УДК 517.927.2

СЛУЧАЙНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ НАПРАВЛЯЮЩАЯ ФУНКЦИЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НОРМАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ*

С. В. Корнев*, Е. Н. Гетманова, П. С. Корнева****

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 10.01.2023 г.

Аннотация. На основе теории случайной топологической степени совпадения развивается метод случайных интегральных направляющих функций, который применяется в исследовании периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с нормальной правой частью в конечномерных пространствах.

Ключевые слова: функционально-диффенциальное включение, периодическая задача, нормальное мультиотображение, случайная интегральная направляющая функция.

RANDOM INTEGRAL GUIDING FUNCTION TO THE PERIODIC PROBLEM FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH REGULAR RIGHT–HAND SIDE

S. V. Kornev, E. N. Getmanova, P. S. Korneva

Abstract. Using the random coincidence topological degree theory we develop the method of random integral guiding functions and apply it to the study of the periodic problem for random functional differential inclusions with regular right-hand side in finite-dimensional spaces.

Keywords: functional-differential inclusion, periodic problem, regular multimap, random integral guiding function.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод направляющих функций был разработан Красносельским М. А. и Перовым А. И. для исследования периодических колебаний в динамических системах, описываемых дифференциальными уравнениями (см. [13] – [16]). На случай дифференциальных включений данный метод был распространен Борисовичем Ю. Г., Гельманом Б. Д., Мышкисом А. Д., Обуховским В. В. (см. [2]). Метод интегральных направляющих функций, впервые введенный A. Fonda [20] для функционально-дифференциальных уравнений, был распространен на случай функционально-дифференциальных включений в работах Обуховского В. В. и Корнева С. В. (см., например, [4], [23]). В последние десятилетия метод направляющих функций был развит в различных направлениях (см., например, [3], [6] – [12], [21], [26]).

В последние годы активно изучаются системы, описываемые случайными дифференциальными уравнениями и включениями (см., например, [17], [24], [25]). В настоящей работе

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минпросвещения России в рамках государственного задания (FZGF–2020–0009).

** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22–71–10008.

метод случайных интегральных направляющих функций применяется к задаче о существовании периодических колебаний случайных функционально-дифференциальных включений с нормальной правой частью.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним основные понятия теории многозначных отображений (см., например, [1], [2], [18], [21], [22]) и теории степени совпадения (см., например, [5], [27]).

Определение 1. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *компактным*, если область значений $F(X)$ относительно компактна в Y, т.е. $\overline{F(X)}$ компактно в Y.

Пусть (X,d_X) и (Y,d_Y) являются метрическими пространствами и $I = [0,T]$. Символами $P(Y)$, $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y. Если Y – нормированное пространство, то символами $Cv(Y)$, $Kv(Y)$ обозначаются совокупности всех непустых выпуклых, соответственно, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y.

Определение 2. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0,x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε-окрестность множества.

Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *полунепрерывным сверху (пн.св.)*, если оно пн.св. в каждой точке $x \in X$.

В дальнейшем пн. св. и компактное мультиотображение $F : X \to P(Y)$ будем называть просто компактным. Мультиотображение будем называть *мультифункцией*, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Пусть I — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

Определение 3. Мультифункция $F : I \to K(Y)$ называется *измеримой*, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$$

— измеримое подмножество I.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $l : \operatorname{dom} l \subseteq E_1 \to E_2$ — линейный (необязательно непрерывный) оператор.

Теорема 4. *Пусть* $p : E_1 \to E_1$ *— линейный оператор проектирования такой, что* $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} l$. *Тогда:*
1) оператор $l_p : \operatorname{dom} l \cap \operatorname{Ker} p \to \operatorname{Im} l$, *заданный как* $l_p(x) = l(x)$ *для всех* $x \in \operatorname{dom} l \cap \operatorname{Ker} p$ *является линейным изоморфизмом;*
2) оператор $k_p : \operatorname{Im} l \to \operatorname{dom} l \cap \operatorname{Ker} p$, *заданный как* $k_p = l_p^{-1}$, *удовлетворяет соотношению* $k_p \circ l(x) = x - p(x)$ *для всех* $x \in \operatorname{dom} l$.

Определение 5. Линейный оператор $l : \operatorname{dom} l \subseteq E_1 \to E_2$ называется *линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса*, если $\operatorname{Ker} l$ и $\operatorname{Coker} l = E_2/\operatorname{Im} l$ конечномерны и $\dim \operatorname{Ker} l = \dim \operatorname{Coker} l$.

Теорема 6. *Пусть* $l : \operatorname{dom} l \to E_2$ *— линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что* $\operatorname{Im} l \subset E_2$ *— замкнутое множество. Тогда*

$i)$ существуют линейные непрерывные операторы проектирования $p : E_1 \to E_2, q : E_2 \to E_2$ такие, что $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} l$ *и* $\operatorname{Im} l = \operatorname{Ker} q$*;*
$ii)$ канонический оператор проектирования $\pi : E_2 \to E_2/\operatorname{Im} l$, заданный как

$$\pi(y) = y + \operatorname{Im} l,$$

является непрерывным линейным оператором;
$iii)$ существует непрерывный линейный изоморфизм $\varphi : \operatorname{Coker} l \to \operatorname{Ker} l$;
$iv)$ уравнение $l(x) = y, y \in E_2$, является эквивалентным уравнению $(i-p)x = (\varphi\circ\pi + k_{p,q})(y)$, где i – тождественный оператор в E_1, а оператор $k_{p,q} : E_2 \to E_1$ задан соотношением

$$k_{p,q}(y) = k_p(y - q(y)).$$

Пусть U — открытое ограниченное подмножество E_1.

Определение 7. Пн. св. мультиотображение $F : \overline{U} \to K(E_1)$ называется *l-компактным*, если композиция

$$(\varphi \circ \pi + k_{p,q}) \circ F : \overline{U} \to K(E_1)$$

является компактным мультиотображением.

