

# ТРАНЗИТИВНОСТЬ ЗАПУТАННОСТИ В МНОГОКУБИТОВЫХ СИСТЕМАХ

Н. П. Стадная, А. В. Боева, А. Ф. Клинских

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 02.03.2023 г.

**Аннотация.** В работе рассматривается возможность классификации состояний многокубитовых систем с точки зрения их запутанности на основе бинарных отношений. Показано, что запутанность состояния многокубитовой системы обладает свойством транзитивности. Это позволяет ввести классификацию состояний многокубитовой системы, а также анализировать произвольное состояние на основании рассмотрения бинарного множества пар запутанных кубитов. При этом можно дать геометрическую интерпретацию различным типам запутанности. В случае запутанности определённых кубитов их можно графически связать непрерывной линией.

**Ключевые слова:** транзитивность, запутанные состояния, базис Белла, оператор Адамара, квантовая схема.

## TRANSITIVITY OF ENTANGLEMENT STATES IN MULTIQUBIT SYSTEMS

N. P. Stadnaya, A. V. Boeva, A. F. Klinskikh

**Abstract.** The paper considers the possibility of classifying the states of multi-qubit systems in terms of their entanglement based on binary relations. We show that the entanglement of the state of a multi-qubit system has the property of transitivity. This allows us to introduce a classification of the states of a multi-qubit system, as well as to analyze an arbitrary state based on the consideration of a binary set of pairs of entangled qubits. In this case, it is possible to give a geometric interpretation to various types of entanglement. In the case of entanglement of certain qubits, they can be graphically connected by a continuous line.

**Keywords:** transitivity, entangled states, Bell basis, Hadamard operator, quantum scheme.

### ВВЕДЕНИЕ

Интерес к получению полного контроля над одиночными квантовыми системами зародился в 70-х годах прошлого века. Он был связан с появлением ряда принципиально новых экспериментальных методик, дающих возможность удерживать отдельные атомы, ионы, электроны, охлаждать их до сверхнизких температур, управлять их квантовой динамикой [1]. В настоящее время существует множество экспериментальных реализаций различных квантовых схем, в связи с чем квантовые вычисления являются актуальным направлением для исследований.

В рамках квантовых вычислений особое внимание уделяется запутанным состояниям многокубитового регистра.

Известно, что любую сложную квантовую систему можно разбить на две подсистемы, причем интерес представляет вопрос о запутанности этих подсистем между собой. Данный вопрос решается с помощью разложения Шмидта, которое является сингулярным разложением матрицы коэффициентов вектора состояния. При этом ранг матрицы, или ранг Шмидта,

является мерой запутанности двухчастичного состояния. То есть, чем больше ранг Шмидта, тем сильнее запутано состояние [4].

Случай определения запутанности двухкубитовой системы хорошо изучен и описан в литературе [2 – 4]. Вопрос определения всех возможных мер запутанности, которые могут иметь место в многокубитовых системах, изучен недостаточно.

Одним из возможных направлений в количественном описании запутанности многокубитовых систем является рассмотрение в рамках отношений эквивалентности (рефлексивности, симметричности, транзитивности) по аналогии с подходом к определению термодинамического равновесия. А именно, можно считать, что

- 1) любой вид запутанности в многокубитовой системе может быть сведён к рассмотрению бинарного множества пар запутанных кубитов;
- 2) если в системе имеется запутанность  $i$ -го и  $j$ -го кубитов, и, вместе с тем,  $j$ -го и  $k$ -го, то можно говорить о запутанности всех трёх кубитов.

Свойство транзитивности позволяет классифицировать различные типы запутанности.

### СВОЙСТВО ТРАНЗИТИВНОСТИ ЗАПУТАННОСТИ В ТРЁХКУБИТОВОЙ СИСТЕМЕ

Для иллюстрации свойства транзитивности запутанности рассмотрим две различных схемы запутывания трёхкубитовой системы (рис. 1а, б) [5].

