УДК 517.3

ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ БЕССЕЛЯ И РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ИНТЕГРИРОВАННОГО СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА*

А. Л. Джабраилов[1], Э. Л. Шишкина[2,3]

[1] — *Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова;*
[2] — *Воронежский государственный университет;*
[3] — *Белгородский государственный национальный исследовательский университет*

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Аннотация. В этой статье мы рассматриваем оператор типа свертки, называемый обобщенным потенциалом Бесселя. Обобщенный потенциал Бесселя - очень важный объект в теории потенциала, имеющий множество приложений, таких как решение неоднородных уравнений, теория функциональных пространств и функциональные пополнения. Кроме этого, формулу обращения можно интерпретировать как новый оператор дробного дифференцирования произвольного положительного порядка. В работе доказана теорема и рассмотрен пример с главным результатом нахождение решения неоднородного интегрированного сингулярного экранированного уравнения Пуассона $(I-\Delta_\gamma)^k u=f$, $k\in\mathbb{N}$.

Ключевые слова: обобщенная свертка, обобщенный потенциал Бесселя, дробные степени многомерных операторов, обратный оператор, преобразование Ханкеля.

GENERALIZED BESSEL POTENTIAL AND SOLUTION OF A NONHOMOGENEOUS INTEGRATED SINGULAR POISSON EQUATION

A. L. Dzhabrailov, E. L. Shishkina

Abstract. In this article, we consider a convolution type operator called the generalized Bessel potential. The generalized Bessel potential is a very important object in theory, having many applications such as solving nonhomogeneous belonging, theoretical function spaces, and completion functions. In addition, the inversion formula can be interpreted as a new fractional annihilation operator of positive order. The paper proves the regularity and an example of consideration with obtaining a solution to the inhomogeneous integrated singular screened Poisson equation $(I-\Delta_\gamma)^k u=f$, $k\in\mathbb{N}$.

Keywords: generalized convolution; generalized Bessel potential; fractional powers of multidimensional operations; inverse operator; Hankel transform.

ВВЕДЕНИЕ

Теория потенциала берет свое начало из теории электростатического и гравитационного потенциалов и уравнений Лапласа, волн, Гельмгольца и Пуассона. Известно, что знаменитые потенциалы Рисса являются реализациями действительных отрицательных степеней Лапласа и волновых операторов. Между тем, в теории потенциала большое внимание уделяется потенциалу Бесселя

$$G^\alpha f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x-y)f(y)\,dy,\quad \alpha>0,$$

* Работа автора выполнена при поддержке Минобрнауки РФ по гос. заданию FEGS2020–0001.

где

$$G_\alpha(x) = \frac{2^{\frac{2-n-\alpha}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)}{|x|^{\frac{n-\alpha}{2}}}$$

и K_ν обозначает модифицированную функцию Бесселя второго рода. Оператор G^α можно интерпретировать как реализацию реальных отрицательных степеней оператора $(I-\Delta)$. В частности, потенциал Бесселя рассматривали Н. Ароншайн и К. Т. Смит в [1] и Кальдероном в [2]. Следует отметить, что потенциалы Бесселя порождают пространства функций с дробной гладкостью α. Они очень полезны для исследования некоторых дробных УЧП эллиптического типа. С их помощью строятся пространства Соболева дробного порядка. Первые результаты о пространствах бесселевых потенциалов были получены И. Стейном в работе [3] в случае $0 < \alpha < 2$ и Лизоркиным в [4] в общем случае. Обращение бесселевых потенциалов впервые было получено В. А. Ногиным в [5, 6] с использованием гиперсингулярных интегралов. Позже В. С. Гулиев, З. В. Сафаров изучали потенциалы Бесселя, порожденные дифференциальными операторами Бесселя, в [7]. В [8] доказано неравенство Юнга для операторов B-свертки в B-пространствах потенциалов Бесселя, а потенциалы Бесселя охарактеризованы в терминах пространств B-Лизоркина-Трибеля. Оптимальное вложение пространств потенциалов типа Бесселя было получено в [9, 10, 11].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Введём обозначения

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}.$$

Через $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ обозначим мультииндекс, состоящий из положительных фиксированных действительных чисел $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Пусть $L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+) = L_p^\gamma$, $1 \leqslant p < \infty$ — пространство измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функции четных по каждой переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$ таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^\gamma \, dx < \infty,$$

где

$$x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Для $p \geqslant 1$, L_p^γ — норма f определяется формулой

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)} = \|f\|_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^\gamma \, dx \right)^{1/p}.$$

Нормализованная функция Бесселя первого рода j_ν определяется формулой

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu} J_\nu(x),$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода.