Замечание 8. Приведенное выше определение l-компактного мультиотображения не зависит от выбора линейных операторов проектирования $p : E_1 \to E_2$ и $q : E_1 \to E_2$, а также изоморфизма $\varphi : \operatorname{Coker} l \to \operatorname{Ker} l$.

Приведем некоторые сведения из теории случайных многозначных отображений и случайной топологической степени (см., например, [17]).

Пусть (Ω,Σ) — полное измеримое пространство.

Определение 9. Мультиотображение $\mathcal{F}\colon \Omega \times X \to C(Y)$ называется *случайным мультиоператором*, если оно измеримо относительно $\Sigma\otimes\mathbb{B}(X)$, где $\Sigma\otimes\mathbb{B}(X)$ — наименьшая σ-алгебра на $\Omega \times X$, включающая все множества $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathbb{B}(X)$ и $\mathbb{B}(X)$ обозначает борелевскую σ-алгебру на X. Если, кроме того, $\mathcal{F}(\omega, \cdot)\colon X \to C(Y)$ полунепрерывно сверху для всех $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{F}$ называется *случайным u-мультиоператором.*

Определение 10. Случайное мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \to C(Y)$ называется *случайным l-мультиотображением*, если для любого $\omega \in \Omega$ случайное мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \to C(Y)$ полунепрерывно снизу.

Определение 11. Пусть $A \subset Y$ — замкнутое подмножество и $\mathcal{F}\colon \Omega\times A \to P(Y)$ — случайный мультиоператор. *Случайной неподвижной точкой* ξ мультиоператора $\mathcal{F}$ называется измеримая функция $\xi\colon \Omega \to A$ такая, что

$$\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega,\xi(\omega)) \text{ для всех } \omega \in \Omega.$$

Теорема 12. *Пусть Y — сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{F}\colon \Omega\times Y \to C(Y)$ — случайный u-мультиоператор. Если для каждого $\omega \in \Omega$ множество*

$$Fix\mathcal{F}_\omega := \{x \in Y : x \in \mathcal{F}(\omega,x)\}$$

неподвижных точек мультиоператора $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}(\omega,\cdot)$ непусто и замкнуто, то $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

Определение 13. Мультиоператор $\mathcal{F}\colon \Omega \times X \to K(Y)$ называется *случайным компактным u-мультиоператором,* если он является случайным u-мультиоператором и для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{F}(\omega,\cdot)\colon X \to K(Y)$ является компактным.

Пусть Y — сепарабельное банахово пространство, $U \subset Y$ — открытое ограниченное подмножество и $\mathcal{F}\colon \Omega \times \overline{U} \to Kv(Y)$ — случайный компактный u-мультиоператор такой, что $x \notin \mathcal{F}(\omega,x)$ для всех $x \in \partial U$ и для всех $\omega \in \Omega$, где ∂U обозначает границу множества U. Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень соответствующего многозначного векторного поля $deg\big(i - \mathcal{F}(\omega,\cdot), \overline{U}\big)$ корректно определена (см., например, [2], [18], [21]). Случайная топологическая степень многозначного векторного поля $i - \mathcal{F}$ на $\overline{U}$ определяется следующим образом (см. [17]):

$$D(i - \mathcal{F},\overline{U}) := \Big\{deg\big(i - \mathcal{F}(\omega,\cdot), \overline{U}\big) \mid \omega \in \Omega\Big\}.$$

Из того, что топологическая степень $deg\big(i - \mathcal{F}(\omega,\cdot), \overline{U}\big) \neq 0$ для каждого $\omega \in \Omega$, следует, что случайная топологическая степень $D(i - \mathcal{F},\overline{U}) \neq 0$.

Теорема 14. *Если случайная топологическая степень $D(i-\mathcal{F},\overline{U}) \neq 0$, то мультиоператор $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку в U, т.е., существует измеримая функция $\xi\colon \Omega \to U$ такая, что $\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega,\xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Пусть X, Y — сепарабельные банаховы пространства, $U \subset Y$ — открытое ограниченное подмножество, $l : \operatorname{dom} l \subseteq X \to Y$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и случайный мультиоператор $\mathcal{F} : \Omega \times \overline{U} \to Cv(Y)$ удовлетворяет условиям:

i) для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ является l-компактным мультиотображением;

ii) для всех $x \in \partial U \cap \operatorname{dom} l$ и $\omega \in \Omega$ имеем $lx \notin \mathcal{F}(\omega, x)$.

Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень совпадения пары $(l,\mathcal{F}(\omega, \cdot))$ определяется как

$$\deg(l,\mathcal{F}(\omega, \cdot),\overline{U}) := \deg(\Phi(\omega, \cdot),\overline{U}), \quad \text{где}$$

$$\Phi(\omega, x) = p(x) + (\varphi \circ \pi + k_{p,q}) \circ \mathcal{F}(\omega, x).$$

Случайная топологическая степень совпадения пары $(l,\mathcal{F})$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{Deg}(l,\mathcal{F},\overline{U}) := \{\deg(l,\mathcal{F}(\omega, \cdot),\overline{U}) \mid \omega \in \Omega\}.$$

Говорят, что случайная топологическая степень совпадения $\operatorname{Deg}(l,\mathcal{F},\overline{U})$ пары $(l,\mathcal{F})$ отлична от нуля, если топологическая степень совпадения $\deg(l,\mathcal{F}(\omega, \cdot),\overline{U}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определенная таким образом случайная топологическая степень совпадения обладает всеми основными свойствами степени совпадения. В частности, справедлив следующий общий принцип.

Теорема 15. *Если случайная топологическая степень совпадения $\operatorname{Deg}(l,\mathcal{F},\overline{U}) \neq 0$, то существует случайная точка совпадения для данной пары $(l,\mathcal{F})$, т.е. измеримая функция $\xi : \Omega \to U$ такая, что $l\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Приведем пример реализации общего принципа.

