

ОЦЕНКА КРИВИЗНЫ МНОГООБРАЗИЯ ДЛЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Ю. А. Лебедева, Л. В. Стенюхин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.12.2022 г.

Аннотация. В работе рассматривается задача о прохождении твёрдого тела через многообразие. Подобная задача впервые была поставлена Л. Мозером и впоследствии развивалась и модифицировалась Дж. Хаммерсли, Дж. Гервером, Ф. Гиббсом и другими математиками в течение последнего полувека. Результаты заключались в улучшении оценок параметров границ многообразий и их мер, в исследовании их топологических характеристик. Авторами статьи получены оценки кривизны границы гладкого многообразия — коридора, способного пропустить другое многообразие с заданными параметрами размеров.

Ключевые слова: многообразие, кривизна границы, априорная оценка.

ESTIMATING THE CURVATURE OF A MANIFOLD FOR THE PASSAGE OF A SOLID BODY

Y. A. Lebedeva, L. V. Stenyukhin

Abstract. The paper considers the problem of the passage of a rigid body through a manifold. A similar problem was first posed by L. Moser and subsequently developed and modified by J. Hammerlsy, J. Gerver, F. Gibbs and other mathematicians over the past half century. The results consisted in improving the estimates for the parameters of the boundaries of manifolds and their measures, and in studying their topological characteristics. The authors of the article obtained estimates for the curvature of the boundary of a smooth manifold — a corridor capable of passing through another manifold with given size parameters.

Keywords: manifold, curvature of the boundary, a priori estimation.

1. ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВОПРОСА. ЗАДАЧА О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ДИВАНА

Данная статья является продолжением и дополнением работ [1] и [2].

Много ли мы знаем задач о прохождении твёрдого тела через многообразие? А сколько из них решены? О некоторых таких задачах и их исследовании пойдёт речь в этой статье. Отправной точкой повествования станет так называемая «задача о перемещении дивана», которая возникла в 1966 году. Она была впервые сформулирована математиком Лео Мозером [11]. Задача сводится к двумерной идеализации житейской проблемы о перемещении мебели.

В двумерном пространстве существует жёсткое тело с максимально возможной площадью A , которое может быть перемещено в «Г»-образном «коридоре», образованном «тоннелями» шириной в единицу измерения, сходящимися под прямым углом. Полученное значение A принято называть **константой дивана**. *Определение точного значения константы дивана является открытой проблемой.* В альтернативных формулировках той же самой задачи движимый предмет является идеализацией стола, или же баржи, в «Г»-образном канале.

Математиками была проделана работа по доказательству того, что константа дивана не

может быть ниже или выше определенных значений, то есть она имеет нижние и верхние границы. Основное направление поисков константы — попытка добиться её точного значения, подходу с двух сторон и улучшая границы интервала.

Понятно, что в заданном коридоре легко переместить квадрат со стороной 1. Очевидно, что можно протащить полукруг радиуса 1, поэтому с учётом формулы площади круга получим нижнюю оценку для константы: $\pi/2 = 1.570796327\dots$. Оценка сверху, вычисленная британцем Джоном Хаммерсли [12], показывает также, что константа дивана не превышает $2\sqrt{2} = 2.82842712\dots$

Кроме того, Джон Хаммерсли в 1968 году повысил нижнюю оценку, предложив фигуру площадью $\pi/2 + 2/\pi = 2.2074\dots$. Его фигура напоминает телефонную трубку, она состоит из двух четвертей единичных окружностей, присоединенных с каждой стороны прямоугольника. Прямоугольник имеет размеры 1 на $4/\pi$, из него удален полукруг радиусом $2/\pi$.