Для $x \in R^n$ будем использовать обозначение

$$j_\gamma(x,\xi) = \prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_{i-1}}{2}}(x_i \xi_i), \qquad j_\gamma(0,\xi) = 1.$$

Многомерное преобразование Ганкеля функции $f \in L_1^\gamma(R_+^n)$ определяется как

$$F_\gamma\left[f\right](\xi) = F_\gamma\left[f(x)\right](\xi) = \int_{R_+^n} f(x) j_\gamma(x,\xi) x^\gamma dx.$$

Определение: Пусть $f : [a,b] \to R^n$. Тогда вариацией (также полной вариацией или полным изменением) функции f на отрезке $[a,b]$ называется следующая величина:

$$V_a^b \stackrel{\text{def}}{=} \sup_P \sum_{k=0}^{m} ||f(x_{k+1}) - f(x_k)||.$$

То есть точная верхняя грань по всем разбиениям отрезка $[a,b]$ длин ломаных в R^n, концы которой соответствуют значениям f в точках разбиения. Функции, вариация которых ограничена на отрезке, называются функциями ограниченной вариации.

Пусть $f \in L_1^\gamma(R_+^n)$ и является функцией ограниченной вариации в окрестности точек непрерывности.

Тогда для $\gamma > 0$ справедлива формула обращения

$$F_\gamma^{-1}[F_\gamma[f](\xi)](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma^2(\frac{\gamma_j+1}{2})} \int_{R_+^n} j_\gamma(x,\xi) F_\gamma[f](\xi) \xi^\gamma d\xi.$$

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^\gamma T_x^y f)(x) = {}^\gamma T_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1} T_{x_1}^{y_1} \cdots {}^{\gamma_n} T_{x_n}^{y_n} f)(x),$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг $\gamma_i T_{x_i}^{y_i}$ действует для $i = 1, \cdots, n$по формуле

$$\begin{aligned}&({}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i} f)(x)\\ &\qquad = \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\gamma_i}{2})} \int_0^\pi f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\varphi_i}, x_{i+1}, \cdots, x_n) \sin^{\gamma_i - 1} \varphi_i d\varphi \varphi_i \cdots\end{aligned}$$

Обобщенная свертка, порожденная многомерным обобщенным сдвигом γT_x^y определяется как

$$(f * g)_\gamma(x) = (f * g)_\gamma = \int_{R_+^n} f(y)({}^\gamma T_x^y g) y^\gamma dy.$$

Многомерное преобразование Ханкеля, примененное к обобщенной свертке, имеет вид

$$F_\gamma[(f * g)_\gamma(x)](\xi) = F_\gamma[f(x)](\xi) F_\gamma[g(x)](\xi).$$

Многомерный оператор Пуассона P_x^γ, действует на f по формуле

$$P_x^\gamma f(x) = C(\gamma) \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi f(x_1 \cos\alpha_1, \cdots, x_n \cos\alpha_n) \prod_{i=1}^{n} \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i d\alpha_i,$$

где $\gamma_i > 0, i = 1, \cdots, n, C(\gamma) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\Gamma(\ frac\gamma_i 2)}$.

2. ОБОБЩЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ БЕССЕЛЯ

Обобщенный потенциал Бесселя или B-потенциал Бесселя определяется формулой ([12])

$$(G^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x) = (G^{\gamma}_{\alpha} * \varphi)_{\gamma} = \int_{R^n_+} G^{\gamma}_{\alpha}(y)({}^{\gamma}T^{y}_{x}\varphi(x))y^{\gamma}dy, \qquad \alpha > 0 \tag{1}$$

где ядро $G^{\gamma}_{\alpha}(x)$ имеет вид

$$G^{\gamma}_{\alpha}(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\ gamma|-\alpha}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|). \tag{2}$$

