УДК 519.614

ПРИБЛИЖЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ОПЕРАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦЫ

В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Аннотация. Пусть f — аналитическая функция. *Обусловленностью* отображения $A \mapsto f(A)$, где A — квадратная матрица, называют влияние малых возмущений A на $f(A)$. Обусловленность в основном характеризуется дифференциалом df отображения $A \mapsto f(A)$. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое связное множество, содержащее спектр A, а Φ_n, $n = 0,1,\dots,$ — многочлены Фабера, порожденные замыканием U. В статье предлагается метод приближенного вычисления df, основанный на разложении функции f в ряд Фабера $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(\lambda)$.

Ключевые слова: число обусловленности, функция от матрицы, ряд Фабера, многочлены Фабера, многочлены Чебышева, разделенная разность.

APPROXIMATE FINDING OF THE DIFFERENTIAL OF THE OPERATION OF CALCULATING A MATRIX FUNCTION

V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova

Abstract. Let f be an analytic function. The *conditioning* of the mapping $A \mapsto f(A)$, where A is a square matrix, is the influence of small perturbations of A on $f(A)$. The conditioning is mostly characterized by the differential df of the mapping $A \mapsto f(A)$. Let $U \subset \mathbb{C}$ be an open connected set that contains the spectrum of A and Φ_n, $n = 0,1,\dots,$ be the Faber polynomials generated by the closure of U. The paper offers a method of approximate calculation of df based on the expansion of the function f into the Faber series $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(\lambda)$.

Keywords: condition number, matrix function, Faber series, Faber polynomials, Chebyshev polynomials, divided difference.

ВВЕДЕНИЕ

Аналитические функции от матриц возникают во многих приложениях [8]. Наиболее часто используемой является экспоненциальная функция e^{tA}, поскольку через нее выражается решение дифференциального уравнения $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ с матричным коэффициентом A.

Как правило, аналитическая функция f от матрицы A может быть посчитана только приближенно. Отклонения от точного решения могут быть вызваны как алгоритмом вычисления, являющимся приближенным, так и неточностями в задании исходной матрицы A; последние обычно связаны с конечностью числа десятичных знаков, используемых для представления чисел в компьютере. Влияние неточностей в задании матрицы A на окончательный ответ $f(A)$ при условии точных вычислений называют *обусловленностью*. Основная характеристика обусловленности — дифференциал $df(\cdot,A)$ отображения $A \mapsto f(A)$ в точке A. Настоящая работа посвящена задаче приближенного вычисления дифференциала.

Дифференциал $df(\cdot,A)$ может быть найден как разделенная разность

$$f^{[1]}(\lambda,\mu) = \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}$$

функции f, в которую вместо λ и μ подставлена матрица A (подробнее см. предложение 7). Разделенная разность $f^{[1]}(\cdot,\cdot)$ является аналитической функцией двух переменных — в точках, где $\lambda=\mu$, разрыв у разделенной разности $f^{[1]}(\cdot,\cdot)$ устранимый; поэтому, например, если f аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то $f^{[1]}(\cdot,\cdot)$ также аналитична во всем $\mathbb{C}^2$.

Основная идея работы состоит в разложении функции f в ряд Фабера [5], применении операции взятия разделенной разности к этому ряду почленно и подстановке матрицы A в частичную сумму этого ряда (теорема 9). Ряд Фабера предпочтительнее ряда Тейлора, поскольку скорость сходимости ряда Тейлора (и тем самым количество слагаемых в частичной сумме, обеспечивающее желаемую точность приближения) зависит от радиуса минимального круга, в котором содержится спектр матрицы A и в котором рассматривается ряд Тейлора, а скорость сходимости ряда Фабера (для рассматриваемого в настоящей работе примера рядов Фабера) — от соответствующего эллипса, что может повысить скорость сходимости. В то же время коэффициенты ряда Фабера (как и коэффициенты ряда Тейлора) обычно могут быть посчитаны с любой точностью (для наиболее часто используемых функций f).

1. МНОГОЧЛЕНЫ ФАБЕРА

Пусть $G\subseteq\mathbb{C}$ — область и $f:G\to\mathbb{C}$ — аналитическая функция. Напомним, что функцию f называют [6, с. 37] *конформной*, если она инъективна и $f'(z)\neq 0$ во всех точках $z\in G$ (это одно из эквивалентных определений, чаще за основное берут другое определение (сохранение углов), но оно менее удобно для наших целей).