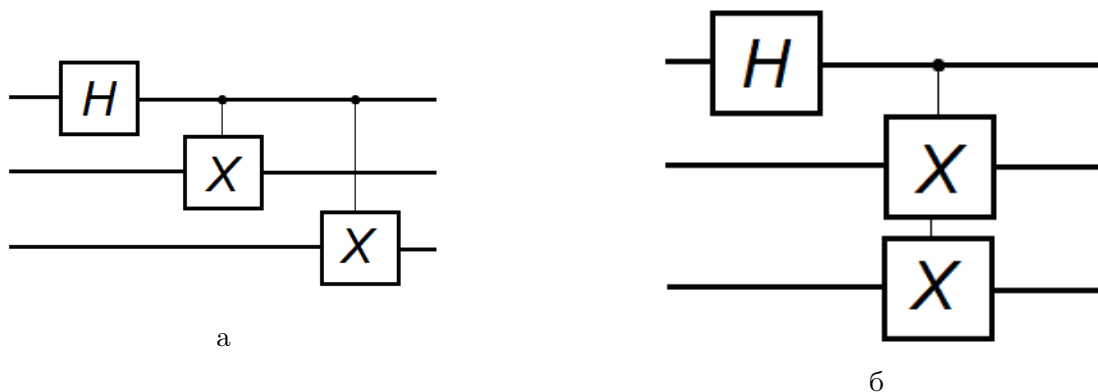


Рис. 1.

В первом случае (рис. 1а) запутываются состояния первого (А) и второго (В), а затем первого (А) и третьего (С) кубитов. Во втором (рис. 1б) запутываются состояния первого (А) и второго (В), а затем второго (В) и третьего (С) кубитов.

При этом, оказывается, что входные состояния вычислительного базиса трёхкубитовой системы после прохождения обеих схем представляют собой один и тот же базис, только с переставленной нумерацией векторов. В этом можно убедиться, если использовать матричный формализм для представления действия операций над кубитами.

Матрицы операторов, действующих на трёхкубитовую систему, имеют размерность  $8 \times 8$ . При этом эквивалентная матрица, получаемая для той или иной схемы, позволяет определить выходной вектор состояния по заданному входному вектору вычислительного базиса. Расчёт

эквивалентной матрицы для случая, изображённого на рис. 1а, даёт матрицу (1)

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Для схемы, изображённой на рис. 1б), эквивалентная матрица имеет вид (2)

$$M_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Видно, что матрицы  $M_a$  и  $M_b$  различаются только размещением пар столбцов (3,4) и (7,8). Таким образом, во-первых, порядок запутывания кубитов друг с другом не влияет на тот факт, что в итоге будут запутаны все три кубита. Во-вторых, если запутаны состояния кубитов А и В и кубитов В и С, то все три кубита в системе запутаны, что является демонстрацией свойств транзитивности запутанности.

Можно дать геометрическую интерпретацию данному свойству. Если изобразить кубиты точками, а запутывание кубитов линией, соединяющей их, то в случае, реализуемом схемой, изображённой на рис. 1а, мы сначала соединяем А и В, а затем А и С (рис. 2а).

В случае схемы, изображённой на рис. 1б, мы сначала соединяем кубиты А и В, а затем В и С (рис. 2б).

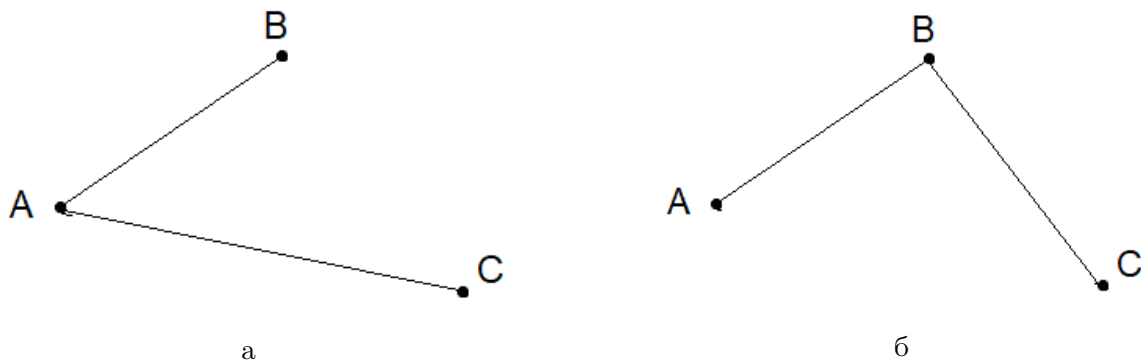


Рис. 2.

