УДК 517.9, 519.6

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

О. П. Барабаш

Воронежский Государственный Университет

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Аннотация. Работа посвящена реализации метода Ритца для обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения с оператором Бесселя. Рассматриваемое в работе уравнение относится к классу так называемых B-эллиптических уравнений. Приближенное решение находится в виде линейной комбинации кусочно-непрерывных финитных функций. Возникающая при этом система уравнений имеет разреженную матрицу.

Ключевые слова: оператор Бесселя, B–эллиптические уравнения, вариационное исчисление, метод Ритца, финитные функции, проекционный метод, проекционно-сеточный метод, метод прогонки.

SOME FEATURES OF THE IMPLEMENTATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR A SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATION

O. P. Barabash

Abstract. The work is devoted to the implementation of the Ritz method for an ordinary singular differential equation with a Bessel operator. The equation considered in the paper belongs to the class of so-called B-elliptic equations. The approximate solution is found in the form of a linear combination of piecewise continuous finite functions. The resulting system of equations has a sparse matrix.

Keywords: Bessel operator, B-elliptic equations, calculus of variations, Ritz method, finite functions, projection method, projection-grid method, sweep method.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мощным инструментом решения задач математической физики выступают вариационные методы [1]. Суть таких методов заключается в формулировке задачи отыскания функции, доставляющей экстремум некоторому функционалу, с дальнейшим нахождением приближения к этой функции [2].

В методе Ритца решение определяется в виде линейной комбинации системы базисных функций $Z_N = \sum a_i z_i$, в которой неизвестные коэффициенты a_i ищутся из условия минимума заданного функционала [3]. Недостатком такого подхода является отсутствие возможности сопоставления каждой дифференциальной задачи с соответствующим ей функционалом. Вариационная формулировка может быть точно установлена лишь для некоторых уравнений, например, уравнений Лапласа, Пуассона [4].

Обойти эту проблему позволяет проекционный метод Галеркина. Как и в методе Ритца решение ищется в виде линейной комбинации базисных функций, подстановка которой в дифференциальное уравнение, приводит к появлению невязки. Коэффициенты a_i ищутся из условия ортогональности невязки δ_N всем базисным функциям: $[\delta_N, z_i] = 0$, $i = 1,..,N$.

Методы, базирующиеся на ортогональности невязки системе базисных функций, называются проекционными. Если же базисные функции строятся на конечном разбиении рассматриваемой области, то метод носит название проекционно-сеточного.

На сегодняшний день задача приближенного решения сингулярных уравнений остается актуальной. Хорошо изучены такие вопросы для регулярных краевых задач с невырожденными уравнениями, имеющими гладкие коэффициенты. В статье Ю. Л. Гусмана и А. А. Оганесяна [5] развит вариационно-разностный подход для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\mu}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + qu = f(x,y)$$

при условии $0 \leqslant \mu < 1$. Получены точные по порядку оценки погрешности метода.

В. В. Катрахов и А. А. Катрахова [6] рассмотрели вопрос о сходимости метода Галеркина для задачи с модельным примером

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + qu = f(x,y),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ u|_{\Gamma_+} = 0,$$

где $\Gamma_+ = \partial\Omega^+ \backslash \{(x,y) : x = 0\}, \Omega^+ \subset R^2_+$.

Можно назвать ряд других работ, в которых рассматриваются сингулярные краевые задачи [7]–[8]. Однако целью большинства из них является исследование сходимости приближенных методов решения, в то время как вопрос численной реализации второстепенен.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем задачу нахождения на $\Omega = (0,1)$ функции $u(x)$, которая удовлетворяет B-эллиптическому уравнению

$$-x^{-\gamma}\frac{d}{dx}\left(x^{\gamma}p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \tag{1}$$

и краевым условиям

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = 0, u(1) = 0. \tag{2}$$

Изучение подобных уравнений восходит к работам И. А. Киприянова, Я. И. Житомирского [9, 10].

Функции $p(x) \in C^1[0,1]$, $q(x) \in C[0,1]$, $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $p_0 = \text{const}$, $f \in H = L_{2,\gamma}(0,1)$. Параметр $\gamma > 0, \gamma \neq 1$.