Пусть $K\subset\mathbb{C}$ — компактное связное множество, содержащее не менее двух точек. Обозначим через G открытое множество, являющееся дополнением к K. Будем дополнительно предполагать, что множество G также связно.

В рассматриваемых в настоящей работе приложениях K, как правило, возникает в следующей ситуации. На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задана замкнутая жорданова кривая Γ. Дополнение к Γ состоит из двух компонент связности — ограниченной $\operatorname{Int}\Gamma$ и неограниченной $\operatorname{Ext}\Gamma$. В этом случае $K=\Gamma\cup\operatorname{Int}\Gamma$, а G совпадает с $\operatorname{Ext}\Gamma$.

По теореме Римана о конформном изоморфизме [3, с. 32, 36] существует конформное отображение Φ множества G на внешность единичного круга $D=\{\,w\in\mathbb{C}:\,|w|>1\,\}$. Дополнительные условия (которые мы будем предполагать выполненными)

$$\Phi(\infty)=\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=\gamma \tag{1}$$

определяют отображение Φ однозначно. Здесь $\gamma\neq 0$ — заданное комплексное число. Обратное отображение к Φ обозначим символом Ψ. В силу наложенных условий функции $\Phi:G\to D$ и $\Psi:D\to G$ допускают в окрестности бесконечности разложения в ряды Лорана, имеющие вид

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\frac{\gamma_3}{z^3}+\dots,\\ \Psi(w)&=\beta w+\beta_0+\frac{\beta_1}{w}+\frac{\beta_2}{w^2}+\frac{\beta_3}{w^3}+\dots.\end{aligned} \tag{2}$$

При этом в силу условия (1)

$$\gamma=\lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z},\qquad \beta=1/\gamma.$$

Рассмотрим функцию $z\mapsto\Phi^n(z)$. Она определена и аналитична там же, где и функция Φ, т. е. на множестве G. В силу (2) в точках z из окрестности бесконечности имеем

$$\Phi^n(z)=\Big(\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\frac{\gamma_3}{z^3}+\dots\Big)^n, \tag{3}$$

причем в силу абсолютной сходимости ряда Лорана ряды в скобках можно перемножить почленно в любом порядке, а затем привести подобные. В результате получится некоторый новый степенной ряд. В силу единственности ряда Лорана он и будет рядом Лорана функции Φ^n. Раскрывая скобки в (3), видим, что ряд Лорана функции Φ^n имеет вид

$$\Phi^n(z) = \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \ldots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} + \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \frac{b_3^{(n)}}{z^3} + \ldots .$$

Многочлены

$$\Phi_n(z) = \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \ldots + a_1^{(n)} z^1 + a_0^{(n)},$$

представляющие собой полиномиальную часть лорановских разложений функций Φ^n, называют [2], [3], [5] *многочленами Фабера, порожденными множеством* K.

Наиболее известный пример [5, с. 56] многочленов Фабера порождается множеством $K = [-1,1]$. В этом случае

$$\Phi_0(z) = T_0(z) = 1, \qquad \Phi_n(z) = 2T_n(z), \qquad n > 1,$$

где T_n — многочлены Чебышева первого рода.

Пусть K — компактное связное множество. Для каждого $R > 1$ рассмотрим окружность $S = \{\, w \in \mathbb{C} : |w| = R \,\}$ и ее образ Γ_R при действии отображения Ψ. Очевидно, Γ_R — замкнутая жорданова кривая. Символами $\operatorname{Int}\Gamma_R$ и $\operatorname{Ext}\Gamma_R$ будем обозначать [2, с. 212] внутреннюю и внешнюю компоненты связности дополнения к Γ_R. Интерпретируя $\operatorname{Ext}\Gamma_R$ как новое множество G, мы можем построить многочлены Фабера, порожденные множеством $\Gamma_R \cup \operatorname{Int}\Gamma_R$. Очевидно, в случае $K = [-1,1]$ они имеют вид

$$\Phi_0(z) = T_0(z) = 1, \qquad \Phi_n(z) = \frac{2}{R^n} T_n(z), \qquad n > 1. \tag{4}$$

