УДК 519.17

ОЦЕНКА СРЕДНЕЙ ВЕЛИЧИНЫ ИСХОДЯЩЕГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПОТОКА

Я. М. Ерусалимский, В. А. Русаков

Южный федеральный университет

Поступила в редакцию 06.02.2023 г.

Аннотация. В работе рассмотрены динамические потоки в сетях, а также явление всплеска динамического потока. Поставлена и решена задача нахождения предела средней величины исходящего динамического потока при условии его квазимаксимальности. Приведена и доказана оценка предельной средней величины динамического потока для поставленной задачи. Полученная оценка справедлива для сетей любой топологии. На предоставленном примере сети показана важность полученной оценки для изучения явления всплеска динамического потока, а также связь оценки со стационарными потоками.

Ключевые слова: граф, сеть, стационарный поток, динамический поток, максимальный поток, минимальный разрез, всплеск потока, параллельные сети, древовидные сети, сети с контурами.

ESTIMATION OF MEAN DYNAMIC OUTGOING NETWORK FLOW VALUE

I. M. Erusalimskiy, V. A. Rusakov

Abstract. This paper deals with dynamic network flows and a phenomenon of dynamic network flow splash. A problem of finding upper bound of a mean outgoing dynamic flow under a condition the flow quasimaximality is presented and solved. An estimation for the mean outgoing dynamic flow is defined and proved for the stated problem. The obtained estimation is valid for the networks with any topology. The estimation significance for studying the network splash phenomenon is shown with provided example. A relation between the estimation and static network flow is investigated.

Keywords: graph, flow network, static flow, dynamic flow, maximum flow, minimum cut, network flow splash, parallel network, tree-structured network, networks with closed paths.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория потоков в сетях нашла свое место для решения таких задач, в которых искомый поток в сети и его характеристики неизменны. В некотором смысле, классическая теория стационарных потоков рассматривает уже установившиеся процессы перемещения потока по сети. Теория стационарных потоков хорошо изучена и изложена в ряде статей и монографий [1, 2]. Для многих задач теории стационарных потоков разработаны полиномиальные алгоритмы решения, как например для задачи о поиске максимального потока [3, 4, 5].

Однако, прикладные задачи часто требуют принятия в расчет изменения потоков во времени. Например, в транспортных сетях в каждый момент времени поток транспортных средств, проходящий по разным участкам дорожной сети, может меняться. Решение задач, использующих модели динамических потоков, рассмотрено в ряде работ [6, 7, 8, 9].

Динамические потоки, как и стационарные, имеют свои характеристики. Нахождение значений этих характеристик представляет интерес при исследовании конкретных примеров сетей. В силу того факта, что динамические потоки в разные моменты времени могут иметь разные значения характеристик, которые могут также зависеть от произвольного задания потоков, сфокусируемся на тех характеристиках динамических потоков, которые не зависят от времени, а именно на средней величине динамического потока, пропускной способности минимального разреза и величине максимального всплеска потока.

Равенство пропускной способности минимального разреза и величины максимального стационарного потока широко известно как теорема Форда-Фалкерсона. Явление всплеска динамического потока (см., например, [10]), показывает, что эта теорема в её классической формулировке для динамических потоков не справедлива. В данной статье будет показана связь между всплеском динамического потока и вышеупомянутой теоремой.

Целью данной работы является определение предельной средней величины исходящего динамического потока сети. Внимание уделяется именно предельной величине (при стремлении правой границы рассматриваемого интервала времени к бесконечности) по причине того, что характеристики динамических потоков изменяются во времени, а, следовательно, могут иметь различные значения для разных конечных интервалов времени.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть дана сеть $G(X,U,f,\rho)$ (поскольку потоковые сети также являются и графами, то в работе используется терминологический аппарат теории графов, приведенный, например в [11]). X — множество вершин сети, U — множество дуг сети, $f : U \to X \times X$ — отображение инцидентности, $\rho : U \to R_+ = (0; +\infty)$ — отображение, назначающее каждой из дуг u пропускную способность $\rho(u)$.

