УДК 517.927.21

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

С. А. Шабров, Т. В. Гридяева, Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.12.2022 г.

Аннотация. В работе изучаются граничные задачи второго порядка с негладкими решениями и периодическими и антипериодическими условиями. Следуя концепции поточечного подхода, предложенного Ю. В. Покорным, удалось получить достаточные условия существования и единственности решения изучаемых математических моделей.

Ключевые слова: математическая модель, негладкие решения, производная по мере, точечный подход.

ON SECOND-ORDER MATHEMATICAL MODELS WITH DERIVATIVES IN MEASURE AND PERIODIC AND ANTIPERIODIC CONDITIONS

S. A. Shabrov, T. V. Gridiaeva, F. V. Golovanova, M. B. Davydova

Abstract. The paper studies second-order boundary value problems with nonsmooth solutions and periodic and antiperiodic conditions. Following the concept of the point-by-point approach proposed by Yu. V. Pokorny, it was possible to obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the studied mathematical models.

Keywords: mathematical model, non-smooth solutions, derivative with respect to measure, point approach.

В работе изучаются математические модели

$$\begin{cases} -(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u(\ell); \\ u'_x(0) = u'_x(\ell), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = -u(\ell); \\ u'_x(0) = -u'_x(\ell), \end{cases} \tag{2}$$

с негладкими решениями. Применяемый нами поточечный подход Ю. В. Покорного, предложенный им в [1], позволил построить точную параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вплоть до осцилляционных теорем для случая, когда уравнения дополняются условиями типа Штурма-Лиувилля. Объясняется данное обстоятельство очень просто: изучаемое уравнение является поточечно заданным, т. е. как связь между значениями решения и ее производными в точке.

Уравнение

$$-(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma \tag{3}$$

задано на специальном расширении отрезка $[0;\ell]$, которое строится следующим образом. Пусть $\sigma(x)$ — строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция, порождающая на $[0;\ell]$ меру; $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. В случае, когда $S(\sigma) \neq \varnothing$, на отрезке $[0;\ell]$ появляются атомы меры: точки, классическая мера Лебега которых равна нулю, а мера σ — нет.

На $[0;\ell]$ введем метрику $\rho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. В интересующем нас случае: $S(\sigma) \neq \varnothing$, метрическое пространство $([0;\ell];\rho)$ не является полным. Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на тройку собственных элементов $\{\xi_-,\xi,\xi_+\}$, мы обозначим $\overline{[0;\ell]}_\sigma$. Уравнение (3) в точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$, мы понимаем как равенство

$$-\Delta p u'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta\varphi(\xi) = \varphi(\xi+0) - \varphi(\xi-0)$ — полный скачок функции $\varphi(x)$ в точке ξ.

Решение (1) и (2), как впрочем и (3), мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, первая производная $u'_x(x)$ которых σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Здесь доказываются основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть* $\inf\limits_{x\in[0;l]} p(x) > 0$, $p(0) = p(\ell)$ *и* σ*-абсолютно непрерывна на* $[0;\ell]$*;* $Q(x)$ *— строго возрастает на* $[0;\ell]$ *и* σ*-абсолютно непрерывна на* $[0;\ell]$*. Тогда решение задачи* (1) *существует и единственно.*

Доказательство. Любое решение $u(x)$ уравнения (3) можно представить в виде (см., например, [2], [3], [4])

$$u(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + v(x), \tag{4}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения однородного уравнения $-(pu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$, удовлетворяющие начальным условиям $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ и $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ соответственно; $v(x)$ — решение неоднородного уравнения (3) при начальных условиях $u(0) = u'(0) = 0$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Существование и единственность $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $v(x)$, при указанных выше условиях, доказаны в [2], [3], [4].

Очевидно, что функция (4) является решением уравнения (3) при любых C_1 и C_2. Для того, чтобы функция $u(x)$, определяемая равенством (3), удовлетворяла граничным условиям $u(0) = u(\ell)$ и $u'_x(0) = u'_x(\ell)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} C_1 = C_1\varphi_1(\ell) + C_2\varphi_2(\ell) + v(\ell); \\ C_2 = C_1\varphi'_1(\ell) + C_2\varphi'_2(\ell) + v'(\ell), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} v(\ell) = C_1(1-\varphi_1(\ell)) - C_2\varphi_2(\ell); \\ v'(\ell) = C_2(1-\varphi'_2(\ell)) - C_1\varphi'_1(\ell). \end{cases} \tag{5}$$