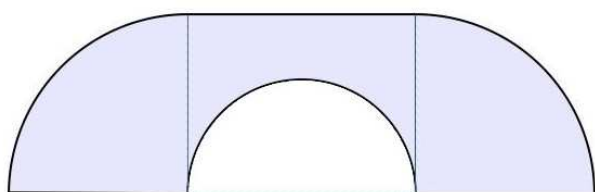


Рис. 1. Диван Хаммерсли

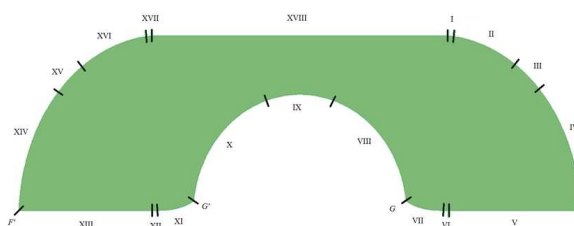


Рис. 2. Диван Гервера

В 1992 году Джозеф Гервер нашел лучшую форму тела с немного большей площадью и улучшил оценку константы дивана снизу до $2.21953166777197\dots$. В статье Гервера «О перемещении дивана за угол» [3] задается необходимое условие для того, чтобы область плоскости имела наибольшую возможную площадь среди всех областей, способных двигаться вокруг прямоугольного угла в коридоре единичной ширины. Построена область, имеющая площадь $2.21953\dots$ и ограниченная 18 аналитическими кривыми, которая удовлетворяет этому условию. Предполагается, что это единственная область максимальной площади.

Джозеф Гервер не доказал, что его конструкция оптимальна, но он вывел свою форму дивана из соображений локальной оптимальности. Упрощенно говоря, площадь фигуры находится в равновесии при внесении небольших возмущений в траекторию, по которой транспортируется фигура. Это приводит к дифференциальным уравнениям, которые могут быть решены, чтобы найти формулы для различных частей формы дивана. Эта форма задается 3 прямыми и 15 криволинейными участками, каждый из которых описывается отдельным аналитическим выражением.

Спустя более 55 лет вопрос, поставленный Лео Мозером, не разрешен до конца, но представляется вполне вероятным, что диван Гервера может быть правильным решением.

2. БОЛЕЕ СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОБЛЕМЫ ДИВАНА

Математик Филип Гиббс вместо того, чтобы конструировать различные формы дивана и смотреть, какие из них могут перемещаться по коридору и обходить угол (это чрезвычайно сложно с вычислительной точки зрения) рассмотрел, как коридор может небольшими шагами двигаться вокруг неподвижного дивана [9]. Гиббс использовал компьютерную программу, чтобы рассчитать все возможные пути, которые коридор может пройти вокруг фиксированного дивана, и в этом случае максимальная площадь, которая помещается в пределах пересечения каждого пути коридора, будет максимальным размером дивана.

Конечная форма Гиббса, полученная им в 2014 году, оказалась на глаз неотличима от формы Гервера, а наилучшая численная оценка площади согласуется с вычисленной площадью дивана Гервера примерно до восьми значащих цифр.

В июне 2017 года Йоав Каллус и Дэн Ромик улучшили оценку сверху [7-8] для константы дивана до **2,37**, что является явным прогрессом по сравнению с оценкой Хаммерсли 1968 года. Их метод включает в себя схему доказательства с помощью компьютерной программы, которая может быть использована для получения еще более точных верхних границ, так как их алгоритм может создать последовательность границ, сходящихся к правильному значению. Но это требует времени и вычислительной мощности техники.

В настоящее время константа дивана находится в интервале **(2,2195; 2,37)**.

3. ОТВЕТВЛЕНИЯ ЗАДАЧИ

Долгое отсутствие результатов в решении проблемы дивана и активный поиск разнообразных форм породили ответвления этой задачи. Так возникла, например, проблема, которую называют проблемой двунаправленного перемещения дивана. Это те случаи, которые требуют формы максимальной площади, которая может преодолевать прямоугольные повороты как вправо, так и влево в коридоре шириной в единицу измерения.

На встрече группы математиков в Копенгагене в конце 1960-х годов обсуждалась проблема движущегося дивана и ряд различных ее вариаций. В группу, вероятно, входили Мозер, Конвей, Шепард и другие. Были построены области, получившие название «автомобиль Конвея» и «пианино Шепарда».