В случае, когда $K = [-1,1]$, кривые Γ_R представляют собой [5, с. 57] эллипсы, фокусы которых находятся в точках ± 1, а полуоси равны

$$a = \frac{1}{2}\Big(R + \frac{1}{R}\Big), \qquad b = \frac{1}{2}\Big(R - \frac{1}{R}\Big).$$

Нас интересуют эллипсы, которые содержат спектры заданных матриц. Поэтому удобно включить в рассмотрение повернутые эллипсы. В случае, когда K представляет собой эллипс с центром в нуле, фокусы которого находятся в точках $\pm\varkappa \in \mathbb{C}$, $\varkappa \neq 0$, а полуоси равны

$$a = \frac{|\varkappa|}{2}\Big(R + \frac{1}{R}\Big), \qquad b = \frac{|\varkappa|}{2}\Big(R - \frac{1}{R}\Big),$$

многочлены Фабера, очевидно, имеют вид

$$\Phi_0(z) = T_0(z) = 1, \quad \Phi_n(z) = \frac{2}{R^n} T_n\Big(\frac{z}{\varkappa}\Big), \qquad n > 1. \tag{5}$$

2. РЯДЫ ФАБЕРА

Рядом по многочленам Фабера называют функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(\lambda), \tag{6}$$

где $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0,1,2,\ldots,$ — некоторые числа. Если этот ряд на некотором множестве сходится (поточечно) к функции f, то говорят, что это *ряд Фабера функции f на этом множестве.*

Справедлив следующий аналог теоремы Абеля [6, с. 97].

Предложение 1. *Если ряд по многочленам Фабера* (6) *сходится в некоторой точке* $\lambda_0 \in \Gamma_R$, $R > 1$, *то он сходится во всех точках* $\lambda \in \operatorname{Int}\Gamma_R$. *Более того, для любого* $r \in (1,R)$ *ряд* (6) *сходится на множестве* $\Gamma_r \cup \operatorname{Int}\Gamma_r$ *равномерно и поэтому его сумма является аналитической функцией.*

Если ряд по многочленам Фабера (6) *расходится в некоторой точке* $\lambda_0 \in \Gamma_R$, $R > 1$, *то он расходится во всех точках* $\lambda \in \operatorname{Ext}\Gamma_R$.

Из предложения 1 вытекает следующее следствие.

Предложение 2. *Для всякого ряда по многочленам Фабера* (6) *существует число* $R \in [1, +\infty]$, *обладающее следующими свойствами. Если* $R \in (1, +\infty)$, *то при* $\lambda \in \operatorname{Int}\Gamma_R$ *ряд* (6) *сходится, а при* $\lambda \in \operatorname{Ext}\Gamma_R$ *— расходится. Если* $R = 1$, *то ряд* (6) *расходится при всех* $\lambda \notin K$. *Если* $R = \infty$, *то ряд* (6) *сходится при всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Предложение 3 ([5, с. 76])**.** *Пусть* f *— функция, аналитическая в окрестности* K, *а отображение* Ψ *допускает непрерывное продолжение на множество* $\{\, w \in \mathbb{C} : |w| \geqslant 1 \,\}$. *Тогда функция* f *раскладывается в ряд Фабера*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(\lambda), \tag{7}$$

который равномерно сходится на K. *При этом разложение в ряд Фабера единственно.*

Для многих функций известны [4] их разложения в ряды по многочленам Чебышева. Используя их (и единственность аналитического продолжения), можно получить разложения некоторых функций в ряды Фабера, порожденные эллипсом с параметрами $\varkappa$ и R. Приведем примеры:

$$\begin{aligned}
e^{t\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n I_n(t\varkappa)\Phi_n(\lambda),\\
\cos(t\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R^{2m} J_{2m}(t\varkappa)\Phi_{2m}(\lambda),\\
\sin(t\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R^{2m+1} J_{2m+1}(t\varkappa)\Phi_{2m+1}(\lambda),\\
\cos\bigl(t\sqrt{\lambda}\bigr) &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n J_{2n}\bigl(\sqrt{\eta}t\bigr)\Phi_n\Bigl(1 - \frac{2\lambda}{\eta}\Bigr),
\end{aligned}$$

где J_n — функция Бесселя первого рода, а I_n — модифицированная функция Бесселя первого рода; $\eta \neq 0$ — произвольный комплексный параметр, в последнюю формулу предполагается подставлять матрицу, спектр которой содержится в эллипсе с фокусами в точках 0 и η. В первых трех формулах многочлены Фабера имеют вид (5), а в последней — вид (4).

3. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathbb{C}^{n\times n}$ алгебру всех комплексных матриц размера $n \times n$, а через $\mathbf{1}$ — единичную матрицу. *Спектром* матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называют множество $\sigma(A)$ всех ее собственных значений.

Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, содержащее спектр $\sigma(A)$ матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, а $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. *Функцией* f *от матрицы* A называют [8, с. 8] матрицу, определенную по формуле

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}\, d\lambda,$$

где контур Γ содержится в U, окружает спектр $\sigma(A)$ и ориентирован против часовой стрелки.

Предложение 4 ([8, теорема 1.15])**.** *Отображение $f \mapsto f(A)$ сохраняет алгебраические операции, а именно,*

$$\begin{aligned}(f+g)(A) &= f(A)+g(A),\\ (\alpha f)(A) &= \alpha f(A),\\ (fg)(A) &= f(A)g(A),\end{aligned}$$

где $f+g$, αf и fg определены поточечно. В частности, $u(A) = \mathbf{1}$ и $v(A) = A$, где $u(\lambda) = 1$ и $v(\lambda) = \lambda$.

Пусть $A,B,H \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Пусть $U,V \subseteq \mathbb{C}$ — открытые множества, причем U содержит спектр $\sigma(A)$, а V содержит спектр $\sigma(B)$. Пусть g — аналитическая функция, определенная на множестве $U \times V \subset \mathbb{C}^2$. *Функцией g от A и B, примененной к матрице H,* называют [9], [11] матрицу

$$g(A,B)\diamond H = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_1} g(\lambda,\mu)(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}H(\mu\; mathbf1 - B)^{-1}\,d\lambda\,d\mu, \tag{8}$$

где $\Gamma_1 \subset U$ окружает $\sigma(A)$, а $\Gamma_2 \subset V$ окружает $\sigma(B)$ и ориентированы против часовой стрелки.

Предложение 5 ([11, теорема 32])**.** *Отображение $g \mapsto g(A,B)$ сохраняет алгебраические операции, а именно,*

$$\begin{aligned}(f+g)(A,B) &= f(A,B)+g(A,B),\\ (\alpha f)(A,B) &= \alpha f(A,B),\\ (fg)(A,B) &= f(A,B)g(A,B),\end{aligned}$$

где $f+g$, αf и fg определены поточечно. Кроме того, если $g(\lambda,\mu) = f_1(\lambda)f_2(\mu)$, то $g(A,B)\diamond H = f_1(A)Hf_2(B)$. Поэтому, если

$$p(\lambda,\mu) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} c_{ij}\lambda^i\mu^j,$$

то

$$p(A,B)\diamond H = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} c_{ij}A^iHB^j.$$

Приведем важный для нашего обсуждения пример функции двух переменных. Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. *Разделенной разностью* функции f называют функцию двух переменных $f^{[1]} : U\times U \to \mathbb{C}$, определенную по формуле

$$f^{[1]}(\lambda,\mu) = \begin{cases}\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}, & \text{если } \lambda \neq \mu,\\ f'(\lambda), & \text{если } \lambda = \mu.\end{cases}$$

Предложение 6 ([11, предложение 44])**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Тогда функция $f^{[1]}$ является аналитической в $U \times U$.*

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, а $f : D \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Рассмотрим преобразование $f : A \mapsto f(A)$, определенное на матрицах $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, спектр которых содержится в D. *Дифференциалом* преобразования $f : A \mapsto f(A)$ в точке A называют [1, с. 139] линейное отображение $df(\cdot,A) : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, обладающее свойством

$$f(A+H) = f(A) + df(H,A) + o(\|H\|).$$

Предложение 7 ([11, теорема 71]). *Дифференциал $df(\cdot,A)$ определен для всех матриц $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, спектр которых содержится в множестве D. Дифференциал задается формулой*

$$df(H,A) = f^{[1]}(A,A) \diamond H.$$

Абсолютным числом обусловленности преобразования $f : A \mapsto f(A)$ в точке A называют [8, теорема 3.1] число

$$\|df(\cdot,A)\|,$$

а *относительным числом обусловленности* — число

$$\frac{\|df(\cdot,A)\| \cdot \|A\|}{\|f(A)\|}.$$

Числа обусловленности описывают степень корректности задачи вычисления $f(A)$. Они показывает, насколько неточности в задании A влияют на неточности в значении $f(A)$.

