УДК 517.988

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КАРИСТИ И ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ В ОБОБЩЕННЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ*

В. В. Обуховский, Т. А. Ульвачёва

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 27.01.2023 г.

Аннотация. Рассмотрен ряд неравенств с операторными коэффициентами на обобщенных метрических пространствах, т. е., пространствах, метрика которых принимает значения в конусе частично упорядоченного нормированного пространства. Доказывается теорема о существовании нулевой точки для функции, определенной на обобщенном метрическом пространстве и принимающей значения в данном конусе. С использованием этого утверждения получен ряд теорем о неподвижной точке, обобщающих некоторые известные результаты, в том числе принцип сжимающих отображений.

Ключевые слова: обобщенное метрическое пространство, векторная метрика, нулевая точка, неподвижная точка, теорема Каристи, обобщенное сжатие, многозначное отображение.

CARISTI TYPE INEQUALITIES AND FIXED POINT THEOREMS IN GENERALIZED METRIC SPACES

V. V. Obukhovskii, T. A. Ul'vacheva

Abstract. We consider inequalities with operator coefficients on generalized metric spaces, i.e., spaces whose metric takes its values in a cone of a partially ordered normed space. A theorem on the existence of a zero point for a function defined on a generalized metric space and taking its values in such cone is proved. By using this assertion we obtain several fixed point theorems generalizing some known results, including the contraction map principle.

Keywords: generalized metric space, vector metric, zero point, fixed point, Caristi theorem, generalized contraction, multivalued map.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [10] (см. также [7], [11]) Дж. Каристи использовал функциональное неравенство в полном метрическом пространстве для доказательства теоремы о неподвижной точке, обобщающей принцип сжимающих отображений. С тех пор этот метод использовался в ряде работ для доказательства существования минимума функции, заданной на метрическом пространстве, а также для обоснования различных утверждений о неподвижной точке и совпадении для отображений различных классов (см., например, [1], [2], [3], [4], [13]).

В настоящей работе мы рассматриваем ряд неравенств с операторными коэффициентами на обобщенных метрических пространствах, т.е. пространствах, метрика которых принимает значения в конусе частично упорядоченного нормированного пространства. Доказывается теорема о существовании нулевой точки для функции, определенной на обобщенном метрическом пространстве и принимающей значения в данном конусе. С использованием этого

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы QRPK–2023–0002).

утверждения удается получить ряд теорем о неподвижной точке, обобщающих некоторые известные результаты, в том числе принцип сжимающих отображений.

Отметим, что пространства с векторной метрикой были рассмотрены А. И. Перовым ([8], [9]), который доказал существование и единственность неподвижной точки отображения, являющегося обобщенным сжатием в таком пространстве. В работе [5] Е. С. Жуковский и Е. А. Панасенко доказали теорему о неподвижной точке многозначного отображения, удовлетворяющего обобщенному условию сжатия в пространстве с векторной метрикой (аналог теоремы Надлера, см. [12], а также [11], [13]).

Настоящая работа имеет следующую структуру. В следующем разделе приводятся необходимые сведения из теории обобщенных метрических пространств. В разделе 3 представлена теорема о нулевой точке функции на обобщенном метрическом пространстве, удовлетворяющей неравенству типа Каристи. В четвертом разделе этот результат применяется для доказательства теорем о неподвижной точке для однозначных и многозначных отображений.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть E — вещественное нормированное пространство; $E_+ \subset E$ — выпуклый замкнутый и содержащий ноль θ конус. Будем предполагать, что норма пространства E монотонна относительно частичной упорядоченности $\leqslant$, порожденной в E конусом E_+, т. е., для любых $e, e' \in E_+$ условие $e \leqslant e'$ влечет $\|e\|_E \leqslant \|e'\|_E$.