Эти два варианта заключались в том, чтобы найти форму наибольшей площади, которая может совершать двунаправленное перемещение, и другую форму, которая могла бы использовать «Г»-образный переход для поворота. Нетрудно заметить, что фигура, которая может поворачиваться как влево, так и вправо, также может поворачиваться в «Г»-образном переходе, но не так очевидно, что верно обратное. Автомобиль, который поворачивает на «Г»-образный перекресток, может использовать часть дополнительного пространства в продолжении дороги, и в этом случае он не сможет повернуть на «L»-образный угол. Существует гипотеза о том, что одна и та же форма является наилучшим результатом для обеих задач. С этой встречи ничего не было опубликовано.

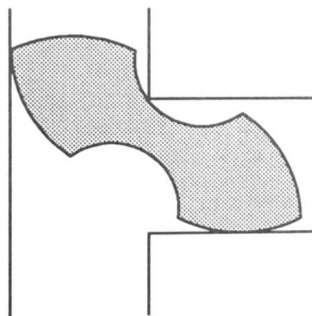


Рис. 3. Машина Конвея

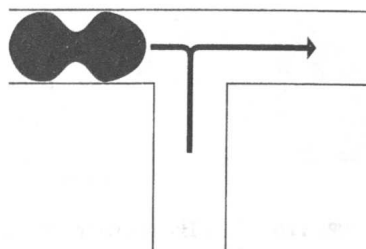


Рис. 4. Машина Конвея.
Другой вид

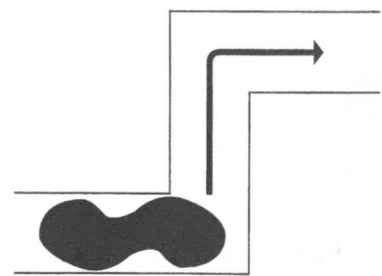


Рис. 5. Пианино Шепарда

Путем расширения методов, которые использовались Гервером в статье 1992 года, Джон Конвей описал «автомобиль Конвея» — такую «зеркально-симметричную форму дивана», которая может быть самой большой возможной областью, передвигаемой по двойному «Г»-образному коридору. Единственным опубликованным решением проблемы машины Конвея является численный результат Киёси Маруямы 1973 года, который разработал схему вычисления полигональных приближений к задаче.

Вычисление для задачи автомобиля Конвея очень похоже на вычисление задачи дивана, за исключением того, что необходимо учитывать пересечение коридоров, поворачивающих

в противоположную сторону. Другими словами, пересечение включает в себя «L»-образные коридоры, повернутые под углом. Форма автомобиля имеет четырёхкратную симметрию, сочетающую двустороннюю симметрию влево-вправо и вперед-назад. Это не означает, что форма решения должна автоматически иметь эти симметрии. В вычислении для автомобиля эта симметрия не предполагалась, но, тем не менее, было обнаружено, что это реализовано в результатах.

В 2014 году Филип Гиббс, экспериментируя с различными методами изменения формы, используя аппроксимационные схемы, числовые последовательности, угловые шаги и пределы, разработал ещё один численный метод изучения двунаправленной проблемы дивана и вычислил похожую на машину Конвея форму (с гораздо более высоким разрешением), площадь которой, по его расчётам, составила приблизительно **1,64495**. Вполне вероятно, что кривые этой формы могут быть описаны с использованием тех же уравнений, которые формируют решения Гервера.

Из-за возникновения симметрии в результатах проблема двунаправленного перемещения дивана также стала называться проблемой *двустороннего (амбидекстрального, симметричного) дивана*.

Двусторонний диван с нижней границей площади примерно **1.64495521** был описан Дэном Ромиком в 2016 году. Его построение имеет определенную форму, которая удовлетворяет условиям двунаправленного движущегося дивана и выводится из соображений локальной оптимальности, аналогичных форме Гервера, и, следовательно, является вероятным кандидатом на роль решения такой проблемы. Фигура Ромика оказалась визуально неотличима от фигуры Гиббса.