Настоящая статья посвящена приближенному вычислению дифференциала преобразования $f : A \mapsto f(A)$. Ключевую роль играет представление

$$df(H,A) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} f^{[1]}(\lambda,\mu)(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1} H (\mu\mathbf{1} - A)^{-1}\, d\lambda\, d\mu,$$

вытекающее из определения (8) и предложения 7.

Предложение 8. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и аналитические функции f_n (определены и) равномерно сходятся к функции f в некоторой открытой окрестности U спектра $\sigma(A)$ матрицы A. Тогда $f_n(A)$ сходится к $f(A)$, а $f_n^{[1]}(A,A)$ сходится к $f^{[1]}(A,A)$ по норме.*

Доказательство. Ограничимся доказательством второго утверждения. Имеем

$$\begin{aligned}
&\big\|df_n(H,A) - df(H,A)\big\| = \\
&\qquad = \left\| \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} f_n^{[1]}(\lambda,\mu)(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1} H (\mu\mathbf{1} - A)^{-1}\, d\lambda\, d\mu - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} f^{[1]}(\lambda,\mu)(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1} H (\mu\mathbf{1} - A)^{-1}\, d\lambda\, d\mu \right\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{\|H\|}{4\pi^2} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \big|f_n^{[1]}(\lambda,\mu) - f^{[1]}(\lambda,\mu)\big| \cdot \big\|(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}\big\| \cdot \big\|(\mu\mathbf{1} - A)^{-1}\big\|\, |d\lambda||d\mu|,
\end{aligned}$$

откуда видно, что $\big\|df_n(H,A) - df(H,A)\big\|$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $\|H\| \leqslant 1$. □

Теорема 9. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *и* f *— аналитическая функция, определенная в некоторой открытой окрестности* U *спектра* $\sigma(A)$ *матрицы* A*. Предположим, что на* U *ряд Фабера* (7) *равномерно сходится. Тогда*

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(A), \tag{9}$$

$$df(H,A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n^{[1]}(A,A) \diamond H. \tag{10}$$

Доказательство. Вытекает из предложения 8. □

Формула (9) известна [7]. Формула (10) является новой. Заменяя ряды частичными суммами, обе формулы можно использовать для приближенных вычислений.

Напомним, что Φ_n является многочленом степени n от одной переменной. Разделенные разности $\Phi_n^{[1]}$ представляют собой многочлены от двух переменных степени $n-1$; они легко вычисляются по Φ_n на компьютере.

Для некоторых множеств K известны [5] явные формулы для многочленов Фабера Φ_n. Для случая, когда K является эллипсом с центром в нуле, такие формулы приведены выше.

Преимущество разложений (9) и (10) по сравнению с рядами Тейлора объясним на примере, показывающем, что ряд Фабера на множестве K, вообще говоря, сходится быстрее, чем ряд Тейлора в круге B при условии, что $K \subset B$. Рассмотрим на комплексной плоскости замкнутый круг $B = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1 \,\}$ и замкнутый эллипс K, ограниченный кривой $\cos t + \frac{i}{3}\sin t$, $t \in [0,2\pi]$. Для приближений функции $\lambda \mapsto e^{\lambda}$ частичными суммами рядов Тейлора и Фабера имеем

$$\max_{\lambda\in B}\Big|e^{\lambda} - \sum_{n=0}^{14}\frac{\lambda^n}{n!}\Big| = 7.8854\cdot 10^{-13}, \quad \max_{\lambda\in K}\Big|e^{\lambda} - \sum_{n=0}^{14} c_n\Phi_n(\lambda)\Big| = 2.45821\cdot 10^{-15}.$$