Пусть X — непустое множество; отображение $\mathcal{P}\colon X \times X \to E_+$ называется векторной метрикой на X, если оно удовлетворяет следующим условиям для любых $x,y,z \in X$: 1) $\mathcal{P}(x,y) = \theta$ равносильно $x = y$; 2) $\mathcal{P}(x,y) = \mathcal{P}(y,x)$; 3) $\mathcal{P}(x,y) \leqslant \mathcal{P}(x,z) + \mathcal{P}(z,y)$.

Множество X с векторной метрикой $\mathcal{P}$ будем называть обобщенным метрическим пространством (ОМП) и обозначать $(X,\mathcal{P})$. На ОМП переносятся основные понятия теории обычных метрических пространств. Сходимость последовательности $x_n \underset{\mathcal{P}}{\longrightarrow} x$ понимается как $\|\mathcal{P}(x_n,x)\|_E \to 0$. Подмножество $Y \subset X$ замкнуто, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset Y$ условие $x_n \underset{\mathcal{P}}{\longrightarrow} x$ влечет $x \in Y$. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ фундаментальна, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное N такое, что $\|\mathcal{P}(x_n, x_m)\|_E < \varepsilon$ для $m, n \geqslant N$. Если любая фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к элементу $x \in X$, то X называется полным.

Пространство положительных ограниченных линейных операторов $A\colon E \to E$, т. е., таких, что $A(E_+) \subseteq E_+$ будет обозначаться $\mathcal{L}_+(E)$.

Рассмотрим некоторые примеры обобщенных метрических пространств.

Пример 2.1. Множество X называется обобщенным метрическим пространством в смысле А. И. Перова (см. [8], [9]), если каждой паре точек $x,y \in X$ поставлен в соответствие вектор $\mathcal{P}(x,y) = (\rho(x,y),...,\rho(x,y)) \in \mathbb{R}^n_+$, причем для любых $x,y,z \in X$ выполнены следующие условия: 1) $\mathcal{P}(x,y) = 0$ равносильно $x = y$; 2) $\mathcal{P}(x,y) = \mathcal{P}(y,x)$; 3) $\mathcal{P}(x,y) \leqslant \mathcal{P}(x,z) + \mathcal{P}(z,y)$ (все соотношения здесь выполняются покомпонентно).

В конусе $\mathbb{R}^n_+$ можно задать любую монотонную норму, например, обычную евклидовскую: $\|e\| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, где $e = (\xi_1,...,\xi_n)$.

В качестве конкретной реализации ОМП в смысле Перова мы можем рассмотреть $X = \mathbb{R}^n$, где векторная метрика $\mathcal{P}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_+$ задана как

$$\mathcal{P}(x,y) = (|x_1 - y_1|,...,|x_n - y_n|).$$

Пример 2.2. Рассмотрим в качестве X пространство непрерывных функций $C([a,b];\mathbb{R}^m)$ и зададим на нем векторную метрику со значениями в конусе неотрицательных функций $C([a,b];\mathbb{R}_+)$ пространства $C([a,b];\mathbb{R})$ следующим образом: для $x,y \in X$ пусть

$$\mathcal{P}(x,y)(t) = |x(t) - y(t)|, \quad t \in [a,b].$$

3. ТЕОРЕМА О НУЛЕВОЙ ТОЧКЕ ФУНКЦИИ НА ОБОБЩЕННОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $(X,\mathcal{P})$ — полное ОМП с векторной метрикой $\mathcal{P}\colon X\times X\to E_+$. Рассмотрим функцию $\alpha\colon X\to E_+$, удовлетворяющую условию:

$(\mathcal{H}\alpha)$ из $x_n \underset{\mathcal{P}}{\longrightarrow} x'$, $\|\alpha(x_n)\|_E\to 0$ вытекает $\alpha(x')=\theta$.