Видно, что запутанные кубиты в системе соединены непрерывной ломаной линией. Назовём её линией запутанности.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПУТАННОСТИ СОСТОЯНИЯ N-КУБИТОВОЙ СИСТЕМЫ

Результаты анализа запутанных состояний в трёхкубитовой системе могут быть обобщены на случай произвольных многокубитовых систем.

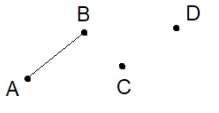
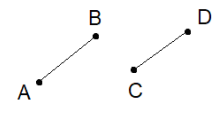
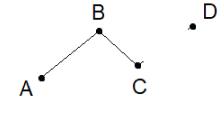
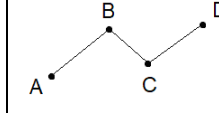
**Число возможных классов и вариантов запутанности.** Определим понятия “класса” и “варианта” запутанности, пользуясь описанной выше геометрической интерпретацией.

К классу  $K_i$  отнесём состояния многокубитовой системы, у которых линия запутанности, имеющая максимальную длину, состоит из  $i$  звеньев. Максимальный номер класса в  $N$ -кубитовой системе равен  $N - 1$ . Так, на рис. 2 представлены состояния, относящиеся к классу  $K_3$ .

Определённый класс имеет подклассы, определяющиеся по числу звеньев одинаковой длины. Так, для четырёхкубитовой системы в классе  $K_1$  существует подкласс, имеющий одно звено длины 1 (два кубита запутаны, а другие два – нет); а также подкласс, имеющий два звена длины 1 (запутаны две пары кубитов).

Все возможные классы с подклассами для четырёхкубитовой системы перечислены в таблице 1.

Таблица 1. Линии запутанности и соответствующие классы для четырёхкубитовой системы.

Класс	$K_1$		$K_2$	$K_3$
	Подкласс 1	Подкласс 2		
Линии запутанности				
Запутанные кубиты	A – B, C, D	A – B, C – D	A – B – C, D	A – B – C – D

В рамках одного класса можно рассматривать варианты запутанностей. К различным вариантам относят возможные сочетания групп запутанных кубитов. Так, в рамках подкласса 2 класса  $K_1$  для четырёхкубитовой системы возможны три варианта: (A – B, C – D), (A – C, B – D), (A – D, B – C).

Общее количество вариантов запутанности для системы из  $N$  кубитов может быть определено по формуле (3):

$$\sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i (m-i)^N, \quad (3)$$

где  $m$  для состояния многокубитовой системы нумерует число подсистем, находящихся в чистом состоянии.

Так, для четырёхкубитовой системы существует один вариант запутанности всех кубитов ( $m = 1$ ); семь вариантов запутанности с  $m = 2$  (три варианта, относящихся к типу (A – B, C – D) и четыре к (A – B – C, D)); три варианта с  $m = 3$  (когда запутана пара кубитов, а другие два незапутаны).

Для  $N = 2$  по формуле (3) получаем один вариант запутанности, для  $N = 3$  четыре,  $N = 4$  четырнадцать,  $N = 5$  пятьдесят один и т. д. Число способов для системы из 10-кубитов порядка  $10^6$ , для 20-кубитовой порядка  $10^{14}$ , поэтому задача классификации по запутанности даже для небольшого числа кубитов очень ресурсоёмко.

**Задача классификации.** Используя свойство транзитивности запутанности, можно задачу классификации свести к проверке запутанностей пар кубитов. В этом случае общее число проверок для  $N$ -кубитовой системы составляет число  $C_N^2$ . Для  $N = 10$  потребуется всего 45 проверок. Рассмотрим задачу классификации для некоторого состояния пятикубитовой системы, задаваемого (4):

$$|\Psi\rangle_5 = 0.5|00111\rangle + 0.5|01001\rangle + 0.5|10111\rangle + 0.5|11001\rangle. \quad (4)$$

Пятый кубит не запутан и находится в состоянии  $|1\rangle$ . Попарное сравнение по кубитам показывает, что первый кубит не запутан ни с одним из оставшихся и находится в состоянии, описываемом суперпозицией  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ; второй кубит запутан с третьим; третий кубит запутан с четвёртым. Таким образом, линии запутанности в данной системе будут иметь вид, представленный на рис. 3.