Для приближений разделенной разности функции $\lambda \mapsto e^{\lambda}$ частичными суммами ряда Тейлора и ряда из разделенных разностей многочленов Фабера имеем

$$\max_{\lambda,\mu\in B}\Big|\frac{e^{\lambda}-e^{\mu}}{\lambda-\mu} - \sum_{n=1}^{14}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^{n-1-i}\mu^i\Big| = 1.18529\cdot 10^{-11},$$
$$\max_{\lambda,\mu\in K}\Big|\frac{e^{\lambda}-e^{\mu}}{\lambda-\mu} - \sum_{n=1}^{14} c_n\Phi_n^{[1]}(\lambda,\mu)\Big| = 6.55838\cdot 10^{-13}.$$

Предположим, что спектр $\sigma(A)$ содержится в эллипсе K (и тем более в круге B). Тогда, построив по K многочлены Фабера, мы получим ряды (9) и (10), которые сходятся быстрее, чем аналогичные ряды Тейлора. Поэтому частичные суммы этих рядов дают лучшее приближение, чем частичные суммы рядов Тейлора с теми же номерами.

Ранее в [10] для вычисления $f^{[1]}(A,B)\diamond H$ использовалось приближение $p(A,B)\diamond H$, где p — многочлен, интерполирующий $f^{[1]}$ в нулях многочлена Чебышева. При этом дополнительно предполагалось, что спектры матриц A и B действительны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев, В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1979. — 432 с.

2. Гайер, Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Д. Гайер. — М. : Мир, 1986. — 216 с.

3. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1968. — 624 с.

4. Пашковский, С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. — М. : Наука, 1983. — 384 с.

5. Суетин, П. К. Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1984. — 336 с.

6. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1969. — 576 с.

7. Hasson, M. Expansion of analytic functions of an operator in series of Faber polynomials / M. Hasson // Bull. Austral. Math. Soc. — 1997. — V. 56, № 2. — P. 303–318.

8. Higham, N. J. Functions of matrices : theory and computation / N. J. Higham. — Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. — xx+425 p.

9. Kressner, D. Bivariate matrix functions / D. Kressner // Operators and Matrices. — 2014. — V. 8, № 2. — P. 449–466.

10. Kubelík, P. Calculating a function of a matrix with a real spectrum / P. Kubelík, V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova // Numerical Algorithms. — 2022. — V. 90. — P. 905–930.

11. Kurbatov, V. G. Analytic functional calculus for two operators / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova, M. N. Oreshina // Adv. Oper. Theory. — 2021. — V. 6, № 4. — 63 p.

REFERENCES

1. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal control. [Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie]. Moscow: Nauka, 1979, 432 p.

2. Gaier D. Lectures on complex approximation. [Gajer D. Lekcii po teorii approksimacii v kompleksnoj oblasti]. Moscow: Mir, 1986, 216 p.

3. Markushevich A.I. Theory of functions of a complex variable. [Markushevich A.I. Teoriya analiticheskih funkcij]. Moscow: Nauka, 1968, 624 p.

4. Paszkowski S. Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa. [Pashkovskij S. Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov CHebysheva]. Moscow: Nauka, 1983, 384 p.

5. Suetin P.K. Series of Faber polynomials. [Suetin P.K. Ryady po mnogochlenam Fabera]. Moscow: Nauka, 1984, 336 p.

6. Shabat B.V. Introduction to complex analysis. [SHabat B.V. Vvedenie v kompleksnyj analiz]. Moscow: Nauka, 1969, 576 p.

7. Hasson M. Expansion of analytic functions of an operator in series of Faber polynomials. Bull. Austral. Math. Soc., 1997, vol. 56, no. 2, pp. 303–318.

8. Higham N.J. Functions of matrices: theory and computation. Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008, xx+425 p.

9. Kressner D. Bivariate matrix functions. Operators and Matrices, 2014, vol. 8, no. 2, pp. 449–466.

10. Kubelík P., Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Calculating a function of a matrix with a real spectrum. Numerical Algorithms, 2022, vol. 90, pp. 905–930.

11. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V., Oreshina M.N. Analytic functional calculus for two operators. Adv. Oper. Theory, 2021, vol. 6, no. 4, 63 p.

Курбатов В. Г., доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kv51@inbox.ru

Kurbatov V. G., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kv51@inbox.ru

Курбатова И. В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: irakurbatova@gmail.com

Kurbatova I. V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Department of Software Development and Information Systems Administration, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: irakurbatova@gmail.com