Теорема 16. *Пусть $\mathcal{F} : \Omega \times \overline{U} \to Kv(E_2)$ — случайный u-мультиоператор. Предположим, что мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ — l-компактно при каждом $\omega \in \Omega$ и выполнены следующие условия:*
i) $lx \notin \lambda\mathcal{F}(\omega,x)$, *для всех* $\lambda \in (0,1), x \in \operatorname{dom} l \cap \partial U$, $\omega \in \Omega$;
ii) $0 \notin \pi\mathcal{F}(\omega,x)$ *для всех* $x \in \operatorname{Ker} l \cap \partial U$, $\omega \in \Omega$;
iii) $\deg_{\operatorname{Ker} l}(\varphi\pi\mathcal{F}(\omega, \cdot)|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}},\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0$ *для всех* $\omega \in \Omega$.

Тогда случайная топологическая степень совпадения $\operatorname{Deg}(l,\mathcal{F},U) \neq 0$, *и, следовательно, существует случайная точка совпадения пары* $(l,\mathcal{F})$.

Определение 17. Отображение $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *случайным потенциалом*, если выполнены следующие условия:

(i) $V(\cdot,x) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ является измеримым для каждого $x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $V(\omega,\cdot) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является C^1-отображением для каждого $\omega \in \Omega$.

Определение 18. Случайный потенциал V называется *случайным невырожденным потенциалом*, если найдется $R_0 > 0$ такое, что

$$\nabla V(\omega, z) = \left(\frac{\partial V(\omega, z)}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial V(\omega, z)}{\partial z_n} \right) \neq 0$$

для всех $(\omega,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \colon |z| \geqslant R_0$.

Замечание 19. Из определения случайного невырожденного потенциала V вытекает, что на каждом замкнутом шаре $B_{\widetilde{K}} \subset \mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $\widetilde{K} \geqslant K$ случайная топологическая степень $D(\nabla V, B_{\widetilde{K}})$ корректно определена и, более того, ее значения не зависят от радиуса $\widetilde{K}$. Это общее значение степени называется случайным индексом на бесконечности $Ind(V,\infty)$ случайного невырожденного потенциала V.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Случайная интегральная направляющая функция для выпуклой компактной правой части

Для $\tau > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x : [-\tau,0] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in [-\tau,0]} \|x(t)\|$ и пусть $I = [0,T], T > 0$. Для функции $x(\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau,0]$.

Будем рассматривать периодическую задачу для случайного функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(\omega,t) \in \mathcal{F}\big(\omega, t, x_t\big), \tag{3.1}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega,T), \tag{3.2}$$

для всех $\omega \in \Omega$, где мультиотображение $\mathcal{F} \colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(\mathcal{F}_t)$ мультифункция $\mathcal{F}$ по второму аргументу T-периодична:

$$\mathcal{F}(\omega, t, \varphi) = \mathcal{F}(\omega, t + T, \varphi) \ \text{ для всех } \ \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C};$$

$(\mathcal{F}1)$ $\mathcal{F} : \Omega \times I \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ является случайным u-мультиоператором;

$(\mathcal{F}2)$ существует отображение $c : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ такое, что $c(\omega,\cdot) \in L^2(I)$ на $\mathbb{R}$ для каждого $\omega \in \Omega$, $c(\cdot,t)$ – измеримо п.в. $t \in I$ и

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, \varphi)\| := sup\{|z| : z \in \mathcal{F}(\omega, t, \varphi)\} \leqslant c(\omega,t)(1 + |\varphi|);$$

Под случайным решением задачи (3.1), (3.2) понимается функция $\xi : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ такая, что

(i) для каждого $\omega \in \Omega$ абсолютно непрерывная функция $\xi(\omega,\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R})$ удовлетворяет (3.1), (3.2);

(ii) оператор $\omega \in \Omega \to \xi(\omega,\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$ измерим.

Из условий $(\mathcal{F}1), (\mathcal{F}2)$ следует, что случайный мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} : \Omega \times C([-\tau, T], \mathbb{R}^n) \multimap P(L^2(I, \mathbb{R}^n)),$$

где

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : f(s) \in \mathcal{F}(\omega, s, x_s)\} \quad \text{п.в. } s \in I$$

корректно определен. Кроме того, для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, \cdot)$ замкнут (см., например, [2]).

Для изучения задачи (3.1), (3.2) будем использовать теорию случайной топологической степени совпадения пары отображений, изложенную в предыдущем параграфе.

Обозначим C_T пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t \in [0,T]} \|x(t)\|$. Через $\|x\|_2$ обозначим норму функции x в пространстве $L^2, \|x\|_2 = (\int_0^T \|x(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$.

Определение 20. Случайный невырожденный потенциал $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется случайной обобщенной интегральной направляющей функцией для задачи (3.1), (3.2), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, x(s)), f_\omega \rangle ds \geqslant 0 \quad \text{хотя бы для одного } \; f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_s) \tag{3.3}$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geqslant N$ и $\|x'(\omega, t)\| \leqslant \|\mathcal{F}(\omega, t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

В случае, если соотношение (3.3) выполняется для всех $f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)$, то случайный невырожденный потенциал V называется случайной интегральной направляющей функцией.

Теорема 21. *Пусть выполнены условия $(\mathcal{F}_t)$, $(\mathcal{F}1)$, $(\mathcal{F}2)$. Если $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – случайная обобщенная интегральная направляющая функция задачи (3.1), (3.2) такая, что*

$$\operatorname{Ind}(V, \infty) \neq 0,$$

то задача (3.1), (3.2) имеет случайное решение.