Мы рассматриваем лишь конечные сети с конечными пропускными способностями. Поэтому рассматриваемые далее сети в любой момент времени может принимать из источника, передавать по промежуточным дугам и отдавать в сток лишь поток конечной величины.

В отличие от классической теории потоков в сетях, которую также можно назвать теорией стационарных потоков, теория динамических потоков предполагает изменение потоков во времени. Время при рассмотрении динамических потоков может принимать значения из дискретных и непрерывных множеств [12, 13]. Будем считать, что время дискретно и принимает значения из Z_+.

Динамический поток φ в сети G — это отображение $\varphi : U \times Z_+ \to R_+$, определяющее для каждой из дуг $u \in U$ в каждый момент времени $t \in Z_+$величину потока на дуге $\varphi(u,t) \in R_+$ и удовлетворяющее условиям (1) и (2):

$$\varphi(u,t) \leqslant \rho(u), \forall u \in U, \forall t \in Z_+. \tag{1}$$

Условие сохранения потока для динамических потоков имеет вид:

$$\sum_{u \in U^+(x)} \varphi(u,t) = \sum_{u \in U^-(x)} \varphi(u,t+1), \forall x \in X_{in}, \tag{2}$$

где X_{in} — внутренние вершины сети (все вершины, за исключением источника и стока), $U^+(x)$ — множество дуг, оканчивающихся в вершине x, $U^-(x)$ — множество дуг, начинающихся в вершине x.

Пусть V_G — величина максимального стационарного потока в сети G. Согласно теореме Форда-Фалкерсона [3] пропускные способности минимальных разрезов равны V_G.

Поскольку величина динамического потока может быть различной в разные моменты времени даже для одного разреза (в случае стационарных потоков эта величина одинакова для всех разрезов), то определим две характеристики, позволяющие оценить динамический поток — это величина динамического потока из источника и величина динамического потока в сток.

Определение 1. Величиной поступления динамического потока φ назовём сумму величин потока по дугам, исходящим из источника в момент времени t и обозначим её через $v_{\varphi}^{+}(t)$.

Здесь и далее будем считать, что в каждый момент времени в сеть поступает поток величины V_G. Условие подачи в сеть потока постоянной величины V_G назовем условием *квазимаксимальности*, а потоки, удовлетворяющие этому условию — квазимаксимальными. Ясно, что при выполнении условия квазимаксимальности в любой конечной сети за конечное время установится поток, насыщающий все минимальные разрезы.

Каждый минимальный разрез разделяет нашу сеть на два подмножества. Первое содержит источник, а второе — сток. Понятно, что в каждый момент времени суммарный поток на дугах такого разреза не превосходит его пропускной способности, т. е. объем потока, передаваемого из первого множества во второе не превосходит пропускной способности этого минимального разреза. В связи со сказанным получается, что ближайший к стоку минимальный разрез (как и другие минимальные разрезы) выполняет роль “верхней планки” для величины потока, проходящего через него в каждый момент времени.

Определение 2. Величиной выхода динамического потока φ назовём сумму величин потока по дугам, входящим в сток в момент времени t и обозначим её через $v_{\varphi}^{-}(t)$.

2. СРЕДНЯЯ ВЕЛИЧИНА ИСХОДЯЩЕГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПОТОКА И ЕЁ ПРЕДЕЛ

Определение 3. Средней величиной исходящего динамического потока на временном отрезке $[0;T-1]_Z$ назовём отношение $\sum_{t=0}^{T-1}(v_{\varphi}(t)/T)$.

Ясно, что средняя величина исходящего динамического потока может быть рассчитана на любом произвольном временном промежутке $[a;b]_Z$.

Докажем, что для сетей с динамическими потоками, удовлетворяющим условию квазимаксимальности имеет место следующая теорема, которую можно считать обобщением теоремы Форда-Фалкерсона на случай динамических потоков в сетях.

Теорема 1. *Пусть дана сеть $G(X,U,f,\rho)$. Для любого квазимаксимального динамического потока $\varphi(u,t)$ существует предел средней величины исходящего из сети потока при T стремящемся к бесконечности и он равен пропускной способности минимального разреза, т. е.*

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{\sum\limits_{t=0}^{T-1} v_{\varphi}(t)}{T}=V_G, \tag{3}$$

Доказательство. К моменту времени T (за временной интервал $[0;T-1]_Z$), согласно ранее указанному способу формирования потока, в сеть поступил поток величины $V_G\cdot T$. Также, за время $[0;T-1]_Z$ величина исходящего потока равна $\sum_{t=0}^{T-1} v_{\varphi}(t)$.