Будем рассматривать задачу (1)–(2) в гильбертовом простанстве $L_{2,\gamma}(0,1)$ функций, для которых конечна норма, в виде операторного уравнения

$$Lu = f, \tag{3}$$

где оператор L:

$$Lu = -x^{-\gamma}\frac{d}{dx}\left(x^{\gamma}p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u.$$

При этом будем исходить из понятия слабого решения. Для этого нам потребуются весовые пространства Соболева, называемые теперь пространствами Киприянова.

Весовые пространства $H_\gamma^m(0,1)$ (пространства И.А. Киприянова) определяются как замыкание класса $C^\infty_{\text{чет}}([0,1]) \subset C^\infty([0,1])$, состоящего из четных функций по норме

$$\|f\|_{m,\gamma} = \left(\sum_{\substack{0\leqslant i_1+2i_2\leqslant m \\ i=0,1}} \int\limits_0^1 x^\gamma \left| D_x^{i_1} B_x^{i_2} f(x) \right|^2 \right)^{1/2},$$

где $D_x = \frac{d}{dx}$,$B_x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}$ — оператор Бесселя.

Для рассматриваемого пространства $L_{2,\gamma}(0,1)$ скалярное произведение и норма задаются следующими соотношениями

$$(u,v)_{L_{2,\gamma}} = \int\limits_0^1 x^\gamma u(x)v(x)\,dx,$$

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}} = \left(\int\limits_0^1 x^\gamma f^2(x)\,dx \right)^{1/2}.$$

Умножим (3) скалярно в $L_{2,\gamma}$ на функцию v из пространства Соболева $H_\gamma^1[0,1] = W_{2,\gamma}^1[0,1]$, удовлетворяющую краевым условиям (2):

$$(Lu,v)_{L_{2,\gamma}} = -\int\limits_0^1 \left(x^\gamma x^{-\gamma} \frac{d}{dx} \left(x^\gamma p(x) \frac{du}{dx} \right) v + x^\gamma q(x) uv \right) dx = \int\limits_0^1 x^\gamma f v\,dx.$$

После применения интегрирования по частям:

$$-x^\gamma p \frac{du}{dx} v \Big|_0^1 + \int\limits_0^1 x^\gamma \left(p(x) \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + q(x)uv \right) dx = \int\limits_0^1 x^\gamma f v dx.$$

Внеинтегральный член $-x^\gamma p \frac{du}{dx} v\big|_0^1 = 0$ в силу краевых условий. В результате получим

$$\int\limits_0^1 x^\gamma \left(p(x) \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + q(x)uv \right) dx = \int\limits_0^1 x^\gamma f v dx. \tag{4}$$

Равенство (4) лежит в основе определения слабого решения задачи (1)-(2). Обозначим $\dot{H}_\gamma^1[0,1]$ подпространство пространства $H_\gamma^1[0,1]$ всех функций, удовлетворяющих краевым условиям (2). Слабым решением задачи (1)-(2) будем называть функцию $u \in \dot{H}_\gamma^1[0,1]$, которая для любой функции $v \in \dot{H}_\gamma^1[0,1]$, удовлетворяет равенству (4).

Приближение слабого решения задачи будем искать в виде $u_h = \sum\limits_{i=0}^n a_i \varphi_i$, где$\varphi_i$- базисные функции. Потребуем, чтобы такая линейная комбинация удовлетворяла краевым условиям задачи, т.е. $\frac{du_h}{dx}\Big|_{x=0} = 0$,$u_h(1) = 0$. Запишем соответствующее данным требованиям решение

$$u_h = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \varphi_i \tag{5}$$

Подставляя сумму (5) в (4), получим

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \int\limits_{\Omega_{ij}} x^\gamma \left(p(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} + q(x)\varphi_i\varphi_j \right) dx = \int\limits_{\Omega_{ij}} x^\gamma f \varphi_j dx, j = \overline{1,n-1}.$$

Введем обозначения

$$W_{ij} = \int\limits_{\Omega_{ij}} x^\gamma \left(p(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} + q(x)\varphi_i\varphi_j \right) dx,$$

$$F_j = \int\limits_{\Omega_{ij}} x^\gamma f \varphi_j dx, j = \overline{1,n-1},$$

$$\Omega_{ij} = (0,1) \bigcup \operatorname{supp} \varphi_i \operatorname{supp} \varphi_j, \quad \Omega_j = (0,1) \bigcup \operatorname{supp} \varphi_j.$$

Тогда поиск неизвестных коэффициентов a_i осуществляется из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i W_{ij} = F_j, j = 1,..,n-1. \tag{6}$$

3. ВЫБОР БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Для аппроксимации $u(x)$ введем на [0,1] сетку $0 = x_0 < x_1 < .. < x_{n-1} < x_n = 1$, $i = \overline{1,n}$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $h = \max\limits_i h_i$. В качестве базисных функций $\{\varphi_i\}$ [11] выберем финитные функции из предположения, что

$$x^{-\gamma} \frac{d}{dx} \left(x^\gamma \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0.$$

Отсюда $\varphi = C_1 x^{1-\gamma} + C_2$.