Доказательство. Определим случайное мультиотображение (см. [17], [21]):

$$B : \Omega \times C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n) \to P(L^2[0,T], \mathbb{R})$$

следующим образом:

$$B(\omega, x) = \{\varphi_\omega : |\varphi_\omega(t)| \leqslant c(\omega, t)(1 + \|x_t\|) \text{ и } \gamma(x) \int_0^T \langle \nabla V(\omega, x(s)), \varphi_\omega(s) \rangle ds \geqslant 0\}, \text{ п.в. } t \in [0, T],$$

где $c(\omega, t)$ – функция из условия подлинейного роста, а

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \; x \in \{\|x\|_2 \leqslant N\}, \\ 1, & \text{если } \; x \in \{\|x\|_2 > N\}. \end{cases}$$

Заметим, что для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $B(\omega, \cdot)$ замкнуто.

Определим мультиотображение

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^B(\omega, x) = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x) \cap B(\omega, x).$$

Для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{P}^B_{\mathcal{F}}(\omega,\cdot)$ замкнуто как пересечение замкнутых мультиотображений, соответственно, соотношение (3.3) будет выполняться для всех $f_\omega \in \mathcal{P}^B_{\mathcal{F}}(\omega,x)$.

Для случайного невырожденного потенциала V определим отображение $Y_V : \Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$Y_V(\omega,x) = \begin{cases} \nabla V(\omega,x), & \text{если } \|\nabla V(\omega,x)\| \leqslant 1, \\ \frac{\nabla V(\omega,x)}{\|\nabla V(\omega,x)\|}, & \text{если } \|\nabla V(\omega,x)\| > 1. \end{cases}$$

Причем для каждого $\omega \in \Omega$ отображение $Y_V(\omega,\cdot)$ непрерывно.

Пусть для некоторого $\varepsilon_m > 0$ мультиотображение

$$\mathcal{G}_m : \Omega \times C([-\tau,T];\mathbb{R}) \to P(L^2([0,T];\mathbb{R}^n))$$

задано как

$$\mathcal{G}_m(\omega,x) = \mathcal{P}^B_{\mathcal{F}}(\omega,x) + \varepsilon_m Y_V(\omega,x).$$

Для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{G}_m(\omega,\cdot)$ замкнуто и для каждого $\varepsilon_m > 0$ соотношение (3.3) будет выполняться уже не только для всех $g_\omega \in \mathcal{G}_m(\omega,x)$, но и в строгой форме.

Воспользуемся Теоремой 16. Рассмотрим следующие операторы:

$$l\,:\,\mathrm{dom}\,l := \{x \in C_T\,:\, x \text{ – абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^2_T,$$

$$l(x) = x'$$

и мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\,:\,\Omega \times C_T \multimap P(L^2_T)$.

Легко видеть, что l – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, $\mathrm{Ker}\,l = \mathbb{R}^n$. Проекция $\pi\,:\,L^2_T \to \mathbb{R}^n$ может быть задана формулой $\pi f = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s)\,ds$.

Отметим, что для произвольного фиксированного $\omega \in \Omega$ решение $x_\omega \in \mathrm{dom}\ l$ включения $l(x) \in \lambda\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega,x_t)$, $\lambda \in (0,1)$, удовлетворяет задаче

$$x'_\omega(t) = \lambda f_\omega(t) \quad \text{п.в. } t \in [0,T], \tag{3.4}$$

$$x_\omega(0) = x_\omega(T), \tag{3.5}$$

где $f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega,x_t)$.

Тогда

$$\int_0^T \langle\nabla V(\omega,x_\omega(s)),f_\omega(s)\rangle\,ds = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \langle\nabla V(\omega,x_\omega(s)),x'_\omega(s)\rangle\,ds =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^T V'(\omega,x_\omega(s))\,ds = \frac{1}{\lambda}(V(\omega,x_\omega(T)) - V(\omega,x_\omega(0))) = 0,$$

откуда следует, что

$$\|x_\omega\|_2 < N.$$

С другой стороны, из условия $(\mathcal{F}_2)$ вытекает, что $\|x'\|_2 < M$, где $M > 0$. Но тогда найдется и $M' > 0$ такое, что

$$\|x\|_C < M'.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ радиуса $r = \max\{N,M',NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$

$$l(x) \notin \lambda\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega,x_t)$$

для всех $x \in \partial U, \lambda \in (0,1)$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geqslant NT^{-1/2}$, из определения случайной строгой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, u), f_\omega(s)\rangle\, ds > 0$$

для любого измеримого сечения $f_\omega(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, u)$, для всех $\omega \in \Omega$. Но для каждого $\omega \in \Omega$

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, u), f_\omega(s)\rangle\, ds = \langle \nabla V(\omega, u), \int_0^T f_\omega(s)\, ds\rangle = T\langle \nabla V(\omega, u), \pi f_\omega\rangle > 0,$$

и, таким образом,

$$\langle \nabla V(\omega, u), y\rangle > 0$$

для любого $y \in \pi\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega,u), \omega \in \Omega$.

Это значит, что $0 \notin \pi\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, u)$ для $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$, $\omega \in \Omega$ и

$$\deg(\pi\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\big|_{\overline{U}_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) = \deg(\nabla V, \overline{U}_{\operatorname{Ker} l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\operatorname{Ker} l} = \overline{U} \cap \operatorname{Ker} l$. Таким образом, все условия Теоремы 16 выполнены и задача (3.1), (3.2) имеет решение.

Следствие 22. *Пусть $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – случайная интегральная направляющая функция задачи (3.1), (3.2) такая, что*

$$\operatorname{Ind}(V, \infty) \neq 0.$$

Тогда задача (3.1), (3.2) имеет случайное решение.