Пусть операторная функция $C\colon E_+\times E_+\to\mathcal{L}_+(E)$ удовлетворяет условиям:

$(\mathcal{H}C1)$ для любых $e,e'\in E_+$

$$ImC(e,e')=E;$$

$(\mathcal{H}C2)$ для любого $r>0$ существует $c_r>0$ такое, что для каждых $e,e'\in E_+$, $\|e\|_E\leqslant r$, $\|e'\|_E\leqslant r$ выполнено

$$\inf_{\|x\|_E=1}\|C(e,e')x\|_E\geqslant c_r.$$

Отметим, что из условий $(\mathcal{H}C1)$ и $(\mathcal{H}C2)$ вытекает, что для любых $e,e'\in E_+$ оператор $C(e,e')$ обратим, причем, если $\|e\|_E\leqslant r$, $\|e'\|_E\leqslant r$, то $\|C^{-1}(e,e')\|\leqslant\frac{1}{c_r}$ (см., например, [6], Теорема V.4.2). Будем предполагать выполненным также следующее условие:

$(\mathcal{H}C3)$ для любых $e,e'\in E_+$ оператор $C^{-1}(e,e')$ положителен.

Рассмотрим также операторную функцию $K\colon E_+\times E_+\to\mathcal{L}_+(E)$, для которой будем предполагать выполненным следующее условие:

$(\mathcal{H}K)$ для любого $s>0$ существует $k_s\in[0,1)$ такое, что

$$\|K(e,e')\|\leqslant k_s,\ \forall e,e'\in E_+, \|e\|_E\leqslant s, \|e'\|_E\leqslant s.$$

Мы можем сформулировать теперь следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $(X,\mathcal{P})$ - полное ОМП; функция $\alpha\colon X\to E_+$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H}\alpha)$; операторные функции $C,K\colon E_+\times E_+\to\mathcal{L}_+(E)$ удовлетворяют условиям $(\mathcal{H}C1)$ - $(\mathcal{H}C3)$ и $(\mathcal{H}K)$ соответственно. Пусть для любого $x\in X$ найдется $y\in X$ такое, что будет выполнено следующее соотношение:*

$$\alpha(y)+C\Big(\alpha(x),\alpha(y)\Big)\mathcal{P}(x,y)\leqslant K\Big(\alpha(x),\alpha(y)\Big)\alpha(x). \tag{1}$$

Тогда для любого $x_0\in X$ найдется точка $x_\star\in X$ такая, что $\alpha(x_\star)=\theta$ и при этом

$$\|\mathcal{P}(x_0,x_\star)\|_E\leqslant\frac{2a_0k_{a_0}}{c_{a_0}(1-k_{a_0})}, \tag{2}$$

где $a_0=\|\alpha(x_0)\|_E$.

Доказательство. Для точки x_0 найдем точку y такую, что соотношение (1) будет выполнено для $x=x_0$. Положим $x_1=y$ и найдем для x_1 аналогично точку x_2 и т.д. Продолжая этот процесс, построим последовательность $\{x_n\}\subset X$, для которой при всех $n\geqslant 0$ будут выполнены соотношения

$$\alpha(x_{n+1})+C\Big(\alpha(x_n),\alpha(x_{n+1})\Big)\mathcal{P}(x_n,x_{n+1})\leqslant K\Big(\alpha(x_n),\alpha(x_{n+1})\Big)\alpha(x_n), \tag{3}$$

откуда получаем

$$\theta\leqslant C\Big(\alpha(x_n),\alpha(x_{n+1})\Big)\mathcal{P}(x_n,x_{n+1})\leqslant K\Big(\alpha(x_n),\alpha(x_{n+1})\Big)\alpha(x_n)-\alpha(x_{n+1})$$

и следовательно

$$\alpha(x_{n+1}) \leqslant K\Big(\alpha(x_n), \alpha(x_{n+1})\Big)\alpha(x_n).$$

В силу монотонности нормы и условия $(\mathcal{H}K)$ имеем

$$\|\alpha(x_{n+1})\|_E \leqslant \|K\Big(\alpha(x_n), \alpha(x_{n+1})\Big)\| \cdot \|\alpha(x_n)\|_E < \|\alpha(x_n)\|_E. \tag{4}$$

Обозначим $a_n = \|\alpha(x_n)\|_E$. В силу (4) последовательность $\{a_n\}$ является монотонно убывающей и следовательно, сходящейся.