Каждому узлу сетки x_i поставим в соответствие кусочную функцию с носителем из (x_{i-1},x_{i+1}), такую что $\varphi(x_i) = 1, \varphi(x_{i-1}) = \varphi(x_{i+1}) = 0$. Определим вид такой функции на (x_{i-1},x_i):

$$\begin{cases} \varphi_i(x_{i-1}) = C_1 x_{i-1}^{1-\gamma} + C_2 = 0, \\ \varphi_i(x_i) = C_1 x_i^{1-\gamma} + C_2 = 1. \end{cases}$$

Из системы находим

$$\varphi_i(x) = \frac{x^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}{x_i^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}, x \in (x_{i-1},x_i).$$

Аналогично находим вид базисной функции для правого интервала. В конечном итоге

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}{x_i^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}, x \in (x_{i-1},x_i), \\ \frac{x_{i+1}^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}}{x_{i+1}^{1-\gamma} - x_i^{1-\gamma}}, x \in (x_i,x_{i+1}), \\ 0, x \notin (x_{i-1},x_{i+1}), i = \overline{1,n-1}. \end{cases} \tag{7}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, x \in (x_0,x_1), \\ 0, x \notin (x_0,x_1). \end{cases}, \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma} - x_{n-1}^{1-\gamma}}{x_n^{1-\gamma} - x_{n-1}^{1-\gamma}}, x \in (x_{n-1},x_n), \\ 0, x \notin (x_{n-1},x_n). \end{cases} \tag{8}$$

С помощью техники интерполяции в функциональных пространствах доказывается следующий результат.

Теорема. Пусть $u(x)$ — слабое решение задачи (1)–(2), $u_h(x)$ — его приближение по Ритцу. Функция $f \in L_{2,\gamma}(0,1)$. Тогда справедлива следующая оценка погрешности метода Ритца:

$$\|u - u_h\|_{H^1_\gamma(0,1)} \leqslant ch\,\|f\|_{L_{2,\gamma}(0,1)}\,,$$

где c не зависит от f,u,h.

4. НАХОЖДЕНИЕ ВИДА МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ

Линейную оболочку $\{\varphi_i\}$обозначим H_n. Возьмем $v_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i \in H_n$, тогда $v_n(x_i) = a_i$, что означает равенство коэффициента a_i значению функции $v_n(x)$ в узле сетки x_i.

Необходимо отметить, что для базисных функций, заданных в виде (7)-(8), скалярное произведение в пространстве $L_{2,\gamma}(\Omega)$ отлично от 0 только для соседних функций:

$$\int\limits_{\Omega_{ij}} x^\gamma \varphi_i\varphi_j dx \begin{cases} = 0, |i-j| > 1, \\ \neq 0, |i-j| \leqslant 1. \end{cases}$$

Данное свойство обеспечивает разреженность матрицы $\widehat{W}_{ij}$ системы уравнений (6).

Найдем вид этой матрицы в явном виде. Для этого нам необходимо вычислить элементы $W_{j-1,j}$,$W_{j,j}$,$W_{j+1,j}$:

$$W_{ij} = \int\limits_{\Omega_{ij}} x^\gamma \left(p(x)\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} + q(x)\varphi_i\varphi_j \right) dx, i = j-1, j, j+1.$$

Подробно рассмотрим случай $i = j - 1$. Пусть$p(x)$,$q(x)$- кусочно- постоянные функции с конечным числом разрывов, совпадающих с узлами сетки, $p_{i-1/2} = p(x)$,$q_{i-1/2} = q(x)$ при $x \in (x_{i-1},x_i)$,$i = 1,..,n$. Базисные функции φ_{j-1}и φ_j пересекаются лишь на интервале (x_{j-1},x_j), поэтому элемент $W_{j-1,j}$ ищется по формуле

$$W_{j-1,j} = \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma p\frac{d\varphi_{j-1}}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma q\varphi_{j-1}\varphi_j dx, \tag{9}$$