3.2. Случайная интегральная направляющая функция для нормальной правой части

Будем расматривать теперь периодическую задачу для функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(\omega,t) \in \mathcal{R}\big(\omega, t, x_t\big), \text{ п.в. } t \in [0, T] \tag{3.6}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega,T), \tag{3.7}$$

для всех $\omega \in \Omega$, где мультиотображение $\mathcal{R}\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(\mathcal{R}_t)$ мультифункция $\mathcal{R}$ по второму аргументу T-периодична:

$$\mathcal{R}(\omega, t, \varphi) = \mathcal{R}(\omega, t + T, \varphi) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega, \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение $\mathcal{R}$ заданным на $I \times \mathcal{C}$);

$(\mathcal{R}_1)$ существует функция $c : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ такая, что $c(\omega,\cdot)$ – локально интегрируема на I для каждого $\omega \in \Omega$, $c(\cdot,t)$ – измерима для п.в. $t \in I$, и выполнено соотношение

$$\|\mathcal{R}(\omega,t,\varphi)\| := \sup\{|z|\colon z \in \mathcal{R}(\omega,t,\varphi)\} \leqslant c(\omega,t)(1 + |\varphi|);$$

$(\mathcal{R}2)$ случайный мультиоператор $\mathcal{R}\colon \Omega \times I \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ является случайным нормальным мультиоператором, то есть $i)$ мультиотображение $\mathcal{G}$ является случайным u-мультиотображением, удовлетворяющим условию подлинейного роста;

ii) $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\omega, \varphi) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega, \varphi) \neq \varnothing$ для всех $\omega \in \Omega, \varphi \in \mathcal{C}$;

iii) каждое случайное решение $x : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ задачи

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{G}(\omega, t, x_t) \tag{3.8}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T) \tag{3.9}$$

является также случайным решением задачи (3.6), (3.7). В этом случае $\mathcal{G}$ называется случайным нормальным квазисечением.

Замечание 23. Очевидно, что всякое случайное ограниченное u-мультиотображение $\mathcal{R} : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее условию подлинейного роста, является случайным нормальным. Отметим также (см., например, [19]), что всякое случайное ограниченное почти пн.сн. мультиотображение $\mathcal{R} : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является случайным нормальным. Кроме того, если случайное мультиотображение $\mathcal{R} : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ непрерывно, то оно является случайным нормальным.

Из условий $(\mathcal{R}1), (\mathcal{R}2)$ следует, что случайный мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} : \Omega \times C([-\tau, T], \mathbb{R}^n) \multimap P(L^2(I, \mathbb{R}^n)),$$

где

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega, x_t) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : r(s) \in \mathcal{R}(\omega, s, x_s)\} \quad \text{п.в. } s \in I$$

корректно определен. Кроме того, для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega, \cdot)$ замкнут (см., например, [2]).

Определение 24. Случайный потенциал $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *случайной строгой интегральной направляющей функцией для включения (3.6), если найдется $N > 0$ такое, что*

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, x(s), r_\omega) \rangle ds > 0 \tag{3.10}$$

для всех $r_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega, x)$, $\omega \in \Omega$, для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geqslant N$ и $\|x'_\omega(t)\| \leqslant \|\mathcal{R}(\omega, t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$ для любых $\omega \in \Omega$.

Теорема 25. *Пусть выполнены условия $(\mathcal{R}_t)$, $(\mathcal{R}1)$, $(\mathcal{R}2)$. Если $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - случайная строгая интегральная направляющая функция задачи (3.6), (3.7) такая, что*

$$\operatorname{Ind}(V, \infty) \neq 0,$$

то задача (3.6), (3.7) имеет решение.

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}$ – случайное нормальное квазисечение мультиотображения $\mathcal{R}$. Из условия $\mathcal{R}_2$ (ii) следует, что найдется $g_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega, \varphi) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\omega, \varphi)$ для любых $\omega \in \Omega$, $\varphi \in \mathcal{C}$. В силу $\mathcal{R}_2$ (iii) дотаточно показать, что задача (3.8), (3.9) имеет решение. Легко видеть, что $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является случайной строгой направляющей функцией для задачи (3.8), (3.9) в смысле условия $\mathcal{R}_2$ (см. [3]). Из теоремы 7 (см. [3]) следует, что задача (3.8), (3.9) имеет случайное решение. Следовательно, и исходная задача (3.6), (3.7) имеет случайное решение.

Определение 26. Случайный невырожденный потенциал $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *случайной обобщенной интегральной направляющей функцией для включения (3.6), если найдется $N > 0$ такое, что*

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, x(s), r_\omega) \rangle ds \geqslant 0 \tag{3.11}$$

хотя бы для одного $r_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega, x)$, для всех $\omega \in \Omega$, для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geqslant N$ и $\|x'_\omega(t)\| \leqslant \|\mathcal{R}(\omega, t, x_t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$ для любых $\omega \in \Omega$.

В случае, если (3.11) выполняется для всех $r_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega, x)$, то невырожденный потенциал V называется случайной интегральной направляющей функцией.

Теорема 27. *Если $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – случайная обобщенная интегральная направляющая функция задачи (3.6), (3.7) такая, что*

$$\mathrm{Ind}\,(V, \infty) \neq 0,$$

то задача (3.6), (3.7) имеет случайное решение.

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}$ является случайным нормальным квазисечением нормального мультиотображения $\mathcal{R}$. Тогда $V : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является случайной обобщенной интегральной направляющей функцией включения (3.8). Из теоремы 21 следует, что периодическая задача (3.8), (3.9) имеет решение, а следовательно имеет решение и задача (3.6), (3.7).

Следствие 28. *Пусть $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – случайная интегральная направляющая функция задачи (3.6), (3.7) такая, что*

$$\mathrm{Ind}\,(V, \infty) \neq 0,$$

то задача (3.6), (3.7) имеет случайное решение.

Пример 1. Случайное дифференциальное включение с запаздыванием.

Рассмотрим периодическую задачу для случайного дифференциального включения с запаздыванием

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{R}(\omega, t, x(t-\tau)) \quad \text{п.в. } t \in [0,T], \tag{3.12}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \tag{3.13}$$

где мультиотображение $\mathcal{R} : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{R}_t), (\mathcal{R}1), (\mathcal{R}2)$.