Пусть в рассматриваемый момент времени T поток по всем дугам сети, кроме дуг, входящих в сток, равен $\delta_1(T-1)$, а поток на промежуточных дугах (не начинающихся в источнике и не оканчивающихся в стоке) в момент времени $t=0$ равен $\delta_2(0)$. Для перечисленных величин верно соотношение:

$$\sum_{t=0}^{T-1} v_{\varphi}(t)+\delta_1(T-1)-\delta_2(0)=V_G\cdot T. \tag{4}$$

Разделим обе части выражения (4) на T:

$$\frac{\sum\limits_{t=0}^{T-1} v_\varphi(t)}{T} + \frac{\delta_1(T-1)}{T} - \frac{\delta_2(0)}{T} = V_G. \tag{5}$$

Рассмотрим (5) при $T \to +\infty$:

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\sum\limits_{t=0}^{T-1} v_\varphi(t)}{T} + \lim_{T\to+\infty} \frac{\delta_1(T-1)}{T} - \lim_{T\to+\infty} \frac{\delta_2(0)}{T} = V_G. \tag{6}$$

Так как пропускные способности дуг сети конечны, то $\lim\limits_{T\to+\infty}(\delta_1(T-1)/T) = 0$ и $\lim\limits_{T\to+\infty}(\delta_2(0)/T) = 0$, тогда выражение (6) приобретает вид:

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\sum\limits_{t=0}^{T-1} v_\varphi(t)}{T} = V_G. \tag{7}$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

Выражение в левой части (7) назовём *предельной средней величиной исходящего динамического потока.*

Ясно, что теорема верна и в случае, когда средняя величина исходящего потока вычисляется не на отрезке $[0; T-1]_Z$, а на отрезке $[a; a+(T-1)]_Z, a, T \in Z_+$.

Вычисление средней величины динамического потока для конечного временного интервала затруднено в силу возможности произвольного задания потока. Однако, доказанная теорема сводит задачу вычисления предельной средней величины исходящего потока к задаче поиска максимального стационарного потока в сети (для решения которой имеются различные алгоритмы в том числе с полиномиальной временной сложностью [4]), или, согласно теореме Форда-Фалкерсона, к задаче нахождения в сети разреза с минимальной пропускной способностью.

Важно отметить, что при доказательстве теоремы кроме естественного предположения о конечности сети мы не делали никаких предположений о её топологии.

3. СРЕДНЯЯ ВЕЛИЧИНА И ВСПЛЕСК ДИНАМИЧЕСКОГО ПОТОКА

Явление всплеска динамического потока заключается в превышении $v_\varphi(t)$ над V_G в некоторый момент времени. В силу сказанного выше о величине динамического потока, проходящего через минимальный разрез, всплески динамического потока могут возникать вследствие наличия путей разной длины между стоком и ближайшим к стоку минимальным разрезом (примеры см. в [14]), а также и, как будет показано в настоящей работе, и за счет наличия контуров в этой части сети (ясно, что контур тоже порождает пути разной длины).

Понятно, что существуют сети, для которых возможно построить несколько разных динамических потоков, приводящих к возникновению всплесков. Эти всплески могут быть разной величины, но среди всех всплесков наибольший интерес вызывают всплески максимальной величины (по аналогии с величиной стационарного потока и величиной максимального стационарного потока). Вычисление величины максимального всплеска для сетей разных классов может быть выполнено с помощью разных алгоритмов, которые, в свою очередь имеют разную вычислительную сложность.

Класс сети мы будем определять топологией сети на участке между её стоком и ближайшим к стоку минимальным разрезом. Среди изученных ранее классов сетей были выделены параллельные сети, древовидные сети и древовидные сети с контурами. Примечательно, что параллельные сети являются подклассом древовидных сетей. На рис. 1 приведены примеры параллельной (слева) и древовидной (справа) сетей с единичными пропускными способностями всех дуг.