Более того, она сходится к 0. Действительно, без ущерба для общности, мы можем считать, что операторные функции $C(e,e')$ и $K(e,e')$ определены лишь для $\|e\|_E$, $\|e'\|_E \leqslant a_0$. Тогда из (4) получаем

$$a_n \leqslant k_{a_0}^n a_0 \tag{5}$$

и следовательно $a_n \to 0$.

Далее получаем

$$\mathcal{P}(x_n,x_{n+1}) \leqslant C^{-1}\Big(\alpha(x_n), \alpha(x_{n+1})\Big)\Big[K\Big(\alpha(x_n), \alpha(x_{n+1})\Big)\alpha(x_n) - \alpha(x_{n+1})\Big],$$

откуда, применяя (4) и (5) имеем

$$\|\mathcal{P}(x_n,x_{n+1})\|_E \leqslant \|C^{-1}\Big(\alpha(x_n), \alpha(x_{n+1})\Big)\|\Big[\|K\Big(\alpha(x_n), \alpha(x_{n+1})\Big)\| \cdot \|\alpha(x_n)\|_E + \|\alpha(x_{n+1})\|_E\Big] \tag{6}$$

$$\leqslant \frac{2k_{a_0}a_n}{c_{a_0}} \leqslant \frac{2k_{a_0}^{n+1}a_0}{c_{a_0}}.$$

Таким образом, получаем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и, в силу полноты пространства $(X,\mathcal{P})$ она сходится к $x_\star \in X$. Из условия $(\mathcal{H}\alpha)$ вытекает $\alpha(x_\star) = \theta$.

Соотношение (6) показывает, что

$$\|\mathcal{P}(x_0,x_m)\|_E \leqslant \frac{2a_0k_{a_0}}{c_{a_0}(1-k_{a_0})}$$

для всех $m \geqslant 1$ и оценка (2) получается предельным переходом при $m \to \infty$.

Теорема доказана.

4. ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Рассмотренное выше утверждение может быть использовано для доказательства ряда теорем о неподвижной точке для отображений в обобщенных метрических пространствах.

Пусть $(X,\mathcal{P})$ — ОМП, отображение $f\colon X \to X$ называется замкнутым, если оно имеет замкнутый график, т. е., условия $x_n \underset{\mathcal{P}}{\longrightarrow} x$, $y_n = f(x_n)$, $y_n \underset{\mathcal{P}}{\longrightarrow} y$ влекут $y = f(x)$.

Теорема 4.1. *Пусть $(X,\mathcal{P})$ — полное ОМП; $f\colon X \to X$ — замкнутое отображение; операторные функции $C, K\colon E_+ \times E_+ \to \mathcal{L}_+(E)$ удовлетворяют условиям $(\mathcal{H}C1)$ — $(\mathcal{H}C3)$ и $(\mathcal{H}K)$ соответственно. Пусть для любого $x \in X$ найдется $y \in X$ такое, что*

$$\mathcal{P}(y,f(y)) + C\Big(\mathcal{P}(x,f(x)), \mathcal{P}(y,f(y))\Big)\mathcal{P}(x,y) \leqslant K\Big(\mathcal{P}(x,f(x)), \mathcal{P}(y,f(y))\Big)\mathcal{P}(x,f(x)). \tag{7}$$

Тогда для любого $x_0 \in X$ найдется неподвижная точка $x_\star \in X$, $x_\star = f(x_\star)$ отображения f такая, что

$$\|\mathcal{P}(x_0,x_\star)\|_E \leqslant \frac{2a_0k_{a_0}}{c_{a_0}(1-k_{a_0})}, \tag{8}$$

где $a_0 = \|\mathcal{P}(x_0, f(x_0))\|_E$.