где

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma p\frac{d\varphi_{j-1}}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \frac{p_{j-1/2}(1-\gamma)(\gamma-1)}{\left(x_j^{1-\gamma} - x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^{-\gamma}dx = \frac{p_{j-1/2}(\gamma-1)}{x_j^{1-\gamma} - x_{j-1}^{1-\gamma}}.$$

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma q\varphi_{j-1}\varphi_j dx = \frac{q_{j-1/2}}{\left(x_j^{1-\gamma} - x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma (x_j^{1-\gamma} - x^{1-\gamma})(x^{1-\gamma} - x_{j-1}^{1-\gamma})dx =$$

$$= \frac{q_{j-1/2}}{\left(x_j^{1-\gamma} - x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{(x_j^{3-\gamma} - x_{j-1}^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)} + \frac{(\gamma-1)(x_j^2 x_{j-1}^{1-\gamma} - x_{j-1}^2 x_j^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right).$$

Для случая $i = j$ интегрирование ведется по двум интервалам.

$$W_{j,j} = \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma p\frac{d\varphi_j}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma q\varphi_j\varphi_j dx + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma p\frac{d\varphi_j}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma q\varphi_j\varphi_j dx. \tag{10}$$

Для левого интервала (x_{j-1},x_j):

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma p \frac{d\varphi_j}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \frac{p_{j-1/2}(1-\gamma)^2}{\left(x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^{-\gamma}dx = \frac{p_{j-1/2}(1-\gamma)}{x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}}.$$

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma q\varphi_j\varphi_j dx = \frac{q_{j-1/2}}{\left(x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} x^\gamma (x^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma})^2 dx =$$

$$= \frac{q_{j-1/2}}{\left(x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma} - \frac{x_{j-1}^{3-\gamma}(\gamma-1)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)} - x_{j-1}^{1-\gamma}x_j^2 + \frac{x_{j-1}^{2-2\gamma}x_j^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right).$$

Для правого интервала (x_j,x_{j+1}):

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma p \frac{d\varphi_j}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \frac{p_{j+1/2}(1-\gamma)^2}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^{-\gamma}dx = \frac{p_{j+1/2}(1-\gamma)}{x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}}.$$

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma q\varphi_j\varphi_j dx = \frac{q_{j+1/2}}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma (x_{j+1}^{1-\gamma}-x^{1-\gamma})^2 dx =$$

$$= \frac{q_{j+1/2}}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\left(-\frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma} + \frac{x_{j+1}^{3-\gamma}(1-\gamma)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)} + x_{j+1}^{1-\gamma}x_j^2 - \frac{x_{j+1}^{2-2\gamma}x_j^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right).$$

Для $i = j+1$ базисные функции φ_{j+1} иφ_j пересекаются лишь на интервале (x_j,x_{j+1}), поэтому элемент $W_{j+1,j}$ ищется по формуле

$$W_{j+1,j} = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma p\frac{d\varphi_{j+1}}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma q\varphi_{j+1}\varphi_j dx. \qquad (11)$$

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma p\frac{d\varphi_{j+1}}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \frac{-p_{j+1/2}(1-\gamma)^2}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^{-\gamma}dx = \frac{p_{j+1/2}(\gamma-1)}{x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}}.$$

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma q\varphi_{j+1}\varphi_j dx = \frac{q_{j+1/2}}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma (x_{j+1}^{1-\gamma}-x^{1-\gamma})(x^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma})dx =$$

$$= \frac{q_{j+1/2}}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{(x_{j+1}^{3-\gamma}-x_j^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)} + \frac{(\gamma-1)(x_{j+1}^2x_j^{1-\gamma}-x_j^2x_{j+1}^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right).$$

Введем обозначения

$$c_j = \left(\frac{(x_j^{3-\gamma}-x_{j-1}^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)} + \frac{(\gamma-1)(x_j^2x_{j-1}^{1-\gamma}-x_{j-1}^2x_j^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right),$$

$$a_j = \left(\frac{(x_{j+1}^{3-\gamma}-x_j^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)} + \frac{(\gamma-1)(x_{j+1}^2x_j^{1-\gamma}-x_j^2x_{j+1}^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right).$$