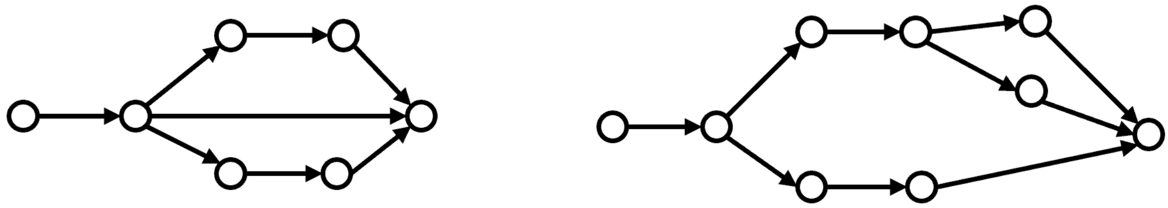

Рис. 1. *Параллельная (слева) и древовидная (справа) сети.*

Поиск максимального всплеска для параллельных и древовидных сетей возможен за полиномиальное время.

Из того факта, что предельная средняя величина динамического потока ограничена сверху величиной максимального стационарного потока V_G той же сети, следует, что на больших временных промежутках создание всплеска динамического потока, то есть превышение $v_\varphi(t)$ над V_G возможно лишь за счет ранее накопленной в сети величины потока. Следующий пример (рис. 2–6) демонстрирует это следствие для сети с одним контуром.

Пусть для сети, изображённой на рис. 2 поток может принимать лишь целочисленные значения. В начальный момент времени поток по всем дугам сети, кроме дуги из источника, равен нулю. Будем назначать поток в этой сети таким образом, чтобы сначала заполнить контур, состоящий из дуг между вершинами 3, 4 и 5. Лишь к моменту времени $t = 2$(рис. 3.) первая частица потока поступает в контур.

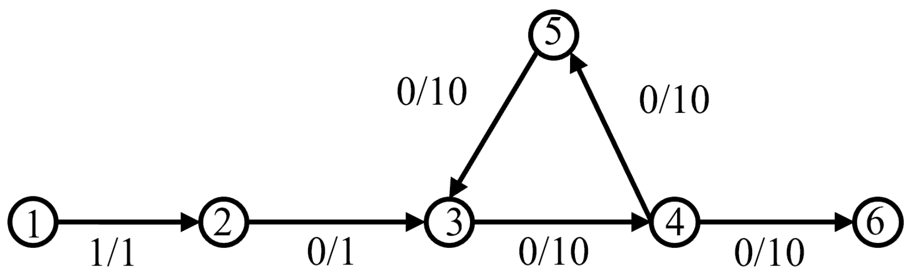

Рис. 2. *Исходная сеть в момент времени* $t = 0$.

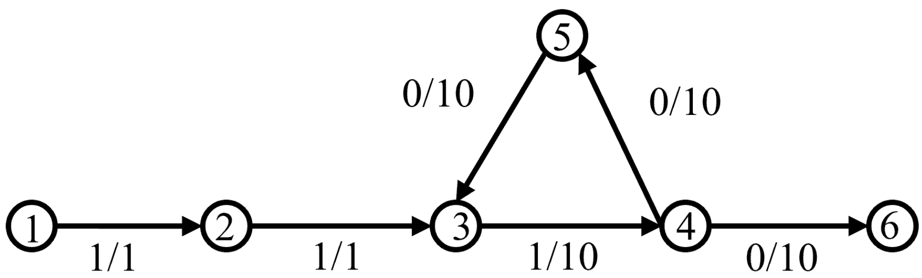

Рис. 3. *Поступление первой единицы потока в контур к моменту времени* $t = 2$.

Далее производится заполнение контура, как это было описано ранее — поток “закручивается” по дугам контура между вершинами 3, 4, 5. Стоит отметить, что подача потока в сеть постоянна при $t \geqslant 0$и удовлетворяет условию квазимаксимальности. На рис. 4 показан момент времени, в который первая единица потока, поступившая в контур, находится в последней дуге контура. В следующий момент времени $t = 5$ этот поток снова будет отправлен по первой дуге контура.