Доказательство. Покажем, что для функции $\alpha\colon X \to E_+$, $\alpha(x) = \mathcal{P}(x,f(x))$ выполнено условие $(\mathcal{H}\alpha)$. Пусть $x_n \underset{\mathcal{P}}{\longrightarrow} x'$, $\|\alpha(x_n)\|_E = \|\mathcal{P}(x_n,f(x_n)\|_E \to 0$. Но это означает, что $f(x_n) \underset{\mathcal{P}}{\longrightarrow} x'$ и в силу замкнутости f получаем $x' = f(x')$, т. е., $\alpha(x') = \theta$. Тогда утверждение вытекает из Теоремы 3.1.

Теорема доказана.

В качестве следствия мы можем получить следующий аналог теоремы Руса о неподвижной точке (см. I. A. Rus [14]) для случая обобщенных метрических пространств.

Теорема 4.2. *Пусть E — банахово пространство; $(X,\mathcal{P})$ — полное ОМП; операторная функция $M\colon E_+ \to \mathcal{L}_+(E)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$(\mathcal{H}M1)$ для любых $e \in E_+, x \in E_+$ выполнено $M(e)x \leqslant x$;

$(\mathcal{H}M2)$ для любого $r > 0$ существует $m_r \in [0,1)$ такое, что

$$\|M(e)\| \leqslant m_r, \ \ \forall e \in E_+, \|e\|_E \leqslant r.$$

Пусть $f\colon X \to X$ — замкнутое отображение такое, что для каждого $x \in X$ выполнено

$$\mathcal{P}(f(x), f^2(x)) \leqslant M\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\mathcal{P}(x,f(x)). \tag{9}$$

Тогда для любого $x_0 \in X$ найдется неподвижная точка $x_\star \in X$, $x_\star = f(x_\star)$ отображения f такая, что

$$\|\mathcal{P}(x_0,x_\star)\|_E \leqslant \frac{4a_0(1+m_{a_0})}{(1-m_{a_0})^2}, \tag{10}$$

где $a_0 = \|\mathcal{P}(x_0, f(x_0))\|_E$.

Доказательство. Рассмотрим операторную функцию

$$C(e) = \frac{1}{2}(I - M(e)), \ e \in E_+,$$

где $I\colon E \to E$ — тождественный оператор. Из условия $(\mathcal{H}M1)$ следует, что $C(e)$ — положительный оператор для любого $e \in E_+$, а из условия $(\mathcal{H}M2)$ и теоремы Банаха (см., например, [6], Теорема V.4.3) вытекает, что оператор $C(e)$ обратим для любого $e \in E_+$. Более того, для любого $e \in E_+$, $\|e\|_E \leqslant r$ имеем

$$\inf_{\|x\|_E=1} \|C(e)x\|_E = \frac{1}{2} \inf_{\|x\|_E=1} \|x - M(e)x\|_E \geqslant \frac{1}{2}(1 - \sup_{\|x\|_E=1} \|M(e)x\|_E)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(1 - \sup_{\|e\|_E \leqslant r} \|M(e)\|) \geqslant \frac{1}{2}(1 - m_r) = c_r > 0.$$

Далее, из представления

$$C^{-1}(e) = 2(I + M(e) + M^2(e) + ...)$$

вытекает, что оператор $C^{-1}(e)$ положителен для любого $e \in E_+$.

Таким образом, для операторной функции $C(e)$ выполнены условия $(\mathcal{H}C1)$ - $(\mathcal{H}C3)$.

Рассмотрим теперь операторную функцию

$$K(e) = \frac{1}{2}(I + M(e)), \ e \in E_+.$$

Ясно, что $K(e)$ — положительный оператор для любого $e \in E_+$. Имеем для $\|e\|_E \leqslant s$:

$$\|K(e)\| = \frac{1}{2}\|I + M(e)\| \leqslant \frac{1}{2}(1 + m_s) = k_s < 1,$$

т. е., для $K(e)$ выполнено условие $(\mathcal{H}K)$.