Оператор (1) реализует отрицательную дробную степень $(I-\Delta_{\gamma})^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$, где I - единичный оператор, Δ_{γ} - оператор Лапласа-Бесселя

$$\Delta_{\gamma} = (\Delta_{\gamma})_x = \sum_{k=1}^{n}(B_{\gamma_k})x_k \tag{3}$$

и

$$(B_{\gamma})_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}t^{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad \gamma \in R \tag{4}$$

— оператор Бесселя.Результаты, полученные в [13] , позволяют представить обобщенный потенциал Бесселя в виде

$$G^{\alpha}_{\gamma}\varphi = F^{-1}_{\gamma}(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}F_{\gamma}\varphi, \quad \alpha > 0, \tag{5}$$

где F_{γ} — многомерное преобразование Ханкеля.

3. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ИНТЕГРИРОВАННОГО СИНГУЛЯРНОГО ЭКРАНИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

В этой статье используется обобщенный потенциал Бесселя [14]

$$G^{\alpha}_{\gamma}f(x) = \int\limits_{R^n_+} G^{\gamma}_{\alpha}(y)(y)^{\gamma}(T^{y}_{x}\varphi(x))\,y^{\gamma}dy,$$

для решения неоднородного интегрированного синугярного экранированного уравнения Пуассона вида

$$(I-\Delta_y)^k u = f, k \in N.$$

Докажем теорему:

Теорема 1. Пусть $\varphi \in S_{e\nu}\left(R^n_+\right)$,$1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $k \in N$, тогда

$$G^{\alpha+2k}_{\gamma}(I-\Delta_{\gamma})^k\varphi = G^{\alpha}_{\gamma}\varphi, \tag{1}$$

где Δ_y - оператор Лапласа-Бесселя.

Доказательство.Используя формулу 1.8.3 из [13] вида ${}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}(B_{y_i}) = (B_{y_i})^{y_i}_{x_i}T^{y_i}_{x_i}$
Получим

$$\left(G^{\alpha+2k}_{\gamma}(I-\Delta_{\gamma})^k\varphi\right)(x) = \int_{R^n_+} G^{\gamma}_{\alpha}(y)\left({}^{\gamma}T^{y}_{x}(I-\Delta_{\gamma})^k\varphi(x)\right)y^{\gamma}dy =$$

$$= \int_{R^n_+} G^{\gamma}_{\alpha}y^{\gamma}(I-\Delta_{\gamma})\left({}^{\gamma}T^{y}_{x}(I-\Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x)\right)dy =$$

$$= \int_{R^{n+}} G^{\gamma}_{\alpha} \left({}^{\gamma}T^{\gamma}_{x} \left(I - \Delta_{\gamma}\right)^{k-1} \varphi\left(x\right) \right) y^{\gamma} dy$$

$$- \int_{R^n_+} G^{\gamma}_{\alpha}\left(y\right) \left(\sum_{j=1}^{n} \left(B_{\gamma_i}\right)_{\gamma_i} \left({}^{\gamma}C^{y}_{x} \left(-\Delta_{\gamma}\right)^{k-1} \varphi\left(x\right) \right) \right) y^{\gamma} dy \qquad (2)$$

Пусть

$$I_j = \int_0^\infty G^{\gamma}_{\alpha}(y) \left[(B_{\gamma_i})_{\gamma_i} \left({}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) \right) \right] y_j^{\gamma_j} dy_j.$$

Интегрирования по частям каждый I_j при $j = 1,...,n$, получим

$$I_j = \int_0^\infty G^{\gamma}_{\alpha}(y) \left[(B_{\gamma_i})_{yi} \left({}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) \right) \right] y_j^{\gamma_j} dy_j =$$

$$= \int_0^\infty G^{\gamma}_{\alpha}(y) \left[\frac{\partial}{\partial y_i} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_i} {}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) \right] dy_j$$

$$= \left\{ u = G^{\gamma}_{\alpha}(y) dv = \frac{\partial}{\partial y_i} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_i} {}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) dy_j \right\}$$

$$= G^{\gamma}_{\alpha}(y) y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \left({}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) \right) |_{y_j=0}^{\infty}$$

$$- \int_0^\infty y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_i} G^{\gamma}_{\alpha}(y) \left[\frac{\partial}{\partial y_i} {}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) \right] dy_j =$$

$$= \int_0^\infty y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_i} G^{\gamma}_{\alpha}(y) \left[\frac{\partial}{\partial y_i} {}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) \right] dy_i =$$