Нетрудно заметить, что элемент $a_1 = c_2$,$a_2 = c_3$,.., т. е. матрица имеет симметричный вид. На основе приведенных вычислений по формулам (9)–(11) запишем

$$\widehat{W} = (1-\gamma)\begin{pmatrix} \frac{p_{\frac{1}{2}}}{x_1^{1-\gamma}-x_0^{1-\gamma}} + \frac{p_{\frac{3}{2}}}{x_2^{1-\gamma}-x_1^{1-\gamma}} & -\frac{p_{\frac{3}{2}}}{x_2^{1-\gamma}-x_1^{1-\gamma}} & \\ -\frac{p_{\frac{3}{2}}}{x_2^{1-\gamma}-x_1^{1-\gamma}} & \ddots & \\ & & -\frac{p_{n-\frac{3}{2}}}{x_{n-1}^{1-\gamma}-x_{n-2}^{1-\gamma}} \\ & & \frac{p_{n-\frac{3}{2}}}{x_{n-1}^{1-\gamma}-x_{n-2}^{1-\gamma}} + \frac{p_{n-\frac{1}{2}}}{x_n^{1-\gamma}-x_{n-1}^{1-\gamma}} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{q_{3/2}}{\left(x_2^{1-\gamma}-x_1^{1-\gamma}\right)^2} b_1^2 + \frac{q_{1/2}}{\left(x_1^{1-\gamma}-x_0^{1-\gamma}\right)^2} b_1^1 & \frac{q_{3/2}}{\left(x_2^{1-\gamma}-x_1^{1-\gamma}\right)^2} a_1 & \\ \frac{q_{3/2}}{\left(x_2^{1-\gamma}-x_1^{1-\gamma}\right)^2} a_1 & & \\ & \ddots & \frac{q_{n-3/2}}{\left(x_{n-1}^{1-\gamma}-x_{n-2}^{1-\gamma}\right)^2} a_{n-2} \\ & & \frac{q_{n-1/2}}{\left(x_n^{1-\gamma}-x_{n-1}^{1-\gamma}\right)^2} b_{n-1}^2 + \frac{q_{n-3/2}}{\left(x_{n-1}^{1-\gamma}-x_{n-2}^{1-\gamma}\right)^2} b_{n-1}^1 \end{pmatrix},$$

где

$$b_j^1 = \left(\frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma} - \frac{x_{j-1}^{3-\gamma}(\gamma-1)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)} - x_{j-1}^{1-\gamma}x_j^2 + \frac{x_{j-1}^{2-2\gamma}x_j^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right),$$

$$b_j^2 = \left(-\frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma} + \frac{x_{j+1}^{3-\gamma}(1-\gamma)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)} + x_{j+1}^{1-\gamma}x_j^2 - \frac{x_{j+1}^{2-2\gamma}x_j^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right).$$

Полученная матрица является симметричной и положительной, а значит, существует единственны й набор a_i,$i = \overline{1,n-1}$, который составляет решение (5). Симметричная трехдигональная матрица системы уравнений позволяет применять экономичные алгоритмы, такие как метод прогонки [12].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный для сингулярной краевой задачи проекционно-сеточный метод приводит к простой вычислительной схеме с достаточно хорошей точностью.

Следует отметить, что при решении начально-краевых задач для уравнений диффузии $\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + f$ и распространения волн $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu + f$ вполне естественно ввести сетку по оси времени, и после аппроксимации производной по времени применять изложенную выше схему на каждом временном слое. Таким образом, изложенная схема может служить частью схемы для нестационарных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1970. — 510 с.

2. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1966. — 432 с.

3. Цлаф, Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справочное руководство / Л. Я. Цлаф. — Спб. : Лань, 2005. — 192 с.

4. Емельянов, В. Н. Введение в теорию разностных схем / В. Н. Емельянов. — Санкт–Петербург : БГТУ, 2006. — 191 с.

5. Гусман, Ю. А. Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений / Ю. А. Гусман, Л. А. Оганесян // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1965. — № 2. — С. 351–357.

6. Катрахов, В. В. Метод конечных элементов для некоторых вырождающихся эллиптических краевых задач / В. В. Катрахов, А. А. Катрахова // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 4. — С. 799–802.

7. Виноградова, Г. А. О решении сингулярной задачи вариационным методом / Г. А. Виноградова // Вестник факультета ПММ. — 2015. — № 10. — С. 39–42.