Определитель последней системы, как нетрудно видеть, равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\varphi_1(\ell) & -\varphi_2(\ell) \\ -\varphi'_1(\ell) & 1-\varphi'_2(\ell) \end{vmatrix} = 1 + W(\ell) - \varphi'_2(\ell) - \varphi_1(\ell), \tag{6}$$

где

$$W(\ell) = W[\varphi_1,\varphi_2](\ell) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell) \\ \varphi'_1(\ell) & \varphi'_2(\ell) \end{vmatrix}$$

— это определитель Вронского. В работах [2], [3], [4] показано, что функция $(pW)(x)$ принимает постоянное значение. Тогда определитель (6) допускает перезапись

$$\Delta = 1 - \varphi_1(\ell) + 1 - \varphi_2'(\ell).$$

Покажем, что Δ не может обращаться в нуль.

В начале докажем, что $\varphi_1(\ell) > 1$. Так как $\varphi_1(0) > 0$ и $\varphi_1(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, то существует окрестность точки $x = 0$, в которой $\varphi_1(x)$ положительна. Пусть $[0;x_0)$ — максимальный отрезок, в котором $\varphi_1(x) > 0$. Из тождества $(p{\varphi_1}_x')_\sigma' \equiv \varphi_1 Q_\sigma'$ вытекает, что $p{\varphi_1}_x'(x)$ не убывает на $[0;x_0)$. Поскольку ${\varphi_1}_x'(0) = 0$, то ${\varphi_1}_x'(x)$ неотрицательна на $[0;x_0]$, следовательно, $\varphi_1(x)$ также не убывает на $[0;x_0)$. Отсюда вытекает, что $\varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(0)$, или $\varphi_1(x) \geqslant 1$ для всех $x \in [0;x_0)$. В силу непрерывности $\varphi_1(x)$ мы получаем, что $\varphi_1(x_0) \geqslant 1$. Последнее неравенство будет противоречить предположению о том, что $x_0 < \ell$. Таким образом, на всем отрезке $[0;\ell]$ функция $\varphi_1(x)$ положительна.

Аналогично доказывается и более сильное неравенство $\varphi_1(x) \geqslant 1$.

Предположение $\varphi_1(\ell) = 1$ нам дает тождество $\varphi_1(x) \equiv 1$. Последнее означает, что $\varphi_1'(x) \equiv 0$, и тогда $\varphi_1(x)$ должна удовлетворять тождеству $0 \equiv 1 \cdot Q_\sigma'(x)$. Следовательно, $Q(x) \equiv \mathrm{const}$, что противоречит условию теоремы.

Остается показать, что $\varphi_2'(\ell) > 1$.

Так как $\varphi_2'(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение и $\varphi_2'(0) = 1$, то $\varphi_2'(x)$ положительна в некоторой окрестности точки $x = 0$.

Обозначим через $[0;x^*)$ максимальный промежуток, на котором $\varphi_2'(x)$ неотрицательна. Тогда на этом промежутке $\varphi_2(x)$ не убывает, а так как $\varphi_2(0) = 0$, то $\varphi_2(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0;x^*]$. Предположим, что $x^* < \ell$. Пусть $[0;\widehat{x}]$ — максимальный отрезок, на котором $\varphi_2(x) \geqslant 0$. Очевидно, что $\widehat{x} > x^*$. Из тождества $(p{\varphi_2}_x')_\sigma' \equiv \varphi_2 Q_\sigma' \geqslant 0$, справедливого на $[0;x^*)$, вытекает неубывание функции $p{\varphi_2}_x'(x)$, то есть верна цепочка неравенств $p\varphi_2'(x) \geqslant p(0) > 0$ для всех $x \in [0;\widehat{x}]$. Тогда ${\varphi_2}_x'(x)$ положительна на всем отрезке $[0;\widehat{x}]$. Из этого находим, что $\varphi_2(\widehat{x}) > \varphi_2(0) = 0$. Последнее неравенство противоречит максимальности отрезка $[0;\widehat{x}]$. Полученное противоречие означает, что $x^* = \ell$. В этом случае $(p{\varphi_2}_x')_\sigma'(x) \equiv \varphi_2 Q_\sigma'(x) \geqslant 0$ на всем отрезке $[0;\ell]$. Этот факт и означает возрастание $p\varphi_2'(x)$ на всем отрезке $[0;\ell]$, то есть $p\varphi_2'(\ell) \geqslant p(0)$. Равенство в последнем неравенстве невозможно ввиду того, что в этом случае мы сразу получаем противоречие: $0 \equiv \varphi_2(x) \cdot Q_\sigma'(x)$.