$$= \left\{ u = y_j^{\gamma_j} G^{\gamma}_{\alpha}(y), dv = \frac{\partial}{\partial y_j} {}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) dy_i \right\} =$$

$$= -y_j^{\gamma_j} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} G^{\gamma}_{\alpha}(y) \right] \left({}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) \right) |_{y_j}^{\infty} +$$

$$+ \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial y_i} y_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial y_i} G^{\gamma}_{\alpha}(y) \right] {}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) dy_j =$$

$$= \int_0^\infty \left[(B_{\gamma i})_{yi} G^{\gamma}_{\alpha}(y) \right] {}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) y_j^{\gamma_j} dy_j.$$

Возвращаясь к (2), получим

$$\left(G^{\alpha+2k}_{\gamma}(I - \Delta_{\gamma})^k \varphi \right)(x) = \int_{R^n_+} \left[(I - \Delta_{\gamma}) G^{\gamma}_{\alpha}(y) \left({}^{\gamma}T^{y}_{x}(I - \Delta_{\gamma})^{k-1}\varphi(x) \right) y^{\gamma} dy \right].$$

Повторяя эти действия k-раз, будем иметь

$$(G^{\alpha+2k}_{\gamma}(I - \Delta_{\gamma})^k \varphi)(x) = \int_{R^n_+} [(I - \Delta_{\gamma})^k G^{\gamma}_{\alpha}(y0)]({}^{\gamma}T^{\gamma}_{x}\varphi(x)) y^{\gamma} dy$$

Применяя теперь

$$(I - \Delta_{\gamma})^k G^{\gamma}_{\alpha+2k} = G^{\gamma}_{\alpha}, \qquad k \in N, \qquad (3)$$

получим доказываемое утверждение(1). По теореме 1 и свойству

$$G^{0}_{\gamma}\varphi = \varphi, \qquad \varphi \in L^{\gamma}_{p}(R^n_+), \qquad (4)$$

получим, что функция $f(x) = G^{2k}_{\gamma}\varphi(x)$, $x \in \overline{R}^n_+$ есть решение уравнения

$$(I - \Delta_{\gamma})^k f(x) = \varphi(x), k - 1, 2, \cdots$$

Пример 1.Решение задачи $f(x)-\Delta_\gamma f(x)=j_\gamma(x,\xi),f(0)=\frac{1}{1+|\xi|^2}$ имеет вид $(G^2_\gamma)_x j_\gamma(x,\xi)$.

Найдем сначала $(P^2_\gamma)_x j_\gamma(x,\xi)$ переходя к сферическим координатам, применяя Лемму 1:

Лемма 1. Пусть $\varphi(s)$ — функция одной переменной и $\varphi(|x|)\in L^\gamma_1(R^n_+)$. Преобразование Ханкеля радиальной функции $\varphi(|x|)$ есть основа радиальная функция и следующая формула имеет место

$$F_\gamma[\varphi(|x|)](\xi)=\frac{\prod_{i=1}^n(\frac{\gamma_i+1}{2})}{2^{n-1}\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}\int_0^\infty \varphi(r)j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(|\xi|r)r^{n+|\gamma|-1}$$

$$(I-\Delta_\gamma)^k G^\gamma_{\alpha+2k}=G^\gamma_\alpha,\qquad k\in N,$$

и формулы

$$^\gamma T^y_x j_\gamma(x,\xi)j_\gamma(x,\xi)j_\gamma(y,\xi). \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \frac{r^{v+1}J_v(ar)}{(1+r^2)^\mu}dr=\frac{a^{\mu-1}}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu)}K_{v-\mu+1}(a), \tag{6}$$

$$a>0-1<v<2\mu-\frac{1}{2}.$$

Для многомерного обобщённого сдвига справедлива формула (см.[15])

$$(P^2_\gamma)_x j_\gamma(x,\xi)=j_\gamma(x,\xi)\int_{R^n_+}P_\gamma(y,t)j_\gamma(x,\xi)y^\gamma dy=\{y=r\theta\}=$$