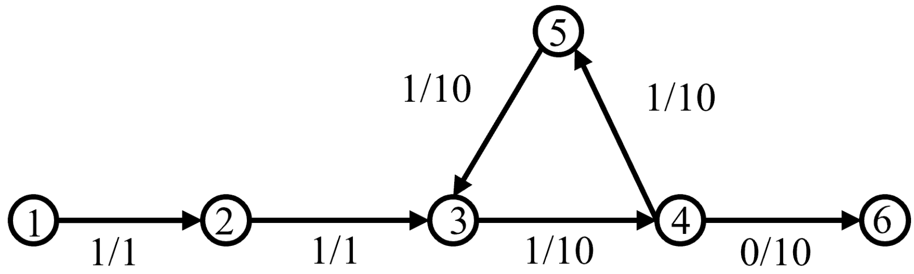

Рис. 4. *Заполнение каждой из дуг контура на 1 единицу потока к моменту времени* $t = 4$.

Таким образом, ни одна из единиц потока, попавшая в контур, не будет направлена в сток до момента полного заполнения дуги контура между вершинами 3–4 (рис. 5а) потоком величиной. На следующем шаге из потока по дуге 3–4 (рис. 5б) будет организован максимальный всплеск потока для данной сети.

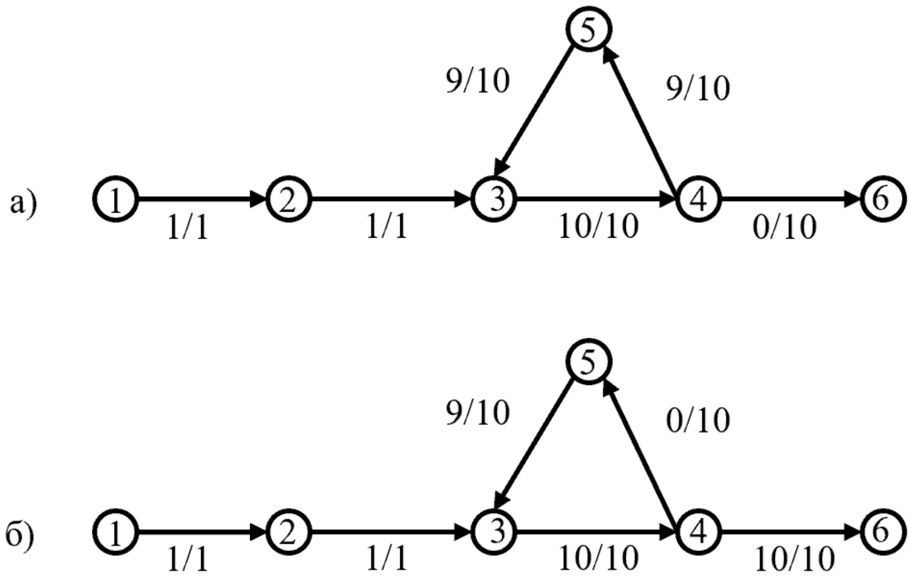

Рис. 5. *Динамический поток в сети: а) перед появлением максимального всплеска при* $t = 29$*; б) в момент возникновения максимального всплеска при* $t = 30$.

Поток по дугам 3–4 и 5–3 при $t = 30$ в дальнейшем будет использован для организации максимального всплеска, то есть максимальный всплеск для данной сети может наблюдаться не более 3-х шагов подряд.

На насыщение ближайшего к стоку минимального разреза ушло 2 шага. На заполнение контура ушло еще 28 временных шагов. Все это время в сток не поступало ни одной единицы потока. Но проходящие по контуру 28 единиц потока способны создавать максимальный всплеск в течение 3-х шагов (с помощью поступающих в контур 2-х единиц потока при $t \in [30; 31]_Z$. Ясно, что вместо полного заполнения контура можно было отправлять в контур лишь каждую третью частицу потока, а остальные направлять сразу в сток, но и максимальный всплеск при таком динамическом потоке можно организовать лишь на 1 шаг.