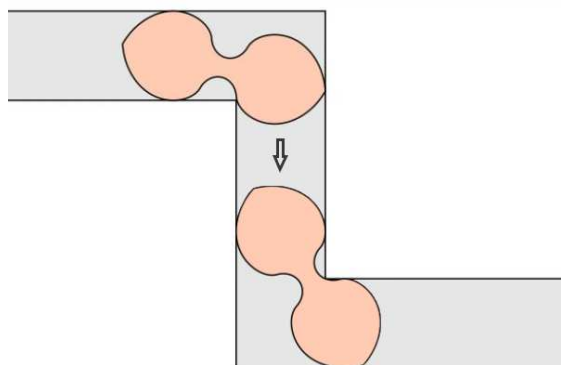


Рис. 6

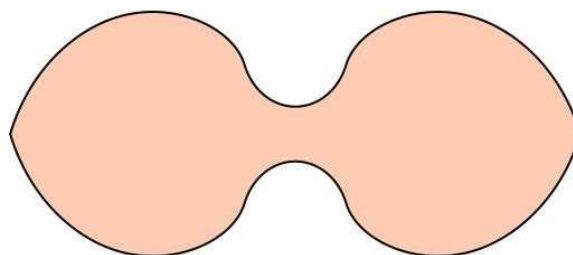


Рис. 7. Диван Ромика

Диван Ромика имеет 18 различных частей, каждая из которых описывается отдельным аналитическим выражением, полученным как решение некоторого дифференциального уравнения. Детали анализа весьма удивительны, например, получается, что площадь новой фигуры задается необычной формулой, результат которой хорошо согласуется с более ранним численным решением Гиббса:

$$\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} - 1 + \arctan \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{3}\sqrt{2} + 1 - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \right) \right] \approx 1.644955218425440$$

В 2016 году Николь Сонг опубликовал статью [14], в которой сформулировал ещё одну побочную задачу, в которой углы коридора (коридоров) меньше или больше, чем $\pi/2$. Также на некоторых ресурсах уже встречаются идеи о задачах перемещения дивана в трёхмерном пространстве.

Таким образом, поиски решения проблемы дивана в её классическом виде и других побоч-

ных проблем продолжают. К сожалению, исследования задач о прохождении твёрдых тел через многообразия на сегодняшний день встречаются нечасто.

4. ЗАДАЧА О КОРАБЛЕ В КАНАЛЕ

После рассмотрения предыдущих задач о движении различных тел через многообразия и прочтения статьи Джозефа Гервера, у авторов данной статьи возникла идея о том, чтобы поставить совершенно новую задачу о движении, например, корабля в канале и оценивать не максимальную площадь корабля, а кривизну канала. Таким образом, задача сводится к оценке кривизны границы области прохождения твердого тела и очевидно, что существует зависимость между кривизной канала и максимальными размерами корабля, который может по нему передвигаться.

Пусть задано прямоугольное тело Ω (для простоты будем называть его кораблём), у которого известны следующие параметры: β — ширина корабля, σ — длина корабля. Пусть в \mathbf{R}^2 задана кривая $\gamma(t)$ — гладкая локально спрямляемая кривая — и параллельная ей кривая $\bar{\gamma}(t)$ ($t \in [t_1; t_2]$) нам также известны:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad \bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \bar{x} = x + \frac{\alpha y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ \bar{y} = y - \frac{\alpha x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{cases}$$

Получаем полосу Γ , ограниченную двумя кривыми с инвариантным значением ширины, равным α ($\alpha > 0$). Внутри полосы Γ будем перемещать тело Ω , то есть для всех возможных Ω : $\Gamma \cap \Omega = \Omega$.

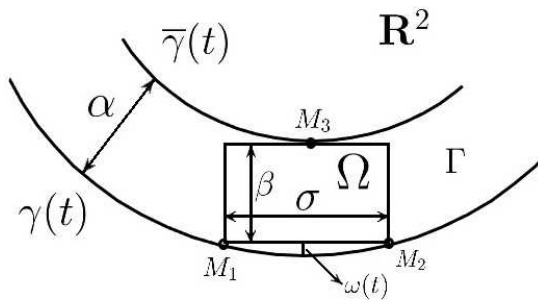


Рис. 8. Корабль в полосе

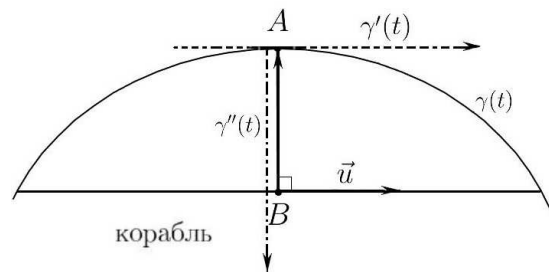


Рис. 9

Необходимо оценить «оптимальную кривизну» $k(\gamma)$, при которой тело Ω сможет перемещаться внутри полосы Γ .