$$=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{y_i+1}{2}\right)}tj_\gamma(x,\xi)\int_0^\infty\frac{r^{n+|\gamma|-1}}{(t^2+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}dr\int_{S^+_1(n)}j_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma dS=$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{y_i+1}{2}\right)}tj_\gamma(x,\xi)\int_0^\infty\frac{r^{n+|\gamma|-1}}{(t^2+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(|\xi|_r)dr=$$

$$=\frac{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}}tj_\gamma(x,\xi)\int_0^\infty\frac{r^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}{(t^2+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(|\xi|_r)dr=$$

$$=\{r=tp\}=$$

$$==\frac{2^{\frac{n+|\gamma|}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}}tj_\gamma(x,\xi)\int_0^\infty\frac{r^{\frac{n+|\gamma|}{2}}}{(t^2+r^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(|\xi|_r)dr=$$

$$=\{r=tp\}=\sqrt{2t|\xi|}j_\gamma(x,\xi)K_{\frac{1}{2}}(t|\xi|)=\sqrt{\pi}j_\gamma(x,\ xi)e^{-t|\xi|}.$$

Вычислим теперь используя формулу:

$$(G^\alpha_\gamma)(x)=\frac{2^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{alpha-1}{2}}J_{\frac{\alpha-1}{2}}(t)(P^\gamma_t\varphi)(x)dt, \tag{7}$$

имеем

$$(G^\alpha_\gamma)_x j_\gamma(x,\xi)=\frac{2^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\pi}j_\gamma(x,\xi)\int_0^\infty t^{\frac{1-\alpha}{2}}J_{\frac{\alpha-1}{2}}(t)e^{-t|\varepsilon|}\,dt=$$

$$=\frac{2^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\pi}j_\gamma(x,\xi)\frac{2^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\frac{1}{|\xi|^2}+1\right)^{-\frac{\alpha}{2}}|\xi|^{-\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=\frac{j_\gamma(x,\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Таким образом, при $\alpha=2$ мы получим решение задачи:

$$f(x) = \frac{j_\gamma(x,\xi)}{1+|\xi|^2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье рассмотрен оператор типа свертки, называемый обобщенным потенциалом Бесселя. Это очень важный обьект в теории потенциала с многочисленными приложениями, такими как решения неоднородных уравнений, теория функциональных пространств и функциональное пополнение. В работе показано каким образом, используя обобщенный потенциал Бесселя, находится решения неоднородного интегрированного сингулярного экранированного уравнения Пуассона $(I-\Delta_\gamma)^k u = f$, $k \in \mathbb{N}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aronszajn, N. Theory of Bessel potentials / N. Aronszajn, K. T. Smith // I. Ibid. — 1961. — V. 11. — P. 365–475.

2. Calderon, A. P. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions / A. P. Calderon // In Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R. I. — 1961. — V. 4. — P. 33–50.

3. Stein, E. M. The characterization of functions arising as potentials. I / E. M. Stein // Bull. Amer. Math. Soc. — 1961. — V. 67 (I). — P. 102–104.

4. Лизоркин, П. И. Описание пространств $B_{k,n}$ в терминах разностных сингулярных интегралов / П. И. Лизоркин // Матем. сб. — 1970. — Т. 81 (123):1. — С. 79–91.

5. Ногин, В. А. Об обращении бесселевых потенциалов / В.А. Ногин // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 8. — С. 1407–1411.

6. Ногин, В. А. Обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов / В. А. Ногин // Изв. вузов. Матем. — 1985. — № 3. — С. 57–65.

7. Guliev, V. S. $B_{k,n}$-Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$-Sobolev–Liouville spaces / V. S. Guliev, Z. V. Safarov // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. — 2001. — № 15. — P. 68–80.

8. Nikolskii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform / V. S. Guliev, A. Serbetci, A. Akbulut, Y. Y. Mammadov // Eurasian Math. — 2011. — V. 2 (3). — P. 42–66.

9. Гольдман, М. Л. Интегральные свойства обобщенных бесселевых потенциалов / М. Л. Гольдман // ДАН. — 2007. — Т. 414 (2). — С. 159–164.

10. Гольдман, М. Л. Перестановочно инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса / М. Л. Гольдман // ДАН. — 2008. — Т. 423 (1). — С. 14–18.

11. Гольдман, М. Л. Конус перестановок для обобщенных бесселевых потенциалов / М. Л. Гольдман // Труды МИАН. — 2008. — С. 151–163.