Теорема 29. *Пусть найдутся $\overline{N} > 0$ и $C > 0$ такие, что $\langle x, y\rangle \geqslant C$ для всех x, $\|x\| \geqslant \overline{N}, \omega \in \Omega$ и $y \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega, x)$. Если мультиотображение $\mathcal{R}$ ограничено:*

$$\|\mathcal{R}(\omega,t,x)\| := \max_{y \in \mathcal{R}(\omega,t,x)} \|y\| \leqslant M$$

и

$$C - \tau M^2 > 0,$$

то задача (3.12), (3.13) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что $V(\omega, x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ является случайной строгой интегральной направляющей функцией для включения $x'(\omega, t) \in \mathcal{R}(\omega, t, x(t-\tau))$, п.в. $t \in [0, T]$. Действительно, для достаточно большого $N > 0$ из условий $\|x'(\omega, t)\| \leqslant M$ п.в. $t \in [0, T]$ и $\|x\|_2 \geqslant N$ вытекает, что $\|x(\omega, t)\| \geqslant \overline{N}$ при всех $t \in [0, T]$ для любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot) \in C_T$. Но тогда для такой функции $x(\cdot)$ имеем для произвольного суммируемого сечения $g_\omega(t) \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$:

$$\int_0^T \langle \bigtriangledown V(\omega, x(s)), g_\omega(s)\rangle ds = \int_0^T \langle x_\omega(s), g_\omega(s)\rangle ds = \int_0^T \langle x_\omega(s-\tau), g_\omega(s)\rangle ds +$$

$$+ \int_0^T \langle x_\omega(s) - x_\omega(s-\tau), g_\omega(s)\rangle ds = \int_0^T \langle x_\omega(s-\tau), g_\omega(s)\rangle ds +$$

$$+ \int_0^T \langle \int_{s-\tau}^s x'_\omega(s) ds, g_\omega(s)\rangle ds \geqslant CT - \tau M^2 T = (C - \tau M^2)T > 0.$$

Пример 2. Случайное полулинейное функционально-дифференциальное включение.

Рассмотрим периодическую задачу для случайного функционально-дифференциального включения

$$x'(\omega,t) \in Ax(\omega,t) + \mathcal{R}(\omega,t,x_t) \quad \text{п.в. } t \in [0,T], \tag{3.14}$$

$$x(\omega,0) = x(\omega,T), \tag{3.15}$$

где $\mathcal{R} : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является случайным нормальным мультиотображение, удовлетворяющим условиям $(\mathcal{R}_t), (\mathcal{R}1), (\mathcal{R}2)$, а $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор.

Теорема 30. *Пусть квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$ для некоторого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию*

$$\langle Ax, x\rangle \geqslant \varepsilon \|x\|^2$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Если

$$\overline{\lim_{\|x\|_2 \to +\infty}} \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega,x)\|_2}{\|x\|_2} < \varepsilon$$

для всех абсолютно непрерывных $x(\cdot) \in C_T$, где

$$\|\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega,x)\|_2 = \sup_{g_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega,x)} \|g_\omega\|_2$$

то задача (3.14), (3.15) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что фукция $V(\omega,x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ является случайной строгой интегральной наравляющей функцией для включения (3.14). Для произвольного сечения $g_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ имеем

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, x(s)), Ax(s) + g_\omega(s)\rangle ds = \int_0^T \langle Ax(s), x(s)\rangle ds + \int_0^T \langle x(s), g_\omega(s)\rangle ds \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon \|x\|_2^2 - \|x\|_2 \|P_{\mathcal{R}}(x)\|_2 > 0$$

для достаточно больших значений $\|x\|_2$.

Пример 3. Случайное градиентное функционально-дифференциальное включение.

Рассмотрим периодическую задачу для случайного функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(\omega,t) \in \nabla V(\omega,t) + \mathcal{R}(\omega,t,x_t) \quad \text{п.в. } t \in [0,T], \tag{3.16}$$

$$x(\omega,0) = x(\omega,T), \tag{3.17}$$

где $\mathcal{R} : \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является случайным нормальным мультиотображением, удовлетворяющим условиям $(\mathcal{R}_t), (\mathcal{R}1), (\mathcal{R}2)$, а ∇V — градиент случайного потенциала $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Теорема 31. *Пусть выполнены условия:*

1) найдутся константы $\varepsilon > 0$, $K > 0$ и $\beta \geqslant 1$ такие, что

$$\|\nabla V(\omega,x)\| \geqslant \varepsilon \|x\|^\beta - K$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$;

2) $\overline{\lim\limits_{\|x\|_2 \to +\infty}} \dfrac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\omega,x)\|_2}{\|x\|_2^\beta} < \varepsilon T^{(1-\beta)/2}$ для всех $\omega \in \Omega$, для любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot) \in C_T$;

3) градиент ∇V имеет ненулевой случайный топологический индекс:

$$\operatorname{Deg}(\nabla V, \partial B_N) \neq 0$$

для достаточно больших $N > 0$.

Тогда задача (3.16), (3.17) имеет решение.