Расстояние от корабля до кривой $\gamma(t)$ обозначим $\omega(t)$. Краевые условия, для которых справедливо $\Omega: \Gamma \cap \Omega = \Omega$:

$$\begin{cases} \beta + \max_{t \in [t_1; t_2]} |\omega(t)| \leq \alpha, \\ \forall (t_1, t_2 \in \{t\}) \exists (M_1, M_2 \in \gamma(t)) [\|M_1 - M_2\| = \sigma]. \end{cases} \quad (1)$$

Сделаем несколько замечаний:

1. Эти две кривые в каком-то смысле имеют пропорциональные кривизны,

$$\bar{k} = \frac{k}{|1 - \alpha k|}, \text{ где } k \text{ — кривизна } \gamma(t), \bar{k} \text{ — кривизна } \bar{\gamma}(t).$$

2. Обратим внимание на то, что $\gamma: \{t\} \mapsto \mathbf{R}^2$; $\omega: t \in [t_1; t_2] \mapsto \mathbf{R}^1$, $\gamma(t_1) = M_1$, $\gamma(t_2) = M_2$,

$\omega(t_1) = 0, \omega(t_2) = 0$.

3. $\gamma(t) \in C^2[t_1; t_2]$, $\gamma'(t)$ и $\gamma''(t)$ ограничены.

4. $\sqrt{\sigma^2 + \beta^2} \leq \alpha$.

Обратимся к условию $\beta + \max_{t \in [t_1; t_2]} |\omega(t)| \leq \alpha$. Нужно найти расстояние $\omega(t)$ от стороны прямоугольника до точки на кривой, где этот максимум достигается; $\omega(t) = \frac{\|\overrightarrow{BA} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ — расстояние от \vec{u} до точки A . Рассмотрим случай, когда $\vec{u} = \gamma'(t)$. В точке A мы можем провести касательную, параллельную \vec{u} . Тогда A — точка, в которой будет достигаться локальный максимум и она существует.

$$\frac{\|\overrightarrow{BA} \times \gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Для того чтобы найти \overrightarrow{BA} рассмотрим $\gamma''(t)$; $\gamma'(t)$ ортогонален $\gamma''(t)$. Вектор \overrightarrow{BA} коллинеарен $\gamma''(t)$ и противоположен ему по направлению (может быть и сонаправлен, но в любом случае это устраняется модулем).

$$\omega(t) = \frac{\|\frac{\gamma''(t)}{\tau(t)} \times \gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\|\gamma''(t) \times \gamma'(t)\|}{\tau(t)\|\gamma'(t)\|},$$

где $\tau(t)$ — коэффициент пропорциональности \overrightarrow{BA} и $\gamma''(t)$, который мы используем, так как \overrightarrow{BA} и $\gamma''(t)$ могут не совпадать по длине.

Формулы для кривизны кривой, заданной параметрически:

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\| \|\gamma''(t)\|^2}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} = \omega(t)\tau(t),$$

следовательно, кривизна равна

$$k(t) = \frac{\omega(t)\tau(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}, \quad \omega(t) = \frac{k(t)\|\gamma'(t)\|^2}{\tau(t)}.$$

