), введем функцию $Y_K(x,t)$ вида $Y_K(x,t)=Y(k)$, $t\in((k-1)\tau,k\tau]$, $k=1,2,...,K$, $Y_K(x,0)=Y_0(x)$ (кусочно-постоянные интерполяции по временной переменной $t$ для $Y(k)$). Принадлежность $u_K(x,t)$ пространству $W_0^{1,0}(\Im_T)$ очевидна. Функция $u_K(x,t)$ удовлетворяет оценкам теоремы 1 (неравенства (14) и (15)) и, следовательно, для нее справедливо неравенство

$$\|Y_K\|+\|\frac{\partial Y_K}{\partial x}\|\leqslant C^*, \quad (20)$$

постоянная $C^*>0$ не зависит от $\tau$. Аналогичное представление через $f(x;k)$, $k=1,2,...,K$, имеет функция $f_K(x,t)$: $f_K(x,t)=f(x;k)$, $t\in((k-1)\tau,k\tau]$, $k=1,2,...,K$. Устремим $K$ к бесконечности ($\tau\to 0$). Тогда, учитывая неравенство (20), из последовательности $\{Y_K(x,t)\}$ выделим подпоследовательность $\{\widetilde{Y}_K(x,t)\}$, которая будет сходится к $Y(x,t)\in W_0^{1,0}(\Im_T)$. Покажем, что $Y(x,t)$ является слабым решением дифференциальной системы (1)–(6). Для этого установим, что $Y(x,t)$ удовлетворяет тождеству (19) определения 2 для любой $\eta(x,t)\in C^1(\Im_{T+\tau})^n$, которая удовлетворяет условиям примыкания (4), (5) при любых $t\in(0,T)$ и для которой выполняются условия $\eta|_{\partial\Im_T}=0$, $\eta|_{t\in[T,T+\tau]}=0$. Функции $\eta(k)$ определяются по $\eta(x,t)$ с помощью равенств $\eta(k)=\eta(x,k\tau)$, $k=1,2,...,K$, при этом $\eta(k)'_t=\frac{1}{\tau}[\eta(k+1)-\eta(k)]$ (разностные отношения $\eta(k)'_t$, $\eta(k)_t=\frac{1}{\tau}[\eta(k)-\eta(k-1)]$ являются правой и левой аппроксимациями $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ для $t=k\tau$, соответственно). Как и для $Y_K(x,t)$, по функциям $\eta(k)$ формируются кусочно-непрерывные по временной переменной $t$ аппроксимации $\eta_K(x,t)$, $\frac{\partial\eta_K(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta_K(x,t)}{\partial t}$ функций $\eta(x,t)$, $\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}$. Заметим при этом, что $\eta_K(x,t)$, $\frac{\partial\eta_K(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta_K(x,t)}{\partial t}$ равномерно сходятся на $\overline{\Im}_T$ к $\eta(x,t)$, $\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}$ при $K\to\infty$, соответственно; $\eta_K(x,t)=0$, $t\in[T,T+\tau]$.

Положим в интегральном тождестве (9) $\eta(x)=\tau\eta(k):=\tau\eta(x;k)$ и просуммируем его по $k$ от 1 до $N$, получим

$$-\tau\sum_{k=1}^N\int\limits_{\Im} Y(k)\eta(k)_t dxdt-\int\limits_{\Im} Y_0\eta(1)dx+$$

$$+\nu\sum_{k=1}^N\tau\rho(Y(k),\eta(k))+\sum_{k=1}^N\tau\widetilde{\rho}(Y(k),Y(k),\eta(k))=\sum_{k=1}^N\tau\int\limits_{\Im} f_\tau(k)\eta(k)), \quad (21)$$

учитывая соотношения

$$\tau \sum_{k=1}^{N} Y(k)_t \eta(k) = -\tau \sum_{k=1}^{N} Y(k)\eta(k)_t - Y(0)\eta(1), \eta(N) = \eta(N+1) = 0.$$

Из соотношения (21) непосредственно следует

$$-\int_{\Im_T} Y_K(x,t)\eta_K(x,t)_t dxdt - \int_{\Im} Y_0(x,t)\eta(x,\tau)dx +$$
$$+\nu \int_0^T \rho(Y_K,\eta_K)dt + \int_0^T \rho(Y_K,Y_K,\eta_K)dt = \int_{\Im_T} f_K(x,t)\eta_K(x,t)dxdt. \quad (22)$$