12. Shishkina, E. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation / E. Shishkina, I. Ekincioplu, C. Keskin // Integral Transforms and Special Functions. — 2020. — P. 1–16.

13. Kipriyanov, I. A. Singular Elliptic Boundary Value Problems / I. A. Kipriyanov. — Moscow : Nauka, 1997. — 198 p.

14. Dzhabrailov, A. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential / A. Dzhabrailov, Y. Luchko, E. Shishkina // Axioms. — 2021. — V. 10 (3). — P. 232.

15. Ситник, С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. — М. : Физматлит, 2019. — 224 с.

REFERENCES

1. Aronszajn N., Smith K.T. Theory of Bessel potentials. I. Ibid., 1961, vol. 11, pp. 365–475.

2. Calderon A.P. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R.I, 1961, vol. 4, pp. 33–50.

3. Stein E.M. The characterization of functions arising as potentials. I. Bull. Amer. Math. Soc. , 1961, vol. 67 (I), pp. 102–104. Matematicheskij sbornik Sbornik: Mathematics 1970, vol. 81 (123):1, pp. 79–91

4. Nogin V.A. On the inversion of Bessel potentials. [Nogin V.A. Ob obrashchenii besselevyh potencialov]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1982, vol. 18:8, pp. 1407–1411.

5. Nogin V.A. Inversion of Bessel potentials using hypersingular integrals. [Nogin V.A. Obrashchenie besselevyh potencialov s pomoshch'yu gipersingulyarnyh integralov]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1985, no. 3, pp. 57–65.

6. Guliev V.S., Safarov Z.V. $B_{k,n}$-Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$–Sobolev–Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 2001, no. 15, pp. 68–80.

7. Guliev V.S., Serbetci A., Akbulut A., Mammadov Y.Y. Nikolskii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math., 2011, vol. 2 (3), pp. 42–66.

8. Goldman M.L. Integral properties of generalized Bessel potentials. [Gol'dman M.L. Integral'nye svojstva obobshchennyh besselevyh potencialov]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2007, vol. 414, no. 2, pp. 159–164.

9. Goldman M.L. Permutation invariant shells of generalized Bessel and Riesz potentials. [Gol'dman M.L. Perestanovochno invariantnye obolochki obobshchennyh potencialov Besselya i Rissa]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 423, no. 1, pp. 14–18.

10. Goldman M.L. The cone of permutations for generalized Bessel potentials. [Gol'dman M.L. Konus perestanovok dlya obobshchennyh besselevyh potencialov]. *Trudy MIAN — Proceedings of MIAN*, 2008, pp. 151–163.

11. Shishkina E., Ekincioplu I., Keskin C. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions, 2020, pp. 1–16.

12. Kipriyanov I.A. Singular Elliptic Boundary Value Problems, Moscow, 1997.

13. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms, 2021, vol. 10(3), p. 232.

14. Sitnik S.M., Shishkin E.L. Method of transformation operators for differential equations with Bessel operators. [Sitnik S.M., SHishkina E.L. Metod operatorov preobrazovaniya dlya differencial'nyh uravnenij s operatorami Besselya]. Moscow, 2019, 224 p.

Джабраилов Ахмед Лечаевич, старший преподаватель кафедры математического анализа алгебры и геометрии ФГБОУ ВО "Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова", Грозный, Россия
E-mail: ahmed_0065@mail.ru

Dzhabrailov Akhmed Lechaevich, Senior Lecturer, Department of Mathematical Analysis of Algebra and Geometry, Chechen State University named after A. A. Kadyrov, Grozny, Russia
E-mail: ahmed_0065@mail.ru

Шишкина Элина Леонидовна, д-р. физ.-мат. наук, доц., профессор кафедры математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета (ВГУ), Воронеж, Россия и профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования (ПМиКМ) ИИиЦТ Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ "БелГУ"), Белгород, Россия
E-mail: ilina_ dico@mail.ru

Shishkina Elina Leonidovna, Dr. Phys.-Math. in Science, Associate Professor, Professor of the Department of Mathematical and Applied Analysis of the Voronezh State University (VSU), Voronezh, Russia and Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling (PM&CM) of the IIiCT of the Belgorod State National Research University (NRU "BelGU"), Belgorod, Russia
E-mail: ilina_ dico@mail.ru