Таким образом, система условий (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \beta + \max_{t \in [t_1; t_2]} \left| \frac{k(t)\|\gamma'(t)\|^2}{\tau(t)} \right| \leq \alpha, \\ \forall (t_1, t_2 \in \{t\}) \exists (M_1, M_2 \in \gamma(t)) [\|M_1 - M_2\| = \sigma]. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим $\frac{k(t)\|\gamma'(t)\|^2}{\tau(t)}$; $\|\overrightarrow{BA}\| = \gamma''(t)\tau(t)$, $\|\overrightarrow{BA}\| \leq \alpha$ (это расстояние не может быть шире полосы), следовательно, $\gamma''(t)\tau(t) \leq \alpha$. Отсюда $\tau(t) \leq \frac{\alpha}{\|\gamma''(t)\|}$, тогда $\beta +$

$$\max_{t \in [t_1; t_2]} \left| \frac{k(t)\|\gamma'(t)\|^2 \|\gamma''(t)\|}{\alpha} \right| \leq \alpha,$$

$$\beta + \frac{1}{\alpha} \max_{t \in [t_1; t_2]} |k(t)\|\gamma'(t)\|^2 \|\gamma''(t)\| \leq \alpha.$$

5. ОЦЕНКА КРИВИЗНЫ В НАТУРАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Перейдём к естественной параметризации. Кривизна k инвариантна относительно параметра. Кроме того, по определению, $k(t) = \|\gamma''(s)\| = k(s)$. В натуральной параметризации скорость имеет постоянное значение: $s = \int_0^t \|\gamma'(t)\| dt$, $\|\gamma'(s)\| = 1$, следовательно, $\|\gamma'(s)\|^2 = 1$.

Перейдём к натуральному параметру в $\|\gamma''(s)\|$. $t \in [t_1; t_2]$, $s \in [0, 1]$; $t = ks + b$. Из уравнения прямой, проходящей через две точки, найдём $t = (t_2 - t_1)s + t_1$. Тогда $\gamma(t) = \gamma((t_2 - t_1)s + t_1) = \tilde{\gamma}(s)$, $\gamma'_s = \gamma'_t(t_2 - t_1)$, $\gamma''_s = \gamma''_t(t_2 - t_1)^2$, следовательно, $\|\gamma''(t)\| = \frac{\gamma''_s}{(t_2 - t_1)^2}$.

$$\beta + \frac{1}{\alpha} \max_{t \in [t_1; t_2]} \left| k(s) \frac{\|\gamma''(s)\|}{(t_2 - t_1)^2} \right| \leq \alpha,$$

$$\beta + \frac{1}{\alpha(t_2 - t_1)^2} \max_{t \in [t_1; t_2]} |k^2(s)| \leq \alpha.$$

Обозначим $(t_2 - t_1)^2$ константой C . Заметим, что $\gamma(s) \in C^2$, $\gamma''(s)$ — ускорение и оно отлично от нуля. Тогда

$$\max_{s \in [0; 1]} |k^2(s)| \leq (\alpha - \beta)\alpha C,$$

откуда и находим итоговую **оценку для кривизны**:

$$\max_{s \in [0; 1]} |k(s)| \leq \sqrt{(\alpha - \beta)\alpha C}.$$

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ ПОЛУЧЕННОЙ ОЦЕНКИ

Мы продолжаем рассматривать наш корабль как прямоугольное тело с шириной β и длиной σ . Оба эти параметра, соответственно, больше нуля. Периметр тела: $P = 2(\beta + \sigma) = const$, площадь: $S = \beta\sigma$. Также у нас есть α — ширина канала, $\alpha \geq \sqrt{\sigma^2 + \beta^2}$, отсюда получаем, что $\sigma^2 + \beta^2 \leq \alpha^2$.

При $S \rightarrow \max$ возникает задача оптимизации. $0 \leq \beta \leq \alpha$, $0 \leq \sigma \leq \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. $S = \beta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \rightarrow \max_{0 \leq \beta \leq \alpha}$. Функция непрерывна на отрезке, найдём её наибольшее значение на данном отрезке.

$$S'_\beta = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = 0, \quad \alpha^2 - 2\beta^2 = 0, \quad \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Нашли критическую точку. Проверка её знаков методом интервалов показывает, что данная точка является максимумом и $S_{max} = S\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2}} = \frac{\alpha^2}{2}$.