Переходя в (22) к пределу по подпоследовательности $\{\widetilde{Y}_K(x,t)\}$ и учитывая при этом утверждение леммы 3, получим тождество (19) определения 2 слабого решения дифференциальной системы (1)–(6). Следует отметить при этом, что в силу следствия теоремы 1 слабое решение дифференциальной системы (1)–(6) непрерывно зависит от исходных данных $Y_0(x)$, $f_\tau(k)$. Теорема доказана.

## ЭВОЛЮЦИОННАЯ СИСТЕМА НАВЬЕ-СТОКСА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Утверждения теорем 1 и 2 станут основополагающими для анализа гидродинамических процессов в сетевых носителях, если полученные результаты для системы (1)–(6) дополнить рассмотрением случая временного запаздывания. Покажем это на примере, когда запаздывание $h$ постоянно и принадлежит интервалу $(0, T)$. Рассмотрим систему (1)–(6), где уравнение (1) заменено на

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} - \nu\Delta Y(x,t) + \sum_{i=1}^{n} Y_i(x,t)\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x_i} + c(x)Y(x,t-h) = f(x,t) - \operatorname{grad} p(x,t), \quad (1')$$

здесь $x,\, t \in \Im_{h,\,T} = \Im \times (h,\, T)$, а $c(x)$ – ограниченная измеримая на $\Im$ функция.

Решение $Y(x,t)$ системы $(1')$ на $\Im_h = \Im \times (0,\, h)$ задается функцией $\theta(x,\, t)$, начальное условие (6) принимает вид

$$Y(x,\, t)|_{t=0} = \theta(x,\, t), \quad x,\, t \in \Im_h. \quad (5')$$

Начально-краевая задача $(1')$, (2)–(5), $(5')$, (7) определяет эволюционную систему Навье-Стокса с временным запаздыванием $h$.

Преобразуем начально-краевую задачу $(1')$, (2)–(5), $(5')$, (7) к виду, аналогичному (1)–(7), введением линейного непрерывного оператора

$$\mathbb{Z}Y(x,\, t) = \begin{cases} Y(x,\, t-h), & x,\, t \in \Im_{h,\,T}, \\ 0, & x,\, t \in \Im_h. \end{cases}$$

Далее приведем формальные преобразования. Зададим функцию $\theta(x,\, t) \in W^{1,\,0}(\Im_T)$, удовлетворяющую краевому условию (7), и на $\Im_T$ введем функцию

$$F(x,\, t) = \begin{cases} f(x,\, t), \quad x,\, t \in \Im_{h,\,T}, \\ \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} - \nu\Delta\theta(x,t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i(x,t)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x_i}, \quad x,\, t \in \Im_h, \end{cases}$$

и функцию $Y_0(x) = \theta(x, 0)$, в предположении, что $\theta(x, t)$ имеет след $\theta(x, 0) \in V_0^1(\Im)$. Тогда уравнение (1′) примет вид

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} - \nu\Delta Y(x,t) + \sum_{i=1}^{n} Y_i(x,t)\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x_i} + c(x)Y(x, t) = F(x,t) - \operatorname{grad} p(x,t), \qquad (1'')$$

Дальнейший анализ системы (1″) (2)–(7), учитывая $Y_0(x) = \theta(x, 0)$, полностью повторяет представленный выше для системы (1)–(7).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемая в работе начально-краевая задача для эволюционной системы Навье-Стокса (1)–(7) или (1″) (2)–(7) имеет пространственную переменную, изменяющуюся в сетеподобной области $\Im$, что является существенным отличием ее от классической системы Навье-Стокса. Такая особенность открывает возможность исследователю устанавливать условия примыкания подобластей в узловых местах в соответствии с требованиями прикладного характера. Схема исследования разрешимости поставленной задачи также имеет существенное отличие от классической — исходная система Навье-Стокса редуцируется к дифференциально-разностной и исследование сводится к анализу "стационарной" системе Навье-Стокса, что не только облегчает исследование, но и открывает путь к алгоритмизации поставленной задачи. Для дифференциально-разностной системы устанавливаются априорные оценки слабых решений, аналогичные энергетическим неравенствам, основываясь на методе Галеркина со специальным базисом. Указанные оценки дают возможность показать слабую компактность кусочно-постоянных интерполяций по временной переменной семейства приближенный решений эволюционной задачи, что дает возможность установить разрешимость исходной задачи. Для полноты картины исследование дополнено рассмотрением случая временного запаздывания. Полученные результаты несомненно будут использованы не только при изучении оптимизационных задач для систем Навье-Стокса в сетевых гидродинамических процессах, но и при изучении иных сетеподобных процессов прикладного характера [9, 10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хоанг, В. Н. Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций / В. Н. Хоанг, В. В. Провоторов // Вестник российских университетов. Математика. — 2022. — Т. 27, № 137. — С. 80–94.