Перепишем теперь условие (9) в виде

$$\mathcal{P}(f(x),f^2(x))+\frac{1}{2}\Big[I-M\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\Big]\mathcal{P}(x,f(x))\leqslant\frac{1}{2}\Big[I+M\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\Big]\mathcal{P}(x,f(x)).$$

Полагая $y=f(x)$, приходим к соотношению

$$\mathcal{P}(y,f(y))+C\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\mathcal{P}(x,y)\leqslant K\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\mathcal{P}(x,f(x))$$

и утверждение следует из Теоремы 4.1.

Теорема доказана.

Из доказанного утверждения в свою очередь вытекает следующее обобщение теоремы Кэннана (R. Kannan, см. [14]).

Теорема 4.3. *Пусть E — банахово пространство; $(X,\mathcal{P})$ — полное ОМП; операторная функция $Q\colon E_+\to\mathcal{L}_+(E)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$(\mathcal{H}Q1)$ *для любого $r>0$ найдется $q_r\in[0,\frac{1}{2})$ такое, что*

$$\|Q(e)\|\leqslant q_r,\ \ \forall e\in E_+,\|e\|_E\leqslant r;$$

$(\mathcal{H}Q2)$ *для любых $e\in E_+$, $x\in E_+$ выполнено*

$$(I-Q(e))^{-1}Q(e)x\leqslant x.$$

Пусть $f\colon X\to X$ — замкнутое отображение такое, что для любых $x,y\in X$ выполнено

$$\mathcal{P}(f(x),f(y))\leqslant Q\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\big[\mathcal{P}(x,f(x)))+\mathcal{P}(y,f(y))\big]. \tag{11}$$

Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку $x_\star$ и для любого $x_0\in X$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{P}(x_0,x_\star)\|_E\leqslant\frac{4a_0(1-q_{a_0})}{(1-2q_{a_0})^2}, \tag{12}$$

где $a_0=\|\mathcal{P}(x_0,f(x_0))\|_E$.

Доказательство. Заметим, что в силу теоремы Банаха из условия $(\mathcal{H}Q1)$ вытекает, что оператор $(I-Q(e))^{-1}$ корректно определен и, более того, для любого $e\in E_+$, $\|e\|_E\leqslant r$ выполнено

$$\|(I-Q(e))^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-q_r}.$$

Кроме того, как уже отмечалось, оператор $(I-Q(e))^{-1}$ является положительным.

Для заданного $x\in X$ положим $y=f(x)$. Тогда соотношение (11) запишется в виде

$$\mathcal{P}(f(x),f^2(x))\leqslant Q\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\big[\mathcal{P}(x,f(x)))+\mathcal{P}(f(x),f^2(x))\big],$$

откуда

$$\Big[I-Q\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\Big]\mathcal{P}(f(x),f^2(x))\leqslant Q\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\mathcal{P}(x,f(x))$$

и

$$\mathcal{P}(f(x),f^2(x))\leqslant\Big[I-Q\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\Big]^{-1}Q\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\mathcal{P}(x,f(x)).$$

В силу условия $(\mathcal{H}Q2)$ для оператора $M(e)=(I-Q(e))^{-1}Q(e)$ выполнено условие $(\mathcal{H}M1)$.

Далее, пусть $\|e\|_E \leqslant r$. Тогда

$$\|M(e)\| \leqslant \|(I - Q(e))^{-1}\| \cdot \|Q(e)\| \leqslant \frac{q_r}{1 - q_r} < 1$$

и условие $(\mathcal{H}M2)$ также выполнено.

Существование неподвижной точки $x_\star$ отображения f, удовлетворяющей для любого $x_0 \in X$ оценке (12) вытекает теперь из Теоремы 4.2.

Если теперь $x_\star, y_\star$ — две неподвижные точки отображения f, то для них правая часть соотношения (11) равна θ, но тогда $\mathcal{P}(f(x_\star), f(y_\star)) = \mathcal{P}(x_\star, y_\star) = \theta$, т. е. $x_\star = y_\star$.

Теорема доказана.

Другим следствием Теоремы 4.2 является следующая версия принципа сжимающих отображений в обобщенных метрических пространствах.