Доказательство. Покажем, что V является случайной строгой интегральной направляющей функцией для включения (3.16). Отметим, что вложение $L^{2\beta} \subset L^2$ дает для любой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot) \in C_T$ оценку

$$\|\nabla V(\omega, x(\cdot))\|_2 \geqslant \varepsilon \|x\|_{2\beta}^{\beta} - K\sqrt{T} \geqslant \varepsilon T^{(1-\beta)/2} \|x\|_2^{\beta} - K\sqrt{T}.$$

Тогда для любого $g_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ имеем

$$\int_0^T \langle \nabla V(\omega, x(s)), \nabla V(\omega, x(s)) + g_\omega(x) \rangle ds \geqslant \|\nabla V(\omega, x(\cdot))\|_2 (\|\nabla V(\omega, x(\cdot)\|_2 - \|g_\omega(x)\|_2 \geqslant$$

$$\geqslant \|\nabla(\omega, x(\cdot))\|_2 (\|\nabla V(\omega, x(\cdot))\|_2 - \|P_{\mathcal{R}}(\omega, x)\|_2 \geqslant$$

$$\geqslant \|\nabla V(\omega, x(\cdot))\|_2 (\varepsilon T^{(1-\beta)/2} \frac{K\sqrt{T}}{\|x\|_2^{\beta}} - \frac{\|P_{\mathcal{R}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2^{\beta}}) \|x\|_2^{\beta} > 0$$

для достаточно больших значений $\|x\|_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благодатских, В. И. Дифференциальные включения и оптимальное управление / В. И. Благодатских, А. Ф. Филиппов // Тр. МИАН СССР. — 1985. — Т. 169. — С. 194–252.

2. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М. : Либроком, 2011. — 224 с.

3. Гетманова, Е. Н. О некоторых применениях теории случайной степени совпадения в периодической задаче для функционально-дифференциальных включений / Е. Н. Гетманова, С. В. Корнев // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2020. — Т. 186. — С. 21–31.

4. Корнев, С. В. Об интегральных направляющих функциях для функционально-дифференциальных включений / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Топологические методы нелинейного анализа. — 2000. — С. 87–107.

5. Корнев, С. В. О некоторых вариантах теории топологической степени для выпуклозначных мультиотображений / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Труды математического факультета. — 2004. — С. 56–74.

6. Корнев, С. В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Изв. ВУЗов. Математика. — 2009. — № 5. — С. 23–32.

7. Корнев, С. В. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений / С. В. Корнев // Известия Иркутского государственного университета. Математика. — 2015. — Т. 13. — С. 16–31.

8. Корнев, С. В. Негладкие интегральные направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях / С. В. Корнев // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 9. — С. 31–43.

9. Корнев, С. В. Направляющие функции на заданном множестве в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С. В. Корнев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 107–122.

10. Корнев, С. В. Метод негладких интегральных направляющих функций в задаче о существовании периодических решений включений с каузальными операторами / С. В. Корнев // Вестн. Южно-Уральского государственного ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2016. — Т. 9, № 2. — С. 46–59.

11. Корнев, С. В. Интегральные направляющие функции и периодические решения включений с каузальными операторами / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. — 2016. — Т. 21, № 1. — С. 55–65.

12. Корнев, С. В. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений / С. В. Корнев, В. В. Обуховский, П. Дзекка // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 10. — С. 1335–1344.

13. Красносельский, М. А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский, А. И. Перов // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 123, № 2. — С. 235–238.

14. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко. — М. : Физматгиз, 1963. — 243 с.

15. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Наука, 1966. — 331 с.

16. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 257 с.

17. Andres J. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Gorniewicz // Topol. Meth. Nonl. Anal. — 2012. — V. 40. — P. 337–358.

18. Arutyunov, A. V. Convex and Set-Valued Analysis / A. V. Arutyunov, V. Obukhovskii. — Selected Topics. Berlin-Boston: De Gruyter Graduate, Walter de Gruyter, 2017.

19. Bressan, A. Upper and lower semicontinuous differential inclusions: a unified approach / A. Bressan // Nonlinear controllability and optimal control. — 2017. — P. 21–31.

20. Fonda, A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations / A. Fonda // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. — V. 99, № 1. — P. 79–85.

21. Górniewicz, L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / L. Górniewicz. — Berlin : Springer, 2006.

22. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin-New York : Walter de Gruyter, 2001.

23. Kornev, S. On some developments of the method of integral guiding functions / S. Kornev, V. Obukhovskii // Functional Differential Equations. — 2005. — V. 12, № 3–4. — P. 303–310.

24. On periodic solutions of random differential inclusions / S. V. Kornev, Y.-C. Liou, N. V. Loi, V. V. Obukhovskii // Applied Analysis and Optimization. — 2017. — V. 1, № 2. — P. 245–258.

25. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions / S. V. Kornev, N. V. Loi, V. V. Obukhovskii, C.-F. Wen // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2018. — V. 19, № 3. — P. 493–500.

26. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis / V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev. — Berlin: Springer, 2013.

27. Pruszko, T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems / T. Pruszko // Nonlinear Anal. : Theory, Methods & Appl. — 1981. — V. 5, № 9. — P. 959–970.

REFERENCES

1. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differential inclusions and optimal control. [Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differencial'nye vklyucheniya i optimal'noe upravlenie]. *Tr. MIAN SSSR — Tr. Steklov Mathematical Institute of the USSR*, 1985, vol. 169, pp. 194–252.

2. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyh otobrazhenij i differencial'nyh vklyuchenij]. Moscow: Librokom, 2011, 224 p.

3. Getmanova E.N., Kornev S.V. On some applications of the theory of random degree of coincidence in a periodic problem for functional-differential inclusions. [Getmanova E.N., Kornev S.V. O nekotoryh primeneniyah teorii sluchajnoj stepeni sovpadeniya v periodicheskoj zadache dlya funkcional'no-differencial'nyh vklyuchenij]. *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz. — Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern mat. and her app. Subject. obz.*, 2020, vol. 186, pp. 21–31.

4. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On integral guiding functions for functional differential inclusions. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Ob integral'nyh napravlyayushchih funkciyah dlya funkcional'no-differencial'nyh vklyuchenij]. *Topologicheskie metody nelinejnogo analiza — Topological methods of nonlinear analysis*, 2000, pp. 87–107.

5. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On some variants of the theory of topological degree for convex-valued multimap. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. O nekotoryh variantah teorii topologicheskoj stepeni dlya vypukloznachnyh mul'tiotobrazhenij]. *Trudy matematicheskogo fakul'teta — Transactions of the Faculty of Mathematics*, 2004, pp. 56–74.

6. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On the localization of the method of guiding functions in the problem of periodic solutions of differential inclusions. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. O lokalizacii metoda napravlyayushchih funkcij v zadache o periodicheskih resheniyah differencial'nyh vklyuchenij]. *Izv. VUZov. Matematika — Izv. Universities. Maths*, 2009, № 5, pp. 23–32.

7. Kornev S.V. The method of generalized integral guiding function in the problem of the existence of periodic solutions of differential inclusions. [Kornev S.V. Metod obobshchennoj integral'noj napravlyayushchej funkcii v zadache o sushchestvovanii periodicheskih reshenij differencial'nyh vklyuchenij]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika — Izvestiya Irkutsk State University. Maths*, 2015, vol. 13, pp. 16–31.

8. Kornev S.V. Non-smooth integral guiding functions in problems of forced oscillations. [Kornev S.V. Negladkie integral'nye napravlyayushchie funkcii v zadachah o vynuzhdennyh kolebaniyah]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2015, no. 9, pp. 31–43.

9. Kornev S.V. Guiding functions on a given set in the problem of the existence of periodic solutions of differential inclusions with nonconvex right-hand side. [Kornev S.V. Napravlyayushchie funkcii na zadannom mnozhestve v zadache o sushchestvovanii periodicheskih reshenij differencial'nyh vklyuchenij s nevypukloj pravoj chast'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 2. pp. 107–122.

10. Kornev S.V. The method of nonsmooth integral guiding functions in the problem of the existence of periodic solutions of inclusions with causal operators. [Kornev S.V. Metod negladkih integral'nyh napravlyayushchih funkcij v zadache o sushchestvovanii periodicheskih reshenij vklyuchenij s kauzal'nymi operatorami]. *Vestn. YUzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo un-ta. Ser. Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie — Vestn. South Ural State University. Ser. Mathematical modeling and programming*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 46–59.

11. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Integral guiding functions and periodic solutions of inclusions with causal operators. [Kornev S.V., Obuhovskij V.V. Integral'nye napravlyayushchie funkcii i periodicheskie resheniya vklyuchenij s kauzal'nymi operatorami]. *Tamb. un-ta. Ser. Estestvennye i tekhnicheskie nauki — Vestn. Tamb. un-that. Ser. Natural and technical sciences*, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 55–65.

12. Kornev S.V., Obukhovskii V.V., Dzekka P. Method of the generalized integral directing

function in the problem of the existence of periodic solutions of functional differential inclusions. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V., Dzekka P. Metod obobshchennoj integral'noj napravlyayushchej funkcii v zadache o sushchestvovanii periodicheskih reshenij funkcional'no-differencial'nyh vklyuchenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1335–1344.

13. Krasnoselskii M.A., Perov A.I. On a principle of the existence of bounded, periodic, and almost-periodic solutions for systems of ordinary differential equations. [Krasnoselskii M.A., Perov A.I. Ob odnom principe sushchestvovaniya ogranichennyh, periodicheskih i pochti-periodicheskih reshenij u sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij]. *Dokl. AN SSSR — Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1958, vol. 123, no. 2, pp. 235-238.

14. Krasnoselskii M.A., Perov A.I., Povolotskiy A.I., Zabreiko P.P. Vector fields on the plane. [Krasnoselskii M.A., Perov A.I., Povolotskiy A.I., Zabreiko P.P. Vektornye polya na ploskosti]. Moscow, 1963, 243 p.

15. Krasnoselskii M.A. Operator of shift along the trajectories of differential equations. [Krasnosel'skij M.A. Operator sdviga po traektoriyam differencial'nyh uravnenij]. Moscow: Science, 1966, 331 p.

16. Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P. Geometric methods of nonlinear analysis. [Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P. Geometricheskie metody nelinejnogo analiza]. Moscow: Science, 1975, 257 p.

17. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions. Topol. Meth. Nonl. Anal., 2012, vol. 40, pp. 337–358.

18. Arutyunov A.V., Obukhovskii V. Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics. Berlin-Boston: De Gruyter Graduate, Walter de Gruyter, 2017.

19. Bressan A. Upper and lower semicontinuous differential inclusions: a unified approach. Nonlinear controllability and optimal control, Routledge, 2017, pp. 21–31.

20. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations. Proc. Amer. Math. Soc., 1987, vol. 99, no. 1, pp. 79–85.

21. Górniewicz, L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer, 2006.

22. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.

23. Kornev S., Obukhovskii V. On some developments of the method of integral guiding functions. Functional Differential Equations, 2005, vol. 12, no. 3–4, pp. 303–310.

24. Kornev S.V., Liou Y.-C., Loi N.V., Obukhovskii V.V. On periodic solutions of random differential inclusions. Applied Analysis and Optimization, 2017, vol. 1, no. 2, pp. 245–258.

25. Kornev S.V., Loi N.V., Obukhovskii V.V., Wen C.-F. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2018, vol. 19, no. 3, pp. 493–500.

26. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. Berlin: Springer, 2013.

27. Pruszko T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems. Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl., 1981, vol. 5, no. 9, pp. 959–970.

Корнев Сергей Викторович, доктор физико–математичесских наук, профессор каф. высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Kornev Sergey Viktorovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor , of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Tel.: +7(473)255–36–63

Гетманова Екатерина Николаевна, аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Getmanova Ekaterina Nikolaevna, post graduate of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
Tel.: +7(473)255–36–63

Корнева Полина Сергеевна, студент 3 курса физико-математического факультета, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: polinakorneva03@mail.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Korneva Polina Sergeevna, student of the Physical and Mathematical Faculty Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: polinakorneva03@mail.ru
Tel.: +7(473)255–36–63