Максимальный стационарный поток V_G для рассматриваемой сети равен 1 (минимальный

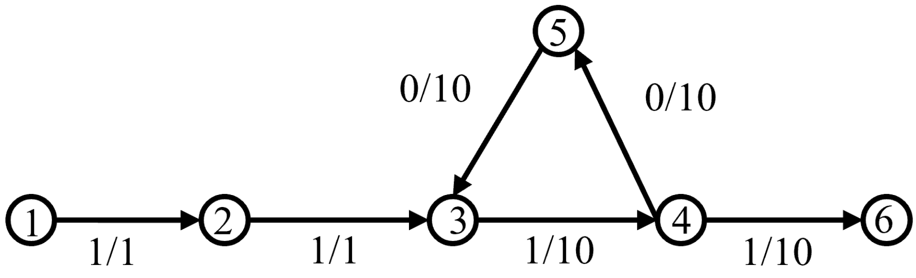

Рис. 6. *Сеть после всплесков при* $t = 33$.

разрез состоит из одной дуги с пропускной способностью в 1). За рассматриваемый промежуток времени $t \in [0; 33]_Z$ в сеть поступило 34 единицы потока, из которых 30 единиц покинуло сеть при $t \in [30; 32]_Z$. Средняя величина исходящего потока при $t \in [0; 33]_Z$ составляет 0.88 единиц потока, что близко по значению к предельной средней величине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказана теорема о пределе среднего значения исходящих динамических потоков, удовлетворяющих условию квазимаксимальности. Показано, что вычисление оценки предельного среднего значения исходящего потока осуществимо за полиномиальное от размеров сети время. Связь между доказанной оценкой и явлением всплеска динамического потока продемонстрирована на примере.

Дальнейшая работа по исследованию динамических потоков и их свойств может включать поиск методов определения максимальных всплесков в сетях с контурами, поскольку данный класс сетей до конца не изучен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Flows in Networks (With a new foreword by Robert G. Bland and James B. Orlin) / L. R. Ford Jr., D. R. Fulkerson, R. G. Bland, J. B. Orlin. — Princeton : Princeton University Press, 2010. — 216 p.

2. Newman, M. Networks : an Introduction / M. Newman. — New York : Oxford University Press, Inc., 2010. — 720 p.

3. Ford, L. R. Jr. Maximal flow through a network / L. R. Ford Jr., D. R. Fulkerson // Canadian Journal of Mathematics. — 1956. — V. 8. — P. 399–404.

4. Goldberg, A. V. Recent developments in maximum flow algorithms / A. V. Goldberg // In : Arnborg S., Ivansson L. (eds) Algorithm Theory. — SWAT'98. SWAT 1998. Lecture Notes in Computer Science. — 1998. — V. 1432. — P. 1–10.

5. Cherkassky, B. V. On implementing push-relabel method for the maximum flow problem / B. V. Cherkassky, A. V. Goldberg // Algorithmica. — 1997. — V. 19. — P. 390–410.

6. Жилякова, Л. Ю. Графовые динамические модели и их свойства / Л. Ю. Жилякова // Автомат. и телемех. — 2015. — Вып. 8. — С. 115–139.

7. Aronson, J. E. A survey of dynamic network flows / J. E. Aronson // Annals of Operations Research. — 1989. — № 20. — P. 1–66.

8. Skutella, M. An Introduction to Network Flows over Time / M. Skutella // In: Cook W., Lovász L., Vygen J. (eds) Research Trends in Combinatorial Optimization. Berlin : Springer Berlin Heidelberg. — 2009. — P. 451–482.

9. Flows over time as continuous limits of packet-based network simulations / T. Ziemke et. al. // Transportation Research Procedia. — 2021. — V. 52. — P. 123–130.

10. Ерусалимский, Я. М. О всплесках динамического потока и минимальных разрезах / Я. М. Ерусалимский, А. М. Куликовский // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2014. — Вып. 4 (182). — С. 5–8.

11. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, М. В. Кузьминова, А. Г. Петросян. — Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2009. — 196 с.

12. Chand, M. B. A brief review on maximum flows in networks with continuous-time settings / M. B. Chand, T. N. Dhamala // Journal of Advanced College of Engineering and Management. — 2022. — V. 7. — P. 81–91.