Теорема 4.4. *Пусть E — банахово пространство; $(X, \mathcal{P})$ — полное ОМП и операторная функция $M\colon E_+ \to \mathcal{L}_+(E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{H}M1)$ и $(\mathcal{H}M2)$. Пусть отображение $f\colon X \to X$ таково, что для любых $x,y \in X$ выполнено*

$$\mathcal{P}(f(x),f(y)) \leqslant M\Big(\mathcal{P}(x,f(x))\Big)\mathcal{P}(x,y). \tag{13}$$

Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку $x_\star$, которая для любого $x_0 \in X$ удовлетворяет оценке (10).

Доказательство. Отметим, что замкнутость отображения f вытекает из соотношения (13). Полагая $y = f(x)$, приведем соотношение (13) к (9) и тогда утверждение следует из Теоремы 4.2.

Теорема доказана.

Выведем теперь из Теоремы 3.1 следующую теорему о неподвижной точке типа Каристи (см. [10], [7], [11]) для многозначного отображения в обобщенном метрическом пространстве.

Пусть $(X, \mathcal{P})$ — полное ОМП. Обозначим $P(X)$ совокупность всех непустых подмножеств X. Пусть E — нормированное пространство.

Теорема 4.5. *Пусть функция $\alpha\colon X \to E_+$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H}\alpha)$; операторные функции $C, K\colon E_+ \times E_+ \to \mathcal{L}_+(E)$ удовлетворяют условиям $(\mathcal{H}C1)$ — $(\mathcal{H}C3)$ и $(\mathcal{H}K)$ соответственно. Пусть многозначное отображение $F\colon X \to P(X)$ таково, что для любой точки $x \in X$ найдется $y \in F(x)$ такое, что*

$$\alpha(y) + C\Big(\alpha(x), \alpha(y)\Big)\mathcal{P}(x,y) \leqslant K\Big(\alpha(x), \alpha(y)\Big)\alpha(x). \tag{14}$$

Тогда для любого $x_0 \in X$ существует неподвижная точка $x_\star \in X$ многозначного отображения F: $x_\star \in F(x_\star)$, удовлетворяющая оценке

$$\|\mathcal{P}(x_0,x_\star)\|_E \leqslant \frac{2a_0 k_{a_0}}{c_{a_0}(1 - k_{a_0})}, \tag{15}$$

где $a_0 = \|\alpha(x_0)\|_E$.

Доказательство. Из Теоремы 3.1 вытекает, что существует точка $x_\star \in X$, удовлетворяющая оценке (15) и такая, что $\alpha(x_\star) = \theta$. Пусть $y_\star \in F(x_\star)$ — соответствующая точка такая, что для пары $(x_\star, y_\star)$ выполнено соотношение (14). Но тогда $\mathcal{P}(x_\star,y_\star) = \theta$, т. е., $x_\star = y_\star$.

Теорема доказана.

Замечание 4.1 Если соотношение (14) выполняется для всех $y \in F(x)$, то $F(x_\star) = \{x_\star\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов, А. В. Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения / А. В. Арутюнов // Труды МИАН. — 2015. — Т. 291. — С. 30–44.

2. Арутюнов, А. В. Минимум функционала в метрическом пространстве и неподвижные точки / А. В. Арутюнов, Б. Д. Гельман // Журнал вычисл. математ. и матем. физики. — 2009. — Т. 49, № 7. — С. 1167–1174.

3. Гельман, Б. Д. Неравенство Каристи и обобщенные сжатия (случай однозначных отображений) / Б. Д. Гельман // Вестник Тамбовского университета. — 2018. — Т. 23, № 122. — С. 243–249.

4. Гельман, Б. Д. Неравенство Каристи и α-сжимающие отображения / Б. Д. Гельман // Функц. анализ и его прил. — 2019. — Т. 53, № 3. — С. 84–88.

5. Жуковский, Е. С. О неподвижных точках многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой / Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 24, № 1. — С. 93–105.

6. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977.

7. Обен, Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения / Ж.-П. Обен. — М. : Мир, 1988.

8. Перов, А. И. О задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений / А. И. Перов // В кн. : Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. — Киев : Наукова думка, 1964. — Вып. 2. — С. 115–134.

9. Перов, А. И. Обобщенный принцип сжимающих отображений / А. И. Перов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2005. — № 1. — С. 196–207.

10. Caristi, J. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions / J. Caristi // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — V. 215. — P. 241–251.

11. Granas, A. Fixed Point Theory / A. Granas, J. Dugundji. — New York : Springer-Verlag, 2003.

12. Nadler, S. B. Jr. Multi-valued contraction mappings / S. B. Nadler Jr. // Pacific J. Math. — 1969. — V. 30. — P. 475–488.

13. Obukhovskii, V. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications / V. Obukhovskii, B. Gel'man. — World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, 2020.

14. Rus, I. A. Generalized Contractions and Applications / I. A. Rus. — Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

REFERENCES

1. Arutyunov A.V. The Caristi condition and the existence of a minimum of a function bounded below in a metric space. Applications to the theory of coincidence points. [Arutyunov A.V. Uslovie Caristi i suchshestvovanie minimuma ogranichennoi snizu funktsii v metricheskom prostranstve. Priolozheniya k teorii tochek sovpadeniya]. *Trudy MIAN — Proceedings of MIAN*, 2015, vol. 291, pp. 30–44.

2. Arutyunov A.V., Gelman B.D. Minimum of a functional in a metric space and fixed points. [Arutyunov A.V., Gel'man B.D. Minimum funktsionala v metricheskom prostranstve i nepodvizhnye tochki]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, no. 7, pp. 1167–1174.

3. Gelman B.D. Caristi's inequality and generalized contractions (the case of single-valued mappings). [Gel'man B.D. Neravenstvo Caristi i obobchshennye szhatiya (sluchai odnoznachnyh

otobrazhenii)]. *Vestnik Tambovskogo Universiteta — Bulletin of Tambov University*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 243–249.

4. Gelman B.D. Caristi's inequality and α-contraction mappings. [Gel'man B.D. Neravenstvo Caristi i α-szhimayuchshie otobrazheniya]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 2019, vol. 53, no. 3, pp. 84–88.

5. Zhukovsky E.S., Panasenko E.A. On fixed points of set-valued mappings in spaces with a vector-valued metric. [Zhukovskii E.S., Panasenko E.A. O nepodvizhnyh tochkah mnogoznachnyh otobrazhenii v prostranstvah s vektornoznachnoi metrikoi]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN — Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2019, vol. 24, no. 1, pp. 93–105.

6. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional Analysis. [Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsionalnyi analiz]. Moskow: Nauka, 1977.

7. Aubin J.-P. Nonlinear analysis and its economic applications. [Aubin J.-P. Nelineinyi analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya]. Moskow, Mir, 1988.

8. Perov A.I. On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. [Perov A.I. O zadache Cauchy dlya sistemy obyknovennyh differentsialnyh uravnenii]. In: Priblizhennye metody resheniya differentsialnyh uravnenii. Naukova dumka, Kiev, 1964, vol. 2, pp. 115–134.

9. Perov A.I. Generalized contraction mapping principle. [Perov A.I. Obobchshennyi printsip szhimayuchshih otobrazhenii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2005, no. 1, pp. 196–207.

10. Caristi J. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, vol. 215, pp. 241–251.

11. Granas A., Dugundji J. Fixed Point Theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.

12. Nadler S. B. Jr. Multi-valued contraction mappings. Pacific J. Math., 1969, vol. 30, pp. 475–488.

13. Obukhovskii V., Gel'man B. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, 2020.

14. Rus I.A. Generalized Contractions and Applications. Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, физико-математический факультет, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Obukhovskii Valerii Vladimirovich, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Tel.: +7(473)255–36–63

Ульвачёва Татьяна Александровна, аспирант, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: tanya438@mail.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Ul'vacheva Tatyana Aleksandrovna, Post graduate student, Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: tanya438@mail.ru
Tel.: +7(473)255–36–63