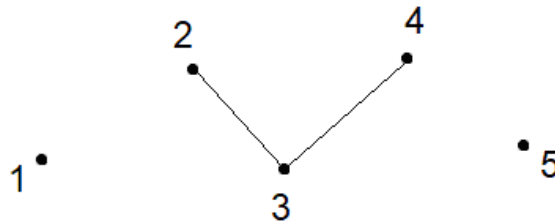


Рис. 3.

В данном состоянии запутаны состояния трёх кубитов (1; 2-3-4; 5):

$$|\Psi\rangle_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle + |100\rangle) \otimes |1\rangle. \quad (5)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение запутанности многокубитовой системы может быть проведено с учётом выполнения для запутанности свойства транзитивности. Данный факт позволяет анализировать состояние квантовой системы путём попарных сравнений кубитов. При этом, если какая-то пара кубитов запутана, то можно графически интерпретировать запутанность соединением двух кубитов линией. Подгруппа запутанных кубитов будет соединена непрерывной линией. Полученные результаты могут быть интересны в квантовой теории вычислений, например, для количественного описания меры запутанности состояний многокубитовых систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валиев, К. А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления / К. А. Валиев // Успехи физических наук. — 2005. — Т. 175, № 31. — С. 3–39.
2. Нильсен, М. Квантовые вычисления и квантовая информация / М. Нильсен, И. Чанг. — М. : МИР, 2006. — 824 с.
3. Ожигов, Ю. И. Квантовые вычисления / Ю. И. Ожигов. — 2003. — 104 с.
4. Кронберг, Д. А. Алгебраический аппарат квантовой информатики / Д. А. Кронберг, Ю. И. Ожигов, А. Ю. Чернявский. — М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009. — 56 с.
5. Запрягаев, С. А. Квантовые информационные системы. Теория и практика применения / С. А. Запрягаев. — СПб. : БХВ-Петербург, 2023. — 320 с.

## REFERENCES

1. Valiyev K.A. Quantum computers and quantum computing. [Valiev K.A. Kvantovye komp'yutery i kvantovye vychisleniya]. *Uspehi fizicheskix nauk — Physics-Uspekhi*, 2005, vol. 175, no. 31, pp. 3–39.
2. Nielsen M., Chang I. Quantum computing and quantum information. [Nil'sen M., CHang I. Kvantovye vychisleniya i kvantovaya informaciya]. Moscow: MIR, 2006, 824 p.
3. Ozhigov Y.I. Quantum computing. [Ozhigov YU.I. Kvantovye vychisleniya]. 2003, 104 p.
4. Kronberg D.A., Ozhigov Y.I., Chernyavskiy A.Y. Algebraic apparatus of quantum informatics. [Kronberg D.A., Ozhigov YU.I., CHernyavskij A.YU. Algebraicheskiy apparat kvantovoj informatiki]. Moscow: MSU, 2009, 56 p.
5. Zapryagaev S.A. Quantum information systems. Theory and practice of aplication. [Zapryagaev S.A. Kvantovye informacionnye sistemy. Teoriya i praktika primeneniya]. Spb.: BHV-Peterburg, 2023, 320 p.

*Клинских Александр Федотович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры цифровых технологий факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия  
E-mail: klinskikh@phys.vsu.ru*

*Klinckikh Alexander Fedotovich, Doctor of Physical and Mathematical sciences, Professor, Professor of the Department of Digital technologies Computer science faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: klinskikh@phys.vsu.ru*

*Стадная Надежда Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и информационных технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия  
E-mail: St.hope11@gmail.com*

*Stadnaya Nadezhda Pavlovna, Candidat Physical and Mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical physics and Information technologies of Physical faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: St.hope11@gmail.com*

*Боева Анастасия Валерьевна, студент физического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия  
E-mail: nastya.koroleva792@gmail.com*

*Boyeva Anastasiya Valeryevna, year student of the Physical faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: nastya.koroleva792@gmail.com*