2. Provotorov, V. V. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region / V. V. Provotorov, V. I. Ryazhskikh, Yu. F. Gnilitskaya // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer sciense. Control processes. — 2017. — V. 13, iss. 3. — P. 264–277.

3. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Zhabko, V. V. Provotorov // Journal of Physics. Conference Series. — 2019. — V. 1203. — Article ID 012094.

4. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results / E. S. Baranovskii, V. V. Provotorov, M. A. Artemov, A. P. Zhabko // Symmetry. — 2021. — V. 13. — Article ID 1300.

5. Artemov, M. A. Solvability of the boussinesq approximation for water polymer solutions / M. A. Artemov, E. S. Baranovskii // Mathematics. — 2019. — V. 7. — Article ID 611.

6. Provotorov, V. V. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain / V. V. Provotorov, E. N. Provotorova // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. — 2017. — V. 13, iss. 2. — P. 428–441.

7. Zhabko, A. P. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation

/ A. P. Zhabko, K. B. Nurtazina, V. V. Provotorov // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. — 2019. — V. 15, iss. 3. — P. 322–335.

8. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 587 с.

9. Kamachkin, A. M. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay / A. M. Kamachkin, D. K. Potapov, V. V. Yevstafyeva // Intern. Journal Control. — 2020. — V. 93. — P. 763–770.

10. Veremey, E. I. Plasma stabilization by prediction with stable linear Approximation / E. I. Veremey, M. V. Sotnikova // Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. — 2011. — Iss. 1. — P. 116–133.

## REFERENCES

1. Hoang V.N., Provotorov V.V. Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in a class of functions summable on a network-like domain. [Hoang V.N., Provotorov V.V. Ustoichivost trehsloini simmetrichnoi differencialo-raznostnoi shemi v klasse summiruemih funkcii]. *Vestnik rossiiskih universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 80–94.

2. Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitskaya Yu.F. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer sciense. Control processes, 2017, vol. 13, iss. 3, pp. 264–277.

3. Artemov M.A., Baranovskii E.S., Zhabko A.P., Provotorov V.V. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network. Journal of Physics. Conference Series, 2019, vol. 1203, Article ID 012094.

4. Baranovskii E.S., Provotorov V.V., Artemov M.A., Zhabko A.P. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results. Symmetry, 2021, vol. 13, Article ID 1300.

5. Artemov M.A., Baranovskii E.S. Solvability of the boussinesq approximation for water polymer solutions. Mathematics, 2019, vol. 7, Article ID 611.

6. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 428–441.

7. Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 322–335.

8. Lions J.-L. Some methods for solving nonlinear boundary value problems. [Lions J.-L. Nekotorie metodi resheniya nelineinih kraevih zadach]. Moscow: Mir, 1972, 587 p.

9. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay. Intern. Journal Control, 2020, vol. 93, pp. 763–770.

10. Veremey E.I., Sotnikova M.V. Plasma stabilization by prediction with stable linear Approximation. Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2011, iss. 1, pp. 116–133.

*Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
*E-mail: wwprov@mail.ru*

*Provorotov Vyacheslav Vasil'evich, Doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Department of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia*
*E-mail: wwprov@mail.ru*

*Жабко Алексей Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления, Санкт–Петербургский государственный университет, Санкт–Петербург, Россия*
*E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru*

*Zhabko Aleksei Petrovich, Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Saint–Petersburg State University, Saint–Petersburg, Russia*
*E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru*