УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А. Г. Баскаков[1], Г. В. Гаркавенко[2], Н. Б. Ускова[3]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Воронежский государственный педагогический университет;*
[3] — *Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 14.02.2023 г.

Аннотация. В работе рассматривается разностный оператор, действующий в пространстве последовательностей и имеющий бесконечную матрицу, у которой ненулевыми являются только главная и побочная диагонали. Изучаются его свойства: обратимость, коммутируемость двух операторов такого вида, найден спектр. Приводится теорема о локализации спектра в случае, когда рассматриваемый оператор самосопряжен и возмущен оператором Гильберта-Шмидта.

Ключевые слова: инволюция, обратимость, спектр, теорема о локализации спектра.

SOME PROPERTIES OF DIFFERENCE OPERATORS WITH INVOLUTION

A. G. Baskakov, G. V. Garkavenko, N. B. Uskova

Abstract. The paper considers a difference operator acting in the space of sequences and which has an infinite matrix, in which only the main and secondary diagonals are nonzero. Its properties are studied: invertibility, commutation of two operators of this type, the spectrum is found. A theorem on the localization of the spectrum is given in the case when the considered operator is self-adjoint and perturbed by the Hilbert-Schmidt operator.

Keywords: involution, reversibility, spectrum, spectrum localization theorem.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно исследуются дифференциальные уравнения первого и высших порядков с инволютивным отклонением или с инволюцией. Напомним, что инволюцией обычно называют гомеоморфизм ω некоторого топологического пространства $\mathcal{E}$ [1], такой что

$$\omega^2(x) = \omega(\omega(x)) = x,\ x \in \mathcal{E}. \tag{1}$$

Например, см. [2], [3], [4], [5], [6].

Если $\mathcal{E}$ — симметричый относительно нуля отрезок из $\mathbb{R}$, то инволюцию обычно задают формулой $\omega(x) = -x$ и она называется отражением. Если же в качестве отрезка берем $[0, b]$, то

$$\omega(x) = b - x,\ x \in [0, b] \tag{2}$$

Такая инволюция называется простейшей или стандартной [2], [5]. Обзор результатов, касающихся свойств дифференциальных операторов с инволюцией, можно найти, например, в [2], [5]. Обзор результатов по дифференциальным уравнениям второго порядка с инволюцией изложен в [4], а также в [6]. Отметим, что изначально гомеоморфизм, определенный формулой

(1), назывался карлемановским сдвигом [3], [7], а само условие (1) — условием Карлемана [7], [8]. Также карлемановский сдвиг называется инволютивным отклонением [2], [3]. Далее будет использоваться термин “инволюция”, как наиболее употребительный в последнее время. В работе мы будем придерживаться операторного (и матричного) подхода к определению и изучению инволюции. Отметим, что инволюция в банаховом пространстве – ограниченный оператор, играющий важную роль [1] при исследовании дифференциальных операторов в банаховом пространстве.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое комплексное банахово пространство и $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$, со стандартной нормой $\|X\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Xx\|$, $X\in\operatorname{End}\mathcal{X}$, $x\in\mathcal{X}$, и $I\in\operatorname{End}\mathcal{X}$ — тождественный оператор в $\mathcal{X}$.

Определение 1. Оператор $J\in\operatorname{End}\mathcal{X}$ называется инволюцией, если

$$J^2 = I. \tag{3}$$

Из определения 1 сразу вытекает, что операторы I и $-I$ являются инволюцией. Такие инволюции называются тривиальными. Мы будем рассматривать нетривиальные инволюции, которые и введем далее.

Пусть $\mathbb{J}$ есть одно из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$. Рассматривается банахово пространство $l_p(\mathbb{J},E)$, $p=[1,\infty]$, комплексных последовательностей $x:\mathbb{J}\to E$, где E — некоторое комплексное банахово пространство. Мы будем использовать пространство двусторонних комплексных последовательностей $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ и его обозначать кратко через l_p, $p\in[1,\infty]$, а также пространство $l_p(\mathbb{Z}_+,\mathbb{C}^2)$. Напомним, что

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{J}}\|x(n)\|_E^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad p\in[1,\infty), \qquad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{J}}\|x(n)\|_E.$$

При $p=2$ пространство l_2 является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{y}(n).$$

Стандартный базис в l_p, $p\in[1,\infty)$, обозначим через $(e_n, n\in\mathbb{J})$, $e_n(k)=\delta_{nk}$, где δ_{nk} — символ Кронекера. Отметим, что инволюция существует в любом банаховом пространстве со счетным базисом, достаточно перенумеровать базис целыми числами и положить

$$(Jx)(n) = x(-n),\ n\in\mathbb{Z},\ x\in\mathcal{X}, \tag{4}$$

где $x=\sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)e_n$ и $(Jx)(0)=x(0)$.

Отметим связь этой инволюции со стандартной инволюцией, задаваемой формулой (2). Очевидно, что если в пространстве $L_2[0,1]$ определить оператор инволюции формулой $(Jy)(x)=y(1-x), x\in[0,1], y\in L_2[0,1]$, что равносильно формуле (2), то такой оператор будет иметь матрицу относительно базиса $\{e^{i2\pi nt}, n\in\mathbb{Z}\}$ в $L_2[0,1]$, в которой единицы стоят по побочной диагонали, а остальные элементы нулевые. Оператор инволюции J, определенный формулой (4), относительно стандартного базиса в l_2 будет иметь точно такую же матрицу. Поэтому, как и в теории дифференциальных уравнений с инволюцией, инволюцию, определенную равенством (4), назовем *стандартной*. Далее рассматриваются и другие инволюции (см. Лемму 2).

Через $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ обозначим пространство всех двусторонних комплексных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (необязательно ограниченных). Пространство l^∞ является алгеброй с поточечным умножением $(\alpha\beta)(n) = \alpha(n)\beta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, α, $\beta \in l^\infty$.

Для любой последовательности $\alpha \in l^\infty$ определим оператор $A_\alpha = \alpha I$, $A_\alpha x = \alpha x$. Область определения $D(A_\alpha)$ оператора A_α определяется следующим образом: $D(A_\alpha) = \{x \in l_p, \alpha x \in l_p\}$. Оператор A_α будем называть *диагональным* оператором. Рассмотрим оператор $A_{\alpha,\beta} = A_\alpha + A_\beta J = \alpha I + \beta J$, α, $\beta \in l^\infty$, где оператор J определен формулой (4), множество таких операторов обозначим через $\mathcal{M}$. Аналогичным образом определяется область определения для оператора $A_\beta J$ и тогда $D(A_{\alpha,\beta}) = D(A_\alpha) \cap D(A_\beta J)$. Очевидно, что при α, $\beta \in l_\infty$ оператор $A_{\alpha,\beta}$ ограничен и $\|A_{\alpha,\beta}\| \leqslant \|\alpha\|_\infty + \|\beta\|_\infty$.

Оператор $A_{\alpha,\beta} : D(A_{\alpha,\beta}) \subset l_p \to l_p$ действует по формуле $(A_{\alpha,\beta}x)(n) = \alpha(n)x(n) + \beta(n)x(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и в стандартном базисе пространства $l_p, p \in [1, \infty)$, имеет матрицу $A_{\alpha,\beta} \sim (a_{ij})$, i, $j \in \mathbb{Z}$, где $a_{ii} = \alpha(i)$, $a_{i,-i} = \beta(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $a_{0,0} = \alpha(0) + \beta(0)$, а остальные элементы равны нулю.

В работе изучается обратимость, найден спектр, иследуется коммутируемость двух операторов такого вида, а также локализация спектра самосопряженного оператора $A_{\alpha,\beta}$ при его возмущении оператором Гильберта-Шмидта. Отметим, что операторы I и J, где J определен формулой (4), также принадлежат $\mathcal{M}$, так как $I = A_{e,0} = eI + 0J$, $J = A_{0,e} = 0I + eJ$, где символом $e : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ обозначена единичная последовательность, т.е. $e \in l_\infty, e(n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, а символом 0 — нулевая. В работе отдельно рассматриваются свойства операторов $A_{0,e}$ и $A_{e,e}$, выписывается $exp(A_{e,e})t$ и приводятся условия на последовательность $\beta \in l_\infty$, при которых оператор $A_{0,\beta}$ будет инволюцией, но уже не простейшей.

Необходимость изучения оператора $A_{\alpha,\beta}$ возникает, например, при исследовании системы дифференциально-разностных [9] уравнений $u'(t) = A_{\alpha,\beta}u(t) + f(t)$, где $u : \mathbb{R} \to l_p$, $u(0) = u_0$, $u_0 \in l_p$, $f : \mathbb{R} \to l_p$.

Приведем еще один пример возникновения такого оператора. Оператор вида $A_{\alpha,\beta} - B$, где B — ограниченный оператор, возникает при дискретизации оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом с инволюцией.

Оператор $A_{\alpha,\beta}$ с $\alpha, \beta \in l^\infty$, где хотя бы одна из последовательностей не является ограниченной, может быть частью более сложно устроенного оператора и играть роль невозмущенного оператора.

2. ОПЕРАТОР J В АБСТРАКТНОМ БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{X}$

Вначале опишем свойства оператора инволюции в абстрактном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Непосредственно из определения 1 вытекает обратимость оператора J и равенство $J^{-1} = J$. Из (3) немедленно следует, что спектр $\sigma(J)$ оператора J такой, что $\sigma(J) \subseteq \{-1, 1\}$. Так как мы рассматриваем нетривиальные инволюции, то $\sigma(J) = \{-1, 1\}$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство. Вектор $x \in \mathcal{X}$ назовем четным, если $Jx = x$. Вектор $x \in \mathcal{X}$ назовем нечетным, если $Jx = -x$.

Четный вектор иногда будем обозначать x_+, нечетный — x_-. При $\mathcal{X} = l_p$, $p \in [1, \infty]$, и J определенным формулой (4), определение 2 совпадает с определением четной и нечетной последовательностей.

Обозначим через $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ соответственно подпространства четных и нечетных векторов из $\mathcal{X}$. Очевидно, что собственному значению -1 отвечает $\mathcal{X}_-$, а собственному значению 1 — $\mathcal{X}_+$. Перейдем к оператору $I + J$. Из определения 2 вытекает, что $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ — замкнутые подпространства и пространство $\mathcal{X}$ представимо в виде их прямой суммы

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \bigoplus \mathcal{X}_-. \tag{5}$$

Введем два оператора P_+, $P_- \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ формулами

$$P_+ = \frac{I+J}{2}, \qquad P_- = \frac{I-J}{2}.$$

Из общих фактов спектральной теории непосредственно следует

Лемма 1. *Операторы P_+ и P_- обладают свойствами:*
1) P_+ и P_- — проекторы;
2) $P_+ + P_- = I$, $P_+P_- = 0$;
3) $JP_+ = P_+$, $JP_- = -P_-$;
4) $J = P_+ - P_-$ (спектральное разложение оператора J);
5) $\operatorname{Im} P_+ = \mathcal{X}_+$, $\operatorname{Im} P_- = \mathcal{X}_-$.

Таким образом, есть два проектора, осуществляющих разложение пространства $\mathcal{X}$ в прямую сумму (5).

Перейдем к оператору $I + J$. Он обладает следующими свойствами:
1) $\sigma(I + J) = \{2, 0\}$;
2) $\operatorname{Im}(I + J) = \mathcal{X}_+$;
3) $\operatorname{Ker}(I + J) = \mathcal{X}_-$;

Очевидно, что операторы I и J перестановочны, $e^I = eI$. Поэтому $e^{I+J} = e \cdot e^J$, где

$$e^J = I\Big(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots\Big) + J\Big(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots\Big) = \frac{1}{2}\Big(I(e + e^{-1}) + J(e - e^{-1})\Big)$$

и

$$e^{Jt} = \operatorname{ch} tI + \operatorname{sh} tJ, \qquad e^{(I+J)t} = e^t \operatorname{ch} tI + e^t \operatorname{sh} tJ.$$

Далее везде в статье под оператором инволюции мы будем понимать именно простейший оператор инволюции, действующий в пространстве l_p, $p \in [1, \infty)$, по формуле (2) и его обозначать через J. Кроме указанных выше свойств он в пространстве l_2 обладает еще и следующими:
1) $J^* = J$, $J^{-1} = J^*$;
2) $(I + J)^* = I + J$.

Простейший оператор инволюции J является далеко не единственным оператором инволюции (в смысле определения 1), действующим в l_p, $p \in [1, \infty)$. Непосредственная проверка выполнения равенства (3) показывает, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для любой последовательности $\beta \in l^\infty$ такой, что $|\beta(n)| \geqslant \varepsilon > 0$ для всех $n \neq 0$, $\beta(0) = 1$, и $\beta(-n) = 1/\beta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, оператор βJ является инволюцией.*

Подчеркнем, что для оператора βJ из леммы 2 выполняется лемма 1 и его спектр, как и спектр любого нетривиального оператора инволюции, есть множество $\{-1, 1\}$. В стандартном базисе пространства l_p, $p \in [1, \infty)$, оператор βJ, определенный в лемме 2, имеет матрицу только с одной ненулевой побочной диагональю, причем $b_{n,-n} = \beta(n)$, $b_{0,0} = 1$, $\beta_{-n,n} = 1/\beta(n)$, $n \in \mathbb{N}$. К подпространству X_+ относятся, например, векторы, где на $(-n)$-ом месте стоит единица, на n-ом месте $\beta(n)$, $n \in \mathbb{N}$, а остальные координаты нулевые. А к X_- — векторы, у которых на $(-n)$-ом месте стоит -1, на n-ом месте $\beta(n)$, $n \in \mathbb{N}$, а остальные координаты нулевые.

Инволюция βJ не является самосопряженным оператором. Очевидно, что оператор $(\beta J)^*$ также является инволюцией и операторы βJ и $(\beta J)^*$ не перестановочны. Отметим еще одно очевидное свойство. Если D_1 и D_2 — два некоммутирующих оператора инволюции, то $(D_1D_2)^{-1} = D_2D_1$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРА $A_{\alpha,\beta}$

Напомним, что символом J теперь обозначена простейшая или стандартная инволюция, т. е. J действует по формуле (4). Далее используется очевидное свойство оператора J: $J(\alpha x) = (J\alpha)(Jx)$ и вместо $\alpha(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, иногда будем писать $J\alpha$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha, \beta \in l_\infty$. Тогда множество $\mathcal{M}$ является подалгеброй с единицей алгебры $End\mathcal{X}$.*

Доказательство. Линейность $\mathcal{M}$ очевидна, $I = A_{e,0} \in \mathcal{M}$. Также непосредственный подсчет показывает, что $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'} = A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha}(n) &= \alpha(n)\alpha'(n) + \beta(n)\beta'(-n), \\ \widetilde{\beta}(n) &= \alpha(n)\beta'(n) + \beta(n)\alpha'(-n), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, лемма доказана. □

Замечание 1. Очевидно, что $\mathcal{M}$ — некоммутативная подалгебра.

Замечание 2. Равенства (6) можно записать в виде

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha} &= \alpha\alpha' + \beta J\beta', \\ \widetilde{\beta} &= \alpha\beta' + \beta J\alpha'. \end{cases}$$

Замечание 3. Пусть $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in l^\infty$, тогда для оператора $A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}} = A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'}$ с областью определения $D(A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}) = \{x \in D(A_{\alpha',\beta'}); A_{\alpha',\beta'}x \in D(A_{\alpha,\beta})\}$, последовательности $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ также определяются формулами (6).

Перечислим еще очевидные свойства операторов A_α и $A_{\alpha,\beta}$, которые, опять же, удобно оформить в виде леммы.

Лемма 4. *Операторы A_α, A_β и $A_{\alpha,\beta}$ обладают свойствам:*

1) если $\beta \in l^\infty_+$ (четная последовательность), $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, то операторы A_β и J коммутируют, $A_\beta J = JA_\beta$;

2) если α, $\beta \in l^\infty_+$, $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, то операторы A_α и $A_\beta J$ коммутируют;

3) в пространстве l_2 имеем $A^*_{\alpha,\beta} = A_{\overline{\alpha}} + JA_{\overline{\beta}}$;

4) $A_{\alpha,\beta} = A^*_{\alpha,\beta}$ в пространстве l_2, если $\alpha, \beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ и α, $\beta \in l^\infty_+$.

Опишем условия коммутирования двух операторов $A_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}$ и $A_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{M}$, при условии, что операторы $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'}$ и $A_{\alpha',\beta'}A_{\alpha,\beta}$ корректно определены.

Лемма 5. *Операторы $A_{\alpha,\beta}$ и $A_{\alpha',\beta'}$ коммутируют, если выполнены равенства*

$$\begin{cases} \beta' J\beta = \beta J\beta', \\ J\beta(\alpha' - J\alpha') = J\beta'(\alpha - J\alpha). \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. Из (6) следует, что для коммутирования операторов $A_{\alpha,\beta}$ и $A_{\alpha',\beta'}$ должны быть выполнены равенства

$$\begin{cases} \alpha\alpha' + \beta J\beta' &= \alpha\alpha' + \beta' J\beta, \\ \alpha\beta' + \beta J\alpha' &= \alpha'\beta + \beta' J\alpha, \end{cases}$$

откуда и получаются равенства (7). □

Для любой последовательности $\alpha \in l^\infty$ введем множество ее нулей $Z(\alpha) = \{n \in \mathbb{Z} : \alpha(n) = 0\}$.

В терминах $Z(\alpha)$ мы будем формулировать условие обратимости.

Теорема 1. *Оператор $A_{\alpha,\beta}$ обратим тогда и только тогда, если*

$$Z(\alpha J\alpha - \beta J\beta) = \varnothing \tag{8}$$

и $\alpha(n)\alpha(-n) - \beta(n)\beta(-n) \geqslant \varepsilon > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обратным к $A_{\alpha,\beta}$ в этом случае является оператор $A^{-1}_{\alpha,\beta} = A_{\alpha',\beta'}$, где

$$\begin{cases} \alpha'(n) = \dfrac{\alpha(-n)}{\alpha(n)\alpha(-n) - \beta(n)\beta(-n)}, \\ \beta'(n) = -\dfrac{\beta(n)}{\alpha(n)\alpha(-n) - \beta(n)\beta(-n)}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{9}$$

Доказательство. Из (5) получим, что для выполнения равенства $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'} = I$ должны выполняться условия

$$\begin{cases} \alpha(n)\alpha'(n) + \beta(n)\beta'(-n) = 1, \\ \alpha(n)\beta'(n) + \beta(n)\alpha'(-) = 0, \end{cases}$$

откуда и вытекает условие (8) и формулы (9). Осталось показать, что равенства (6) выполнены, что легко сделать непосредственной подстановкой. Теорема доказана. $\square$

Напомним следующее определение

Определение 3. [10] Подалгебра $\mathcal{B}$ с единицей из $End\mathcal{X}$ называется наполненной в $End\mathcal{X}$, если каждый обратимый в $End\mathcal{X}$ оператор обратим также и в $\mathcal{B}$.

Следствие 1. *Пусть $\alpha, \beta \in l_\infty$. Пространство $\mathcal{M}$ есть наполненная банахова алгебра.*

Перейдем к нахождению спектра оператора $A_{\alpha,\beta} : D(A_{\alpha,\beta}) \subset l_2 \to l_2$, α, $\beta \in l^\infty$. Воспользуемся идеями замены, предложенными в [11], [12] для перехода от оператора инволюции к оператору Дирака и в [13] при исследовании интегральных операторов с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов.

Каждой последовательности $x \in l_2$ поставим в соответствие последовательность $\overline{x} \in l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$, определенную формулой $\overline{x}(n) = \{x(n), x(-n)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $U : l_2 \to l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$, $Ux = \overline{x}$. Введем оператор $\widetilde{B}_{\alpha,\beta}$, который связан с оператором $A_{\alpha,\beta}$ соотношением $\widetilde{B}_{\alpha,\beta} = UA_{\alpha,\beta}U^{-1}$.

Непосредственным подсчетом доказывается

Лемма 6. *Оператор $A_{\alpha,\beta}$ унитарно эквивалентен оператору $\widetilde{B}_{\alpha,\beta} : l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2) \to l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ определенному по формуле*

$$(\widetilde{B}_{\alpha,\beta}x)(n) = \begin{pmatrix} \alpha(n) & \beta(n) \\ \beta(-n) & \alpha(-n) \end{pmatrix} \overline{x}(n) = Q(n)\overline{x}(n), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

Итак, $\sigma(\widetilde{B}_{\alpha,\beta}) = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+}\sigma(Q(n))$ и далее необходимо вычислить собственные значения матриц второго порядка $Q(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, что не составляет труда.

Из представления (10) вытекает

Лемма 7. *Спектр оператора $A_{\alpha,\beta}$ есть замыкание множества чисел*

$$\left\{ \alpha(0) + \beta(0),\ \frac{\alpha(n) + \alpha(-n) \pm \sqrt{(\alpha(n) + \alpha(-n))^2 - 4\beta(n)\beta(-n)}}{2}; \quad n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{11}$$

Важно подчеркнуть, что в лемме 7 не предполагается ограниченность последовательностей α, β.

4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА

Возмутим $A_{\alpha,\beta}$ оператором $B \in Endl_2$, принадлежащим двустороннему операторному идеалу операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(l_2)$ с нормой $||B||_2$. Для исследования возмущенного оператора применим теоремы из [14] – [15], касающиеся локализации спектра возмущенного самосопряженного оператора.

Теорема 2. *Пусть $A_{\alpha,\beta} = A^*_{\alpha,\beta}$ и $B \in \sigma_2(l_2)$. Тогда существует такая четная вещественная непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, суммируемая с квадратом на $\mathbb{R}$, что для $\lambda \in \sigma(A_{\alpha,\beta} - B)$ выполняется неравенство $|Im\lambda| \leqslant f(Re\lambda)$.*

Другими словами, $\sigma(A_{\alpha,\beta} - B)$ находится между графиками функций f и $-f$. Обозначим через E_n спектральные проекторы оператора $A_{\alpha,\beta}$, построенные по интервалам $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, и обозначим $B_n = B - E_nBE_n$. Опием алгоритм построения графика функции f. Возмем точки с координатами $(\pm(1 + 2\|B\|_2), 2\|B\|_2)$, $(\pm(n + 2\|B\|_2), 3\|B_n\|_2)$, $n \in \mathbb{N}$, и соединяются ломаной линией. Этот алгоритм построения функции f из теоремы 2 предложен в работах [14] – [15].

Из теоремы о локализации спектра возмущенного самосопряженного оператора можно получить и другие результаты, которые удобно оформить в виде следствий теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть последовательность $\alpha \in l^\infty$ вещественна, $\beta \in l_2$ и $B \in \sigma_2(l_2)$. Тогда существует четная непрерывная вещественная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, суммируемая с квадратом на $\mathbb{R}$, что для всех $\lambda \in \sigma(A_{\alpha,\beta} - B)$ выполняется неравенство $|Im\lambda| \leqslant f(Re\lambda)$.*

Следствие 3. *Пусть последовательность $\beta \in l^\infty_+$ вещественна, $\alpha \in l_2$, $B \in \sigma_2(l_2)$. Тогда существует четная непрерывная вещественная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, суммируемая с квадратом на $\mathbb{R}$, что для всех $\lambda \in \sigma(A_{\alpha,\beta} - B)$ выполняется неравенство $|Im\lambda| \leqslant f(Re\lambda)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

2. Бурлуцкая, М. Ш. Некоторые свойства функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $v(x) = 1 - x$ и их приложения / М. Ш. Бурлуцкая // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2021. — № 5 — С. 89–97.

3. Андреев, А. А. О корректности начальных краевых задач для одного гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением / А. А. Андреев, Е. Н. Огородников // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки — 2000. — № 9. — С. 32–36.

4. Крицков, Л. В. Базисность Рисса системы корневых функций для операторов второго порядка с инволюцией / Л. В. Крицков, А. М. Сансерби // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 1. — С. 35–48.

5. Бурлуцкая, М. Ш. Вопросы спектральной теории для операторов с инволюцией и приложения / М. Ш. Бурлуцкая. — Воронеж : Научная книга, 2020. — 224 с.

6. Владыкина, В. Е. Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией / В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов // Докл. РАН. — 2019. — Т. 484, № 1. — С. 12–17.

7. Карапетянц, Н. К. Сингулярные интегральные операторы со сдвигом Карлемана в случае кусочно-непрерывных коэффициентов. I / Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко // Известия вузов. Математика. — 1975. — № 2 (153). — С. 43–54.

8. Carleman, P. Sur la theorie des equations integrales et ses application / P. Carleman // Verh. Int. Mathem. Kongress. Zurich. — 1932. — P. 138–152.

9. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.

10. Бурбаки, Н. Спектральная теория / Н. Бурбаки. — М. : Мир, 1972. — 184 с.

11. Хромов, А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператор с инволюцией / А. П. Хромов, Л. П. Кувардина // Изв. вузов. Матем. — 2008. — № 5. — С. 67–76.

12. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов, А. С. Луконина, А. П. Хромов // Докл. РАН. — 2007. — Т. 414, № 4. — С. 443–446.

13. Пальчиков, А. Н. Спектральный анализ интегральных операторов с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов / А. Н. Пальчиков // Изв. вузов. Матем. — 1990. — № 3. — С. 80–83.

14. Баскаков, А. Г. О спектральных свойствах оператора Дирака на прямой / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 153–161.

15. Баскаков, А. Г. О спектральных свойствах классических операторов Дирака и операторов с инволюцией в однородных пространствах функций / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 10. — С. 1299–1304.

16. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры II / А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Прикладная математика & Физика. — 2021. — Т. 53, № 3. — С. 205–212.

REFERENCES

1. Baskakov A.G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovanie linejnyh differencial'nyh uravnenij metodami spektral'noj teorii raznostnyh operatorov i linejnyh otnoshenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 77–128.

2. Burlutskaya M.Sh. Some properties of functional-differential operators with involution $v(x) = 1 - x$ and their applications. [Burluckaya M.SH. Nekotorye svojstva funkcional'no-differencial'nyh operatorov s involyuciej $v(x) = 1 - x$ i ih prilozheniya]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2021, no. 5, pp. 89–97.

3. Andreev A.A., Ogorodnikov E.N. On the well-posedness of initial boundary value problems for a hyperbolic equation with order degeneration and involutive deviation. [Andreev A.A., Ogorodnikov E.N. O korrektnosti nachalnykh kraevykh zadach dlya odnogo giperbolicheskogo uravneniya s vyrozhdeniem poryadka i involyutivnym otkloneniem]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki — Vestnik of Samara state technical University. Series: physics and mathematics*, 2000. no. 9, pp. 32–36

4. Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution. [Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Bazisnost' Rissa sistemy kornevyh funkcij dlya operatorov vtorogo poryadka s involyuciej]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 35–48.

5. Burlutskaya M.Sh. Questions of spectral theory for operators with involution and applications. [Burlutskaya M.Sh. Voprosi spektral'noy teorii dlya operatorov s involyutsiyey]. Voronezh: Scientific book, 2020, 224 p.

6. Vladykina V.E., Shkalikov A.A. Spectral Properties of Ordinary Differential Operators with Involution. [Vladykina V.E., Shkalikov A.A. Spektral'nye svojstva obyknovennyh differencial'nyh operatorov s involyuciej]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2019, vol. 484, no. 1, pp. 12–17.

7. Karapetyants N.K., Samko S.G. Singular integral operators with Carleman shift in the case of piecewise continuous coefficients. I, II. [Karapetyants N.K., Samko S.G. Singulyarnye integral'nye operatory so sdvigom Karlemana v sluchae kusochno-nepreryvnyh koefficientov. I]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1975, № 2 (153), pp. 43–54.

8. Carleman P. Sur la theorie des equations integrales et ses application. Verh. Int. Mathem. Kongress. Zurich, 1932, pp. 138–152.

9. Beilman R., Cooke K.L. Differential-difference equations. [Bellman R., Kuk K.L. Differencial'no-raznostnye uravneniya]. Moscow: Mir, 1967, 548 p.

10. Bourbaki N. Spectral theory. [Burbaki N. Spektral'naya teoriya]. Moscow: Mir, 1972, 184 p.

11. Khromov A.P., Kuvardina L.P. On the equiconvergence of expansions in eigen- and associated functions of an integral operator with involution. [Khromov A.P., Kuvardina L.P. O ravnoskhodimosti razlozhenij po sobstvennym funkciyam integral'nogo operator s involyuciej]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2008, no. 5, pp. 67–76.

12. Burlutskaya M.Sh., Kurdyumov V.P., Lukonina A.S., Khromov A.P. A functional-differential operator with involution. [Burlutskaya M.Sh., Kurdyumov V.P., Lukonina A.S., Khromov A.P. Funktsional'no-differentsial'nyy operator s involyutsiyey]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2007, vol. 414, no. 4, pp. 443–446.

13. Pal'chikov A.N. Spectral analysis of integral operators with a kernel that depends on the difference and the sum of arguments. [Pal'chikov A.N. Spektral'nyj analiz integral'nyh operatorov s yadrom, zavisyashchim ot raznosti i summy argumentov]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1990, no. 3, pp. 80–83.

14. Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. Spectral properties of the dirac operator on the real line. [Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. O spektral'nyh svojstvah operatora Diraka na pryamoj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 153–161.

15. Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. Spectral properties of classical Dirac operators and operators with involution in homogeneous function spaces. [Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. O spektral'nyh svojstvah klassicheskih operatorov Diraka i operatorov s involyuciej v odnorodnyh prostranstvah funkcij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 10, pp. 1299–1304.

16. Baskakov A.G., Garkavenko G.V., Krishtal I.A., Uskova N.B. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Examples II. [Baskakov A.G., Garkavenko G.V., Krishtal I.A., Uskova N.B. Metod podobnih operatorov v spektralnom analise operatornih beskonechnih matric. Primer II]. *Prikladnaya matematika & Fizika — Applied Mathematics & Physics*, 2021, vol. 53, no. 3, pp. 205–212.

Баскаков Анатолий Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Baskakov Anatoly, Professor, Department of System Analysis and Control, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики, информационных технологий и цифрового образования, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Garkavenko Galina, Associate Professor, Department of Informatics, Information Technology and Digital Education, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: nat-uskova@mail.ru

Uskova Natalia, Associate Professor, Department of Higher Mathematics and Physical and Mathematical Modeling, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: nat-uskova@mail.ru