8. Катрахова, А. А. Сингулярные краевые задачи и приближенные методы их решения: специальность 01.01.02 “дифференциальные уравнения и математическая физика”: Диссертация на соискание кандидата физико-математических наук / Катрахова А. А.; Воронежский ордена Ленина государственный университет Ленинского комсомола. — Воронеж, 1982. — 129 с.

9. Киприянов, И. А. Краевые задачи сингулярных эллиптических операторов в частных производных / И. А. Киприянов // Доклады Академии наук. — 1970. — Т. 195, № 1. — С. 32–35.

10. Житомирский, Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя / Я. И. Житомирский // Матем. сб. — 1955. — № 6(78):2. — С. 299–310.

11. Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.

12. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1989. — 432 с.

REFERENCES

1. Mikhlin S.G. Variational methods in mathematical physics. [Mihlin S.G. Variacionnye metody v matematicheskoj fizike]. Moscow: Nauka, 1970, 510 p.

2. Mikhlin S.G. Numerical implementation of variational methods. [Mihlin S.G. CHislennaya realizaciya variacionnyh metodov]. Moscow: Nauka, 1966, 432 p.

3. Tslaf L.Ya. Calculus of variations and integral equations. [Claf L.YA. Variacionnoe ischislenie i integral’nye uravneniya]. St. Petersburg: Lan, 2005, 192 p.

4. Emelyanov V.N. Introduction to the theory of difference schemes. [Emel’yanov V.N. Vvedenie v teoriyu raznostnyh skhem]. St. Petersburg: BSTU, 2006, 191 p.

5. Gusman Yu.A., Oganesyan L.A. Convergence estimates for finite difference schemes for degenerate elliptic equations. [Gusman YU.A., Oganesyan L.A. Ocenki skhodimosti konechno-raznostnyh skhem dlya vyrozhdennyh ellipticheskih uravnenij]. *Zhurnal vychislitel’noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, no. 2, pp. 351–357.

6. Katrakhov V.V., Katrakhova A.A. Finite element method for some degenerate elliptic boundary value problems. [Katrahov V.V., Katrahova A.A. Metod konechnyh elementov dlya nekotoryh vyrozhdayushchihsya ellipticheskih kraevyh zadach]. *DAN SSSR — DAN USSR*, 1984, vol. 279, no. 4, pp. 799–802.

7. Vinogradova G.A. On the solution of a singular problem by the variational method. [Vinogradova G.A. O reshenii singulyarnoj zadachi variacionnym metodom]. *Vestnik fakul’teta PMM — Bulletin of the Faculty of PMM*, 2015, no. 10, pp. 39–42.

8. Katrakhova A.A. Singular boundary value problems and approximate methods for their solution: specialty 01.01.02 "Differential equations and mathematical physics": Dissertation for the candidate of physical and mathematical sciences. [Katrahova A.A. Singulyarnye kraevye zadachi i priblizhennye metody ih resheniya: special’nost’ 01.01.02 “differencial’nye uravneniya i matematicheskaya fizika”: Dissertaciya na soiskanie kandidata fiziko-matematicheskih nauk]. Voronezh Order of Lenin State University of Lenin Komsomol, Voronezh, 1982, 129 p.

9. Kipriyanov I.A. Boundary value problems of singular elliptic operators in partial derivatives. [Kipriyanov I.A. Kraevye zadachi singulyarnyh ellipticheskih operatorov v chastnyh proizvodnyh]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1970, vol. 195, no. 1, pp. 32–35.

10. Zhitomirskij Ya.I. The Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with differential operators of Bessel type. [ZHitomirskij YA.I. Zadacha Koshi dlya sistem linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh s differencial'nymi operatorami tipa Besselya]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1955, no. 36(78):2, pp. 299–310.

11. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Introduction to projection-grid methods. [Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Vvedenie v proekcionno-setochnye metody]. Moscow: Nauka, 1981, 416 p.

12. Samarsky A.A., Gulin A.V. Numerical methods. [Samarskij A.A., Gulin A.V. CHislennye metody]. Moscow: Science, 1989, 432 p.

Барабаш Ольга Павловна, аспирант кафедры прикладного и математического анализа Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: navyS9@yandex.ru

Barabash Olga Pavlovna, post-graduate student of the Department of Applied and Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: navyS9@yandex.ru