Теперь параметры зависят только от ширины канала — это хороший результат для априорных оценок. Возьмём оценку кривизны канала, полученную в предыдущем пункте и преобразуем её с учётом того, что $S_{max} = \frac{\alpha^2}{2}$ и $\alpha^2 = 2S_{max}$:

$$\max_{s \in [0; 1]} |k^2(s)| \leq (\alpha - \beta)\alpha C = (\alpha^2 - \beta\alpha)C = (2S_{max} - \alpha\beta)C \leq 2S_{max}C = 2\frac{\alpha^2}{2}C = \alpha^2 C.$$

$\max_{s \in [0; 1]} |k(s)| \leq \alpha\sqrt{C}$ — оценка кривизны через ширину канала α , которая является известной для нас фиксированной величиной.

Замечание. Сделаем небольшое дополнение по теме и оценим площадь через известные нам параметры. Очевидно, что $\sqrt{\sigma^2 + \beta^2} \leq \alpha$; $\beta = \frac{S}{\sigma}$. Подставляем $\sqrt{\sigma^2 + \frac{S^2}{\sigma^2}} \leq \alpha$, следовательно, $\sqrt{\frac{\sigma^4 + S^2}{\sigma^2}} \leq \alpha$. Выразим площадь $S \leq \sqrt{\alpha^2 \sigma^2 - \sigma^4}$, таким образом получилась оценка площади через ширину канала и ширину корабля.

Если бы мы считали, что корабль не прямоугольной формы, тогда необходимо бы было рассматривать площадь как интеграл: $S = \int_0^{\sigma} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) dx$.

После получения оценок описанных выше, некоторыми из дальнейших направлений развития исследований, авторам статьи видятся установление зависимости между площадью и кривизной, формализация задачи как задачи оптимального управления, а также поиск других задач по данной теме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедева, Ю. А. Оценка кривизны границы области прохождения твёрдого тела / Ю. А. Лебедева, Л. В. Стенюхин // Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа (3 – 9 мая 2022 г.) «Понтрягинские чтения–XXXIII». — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022. — С. 165–168.
2. Лебедева, Ю. А. Характеристики многообразия для прохождения твёрдого тела / Ю. А. Лебедева, Л. В. Стенюхин // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (27 января – 1 февраля 2023 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. — С. 220–222.
3. Gerver, J. L. On moving a sofa around a corner / J. L. Gerver // *Geometriae Dedicata*. — 1992. — V. 42, № 3. — P. 267–283.
4. Wagner, N. R. The Sofa Problem / N. R. Wagner // *The American Mathematical Monthly*. — 1976. — V. 83. — P. 188–189.
5. Stewart, I. Another Fine Math You’ve Got Me Into... / I. Stewart // Dover Publications. — New York, 2004. — V. 1. — P. 200–202.
6. Croft, H. T. Unsolved Problems in Geometry / H. T. Croft, K. J. Falconer, R. K. Guy // Springer-Verlag. — New York, 1991. — V. 2. — P. 171–172.
7. Kallus, Y. Improved upper bounds in the moving sofa problem / Y. Kallus, D. Romik // *Advances in Mathematics*. — 2018. — V. 340. — P. 960–982.
8. Romik, D. Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem / D. Romik // *Experimental Mathematics*. — 2016. — V. 26, № 2. — P. 316–330.
9. Gibbs, Ph. E. A Computational Study of Sofas and Cars / Ph. E. Gibbs // Preprint. — 2014. — V. 2. — P. 2–7.
10. Finch, S. R. Moving Sofa Constant / S. R. Finch // Cambridge University Press. — 2003. — V. 1. — P. 519–523.
11. Moser, L. Problem 66–11: Moving furniture through a hallway / L. Moser // *SIAM Review*. — 1966. — V. 8, № 3 — P. 381.
12. Hammersley, J. M. On the enfeeblement of mathematical skills by «Modem Mathematics» and by similar soft intellectual trash in schools and universities / J. M. Hammersley // *Bull. Inst. Math. Appl.* — 1968. — V. 4. — P. 66–85.
13. Guy, R. K. Research problems / R. K. Guy // *The American Mathematical Monthly*. — 1977. — V. 84 — P. 811.
14. Song, N. A Variational Approach to the Moving Sofa Problem / N. Song // *Senior Projects Spring*. — 2016. — № 374. — P. 7–25.