Доказанные выше неравенства означают, что определитель Δ не может обращаться в нуль, следовательно, система (5) имеет единственное решение. Теорема доказана.

С помощью аналогичных рассуждений доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\inf\limits_{x \in [0;\ell]} p(x) > 0$, $p(0) = p(\ell)$; $Q(x)$ *—* σ*-абсолютно непрерывна на* $[0;\ell]$ *и строго возрастает на нем. Тогда граничная задача*

$$\begin{cases} -(pu_x')_\sigma' + uQ_\sigma' = F_\sigma'; \\ u(0) = -u(\ell); \\ u'(0) = -u'(\ell) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Если $Q(x) \equiv \mathrm{const}$, то решение задачи (1) может и не существовать. Для доказательства достаточно взять произвольную σ–абсолютно непрерывную на $[0;\ell]$ функцию такую, что $F(\ell) \neq F(0)$. В то же время, если $F(x)$ удовлетворяет условию $F(\ell) = F(0)$, то множество решений граничной задачи (1) задается равенством

$$u(x) = C - \left(\int_0^\ell \frac{dt}{p(t)} \right)^{-1} \cdot \int_0^\ell \frac{F(0) - F(s)}{p(s)} \, ds \cdot \int_0^x \frac{dt}{p(t)} + \int_0^x \frac{F(0) - F(s)}{p(s)} \, ds,$$

где C — произвольная постоянная, т. е. у (1) решение не единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

5. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

8. Тимашова, Е. В. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2–1. — С. 3–8.

9. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

10. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

11. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

12. Шабров, С. А. Об одной спектральной задаче четвертого порядка с производными Радона–Никодима и со спектральным параметром / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 163–167.

13. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Головко

// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

14. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи с производными по мере и спектральным параметром при второй производной / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина, М. В. Шаброва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 203–207.

15. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

16. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

17. Borodina, E. A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E. A. Borodina, S. A. Shabrov, M. V. Shabrova // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

18. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives / S. A. Shabrov, O. M. Ilina, E. A. Shaina, D. A. Chechin // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012044.

19. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 3. — С. 93–100.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

4. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk – Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-

Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

8. Ivannikova T.A., Timashova E.V, Shabrov S.A. On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa i nulevym koe'fficientom pri starshej proizvodnoj na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2–1, pp. 3–8.

9. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

10. Shabrov S.A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an integral Stieltjes. [Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

11. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

12. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M. On one spectral problem of the fourth order with Radon–Nikodim derivatives and with spectral parameter at the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M. Ob odnoyj spektral'noyj zadache chetvertogo poryadka s proizvodnymi Radona–Nikodima i so spektral'nym parametrom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 163–167.

13. Shabrov S.A., Golovko N.I. About the velocity of increase of eigenvalue of a different order spectral problem with derivative on the measure. [Shabrov S.A., Golovko N.I. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj raznoporyadkovoyj spektral'noyj zadachi s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 186–195.

14. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M., Shabrova M.V. On the rate of growth of the eigenvalues of one spectral problem with derivatives of the measure and a spectral parameter in the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M., Shabrova M.V. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj spektral'noyj zadachi s proizvodnymi po mere i spektral'nym parametrom pri vtoroyj proizvodnoyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series:*

Physics. Mathematics, 2018, no. 3, pp. 203–207.

15. Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About one boundary value problem of the sixth order with a strong nonlinearity. [Borodina E.A., Golovanyova F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj granichnoyj zadache shestogo poryadka s sil'noyj nelineyjnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 65–69.

16. Davydova M.B., Shabrov S.A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

17. Borodina E.A., Shabrov S.A., Shabrova M.V. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity. Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012023.

18. Shabrov S.A., Ilina O.M., Shaina E.A., Chechin D.A. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012044.

19. Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davidova M.B. On the number of solutions of the nonlinear boundary problem of the fourth order with derivatives by measure. [Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davydova M.B. O chisle reshenij nelinejnoj granichnoj zadachi chetvertogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 93–100.

Шабров Сергей Александрович, доктор физико–математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Гридяева Татьяна Витальевна, аспирант математического факультета, Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: tatianavit99@mail.ru

Gridiaeva Tatiana Vitalievna, postgraduate student of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: tatianavit99@mail.ru

Голованева Фаина Валентиновна, доцент кафедры теории уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovanova Faina Valentinovna, Associate Professor of the Department of Theory of Partial Differential Equations and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: gfainav@mail.ru

Давыдова Майя Борисовна, доцент кафедры математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: mbd@vsu.ru

Davydova Maya Borisovna, Associate Professor of the Department of of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mbd@vsu.ru