13. Abraheim, A. K. Flow optimization in dynamic networks on time scales / A. K. Abraheim, A. K. Jaber, R. Al-Salih // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — V. 1804.

14. Ерусалимский, Я. М. Разработка и исследование методов решения экстремальных задач на графах и сетях с ограничениями на достижимость: автореф. дис . . . д-ра техн. наук : 05.13.17 / Ерусалимский Яков Михайлович. — Ростов-на-Дону, 2015. — 258 с.

REFERENCES

1. Ford, L.R.Jr., Fulkerson D.R., Bland R.G., Orlin J.B. Flows in Networks (With a new foreword by Robert G. Bland and James B. Orlin), Princeton: Princeton University Press, 2010, 216 p.

2. Newman M. Networks: an Introduction. New York: Oxford University Press, Inc., 2010, 720 p.

3. Ford L.R.Jr., Fulkerson D.R. Maximal flow through a network. Canadian Journal of Mathematics, 1956, vol. 8, pp. 399–404.

4. Goldberg, A.V. Recent developments in maximum flow algorithms. In: Arnborg S., Ivansson L. (eds) Algorithm Theory — SWAT'98. SWAT 1998. Lecture Notes in Computer Science, 1998, vol. 1432, pp. 1–10.

5. Cherkassky B.V., Goldberg A.V. On implementing push-relabel method for the maximum flow problem. Algorithmica, 1997, vol. 19, pp. 390–410.

6. Zhilyakova L.Y. Dynamic graph models and their properties. [ZHilyakova L.YU. Grafovye dinamicheskie modeli i ih svojstva]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2015, iss. 8, pp. 115–139.

7. Aronson J.E. A survey of dynamic network flows. Annals of Operations Research, 1989, no. 20, pp. 1–66.

8. Skutella M. An Introduction to Network Flows over Time. In: Cook W., Lovász L., Vygen J. (eds) Research Trends in Combinatorial Optimization. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 451–482.

9. Ziemke T., Sering L., Koch L.V., Zimmer M., Nagel K., Skutella M. Flows over time as continuous limits of packet-based network simulations. Transportation Research Procedia, 2021, vol. 52, pp. 123–130.

10. Erusalimskiy I.M., Kulikovski A.M. On the dynamic flow splashes and minimum cuts. [Erusalimskiy I.M., Kulikovski A.M. O vspleskah dinamicheskogo potoka i minimal'nih razrezah]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskij region. Estestvennye nauki — Izvestiya vuzov. North Caucasian region. Natural Sciences*, 2014, iss. 4(182), pp. 5–8.

11. Erusalimskiy I.M., Skorokhodov V.A., Kuzminova M.V., Petrosyan A.G. Graphs with Nonstandard Reachability. Problems, Applications. [Erusalimskiy I.M., Skorokhodov V.A., Kuzminova M.V., Petrosyan A.G. Grafy s nestandartnoj dostizhimost'yu: zadachi, prilozheniya]. Rostov-on-Don: Southern Federal University, 2009, 196 p.

12. Chand M.B., Dhamala T.N. A brief review on maximum flows in networks with continuous-time settings. Journal of Advanced College of Engineering and Management, 2022, vol. 7, pp. 81–

91.

13. Abraheim A.K., Jaber A.K., Al-Salih R. Flow optimization in dynamic networks on time scales. Journal of Physics: Conference Series, 2021, vol. 1804.

14. Erusalimskiy I.M. Development and research of extremum problems methods on graphs and networks under restrictions on reachability. [Erusalimskiy I.M. Razrabotka i issledovanie metodov resheniya ekstremal'nih zadach na grafah i setyah s ogranicheniyami na dostizhimost']. Extended Abstract of Doctor's thesis (in Russ.). Rostov-on-Don, 2015, 258 p.

Ерусалимский Яков Михайлович, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Российская Федерация
E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Erusalimskiy Iakov M., Doctor in Technical Science, Professor, Department of Discrete Mathematics and Algebra, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Русаков Владислав Андреевич, аспирант кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Российская Федерация
E-mail: vrusakov@sfedu.ru

Rusakov Vladislav A., postgraduate student, Department of Discrete Mathematics and Algebra, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
E-mail: vrusakov@sfedu.ru