15. Дубровин Б. А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. — М. : Наука, 1986. — 760 с.
16. Гликлик, Ю. Е. Топология и дифференциальная геометрия / Ю. Е. Гликлик. — Воронеж : ВГУ, 2010. — 99 с.
17. Иванов, А. О. Лекции по классической дифференциальной геометрии / А. О. Иванов, А. А. Тужилин. — М. : Логос, 2009. — 224 с.

REFERENCES

1. Lebedeva Yu.A., Stenyukhin L.V. Estimation of the curvature of the boundary of the region of passage of a solid body. [Lebedeva Yu.A., Stenyukhin L.V. Ocenka krivizny granicy oblasti prohozhenija tvjordogo tela]. Modern methods of the theory of boundary value problems: proceedings of the International Conference: Voronezh Spring Mathematical School (May 3 – 9, 2022), Voronezh, 2022, pp. 165–168.
2. Lebedeva Yu.A., Stenyukhin L.V. Characteristics of a manifold for the passage of a solid body. [Lebedeva Yu.A., Stenyukhin L.V. Harakteristiki mnogoobrazija dlja prohozhenija tvjordogo tela]. Modern methods of the theory of functions and related problems: materials of the International Conference : Voronezh Winter Mathematical School (January 27 – February 1, 2023), Voronezh, 2023, pp. 220–222.
3. Gerver J.L. On moving a sofa around a corner. *Geometriae Dedicata*, 1992, vol. 42, no. 3, pp. 267–283.
4. Wagner N.R. The Sofa Problem. *The American Mathematical Monthly*, 1976, vol. 83, pp. 188–189.
5. Stewart I. *Another Fine Math You've Got Me Into...* Dover Publications, New York, 2004, vol. 1, pp. 200–202.
6. Croft H.T., Falconer K.J., Guy R.K. *Unsolved Problems in Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1991, vol. 2, pp. 171–172.
7. Kallus Y., Romik D. Improved upper bounds in the moving sofa problem. *Advances in Mathematics*, 2018, vol. 340, pp. 960–982.
8. Romik D. Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem. *Experimental Mathematics*, 2016, vol. 26, no. 2, pp. 316–330.
9. Gibbs Ph. E. A Computational Study of Sofas and Cars. Preprint, 2014, vol. 2, pp. 2–7.
10. Finch S.R. *Moving Sofa Constant*. Cambridge University Press, 2003, vol. 1, pp. 519–523.
11. Moser L. Problem 66–11: Moving furniture through a hallway. *SIAM Review*, 1966, vol. 8, no. 3, p. 381.
12. Hammersley J.M. On the enfeeblement of mathematical skills by «Modern Mathematics» and by similar soft intellectual trash in schools and universities. *Bull. Inst. Math. Appl.*, 1968, vol. 4, pp. 66–85.
13. Guy R.K. Research problems. *The American Mathematical Monthly*, 1977, vol. 84, p. 811.
14. Song N. A Variational Approach to the Moving Sofa Problem. *Senior Projects Spring*, 2016, no. 374, pp. 7–25.
15. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Modern geometry. Methods and applications*. [Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaja geometrija. Metody i prilozhenija*]. Moscow: Nauka, 1986, 760 p.
16. Gliklikh Yu.E. *Topology and differential geometry*. [Gliklikh Ju.E. *Topologija i differencial'naja geometrija*]. Voronezh : VSU, 2010, 99 p.
17. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Lectures on classical differential geometry*. [Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Lekcii po klassicheskoj differencial'noj geometrii*]. Moscow: Logos, 2009, 224 p.

*Лебедева Юлия Алексеевна, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: yulechkalebedeva24@gmail.com*

*Lebedeva Yulia Alekseevna, student of the Faculty of Mathematics of the Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: yulechkalebedeva24@gmail.com*

*Стенюхин Леонид Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и геометрии, Математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: stenyuhin@mail.ru*

*Stenyukhin Leonid Vitalevich, PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Theory of Functions and Geometry, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: stenyuhin@mail.ru*