УДК 517.956.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ СТОКСА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОЙ ГЛАДКОСТИ ДАННЫХ*

Н. С. Ивлева

Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.

Аннотация. Рассматривается задача Стокса в области, граница которой и быстро осциллирующая по времени правая часть непрерывно дифференцируемы конечное число раз. Исследована гладкость периодического по времени решения и построено с обоснованием его полное асимптотическое разложение. Установлена степень близости по малому параметру, обратному высокой частоте осцилляций, указанного решения и частичных сумм асимптотики в соответствующих соболевских нормах.

Ключевые слова: параболическая система, задача Стокса, высокочастотные коэффициенты, метод усреднения, асимптотика.

STUDY OF THE STOKES PROBLEM WITH A FASTLY OSCILLATING RIGHT SIDE IN THE CASE OF FINITE SMOOTH DATA

N. S. Ivleva

Abstract. We consider the Stokes problem in a domain whose boundary and the right-hand side rapidly oscillating in time are continuously differentiable a finite number of times. The smoothness of a time-periodic solution is studied and its complete asymptotic expansion is constructed with justification. The degree of closeness in a small parameter, inverse to the high frequency of oscillations, of the indicated solution and partial sums of the asymptotics in the corresponding Sobolev norms is established.

Keywords: parabolic system, the Stokes problem, high-frequency terms, averaging method, asymptotics.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данный момент список публикаций, посвященных асимптотическому интегрированию дифференциальных уравнений с быстро осцилирующими по времени данными, достаточно велик. Отметим лишь наиболее близкие к данной статье работы [1], [6], [8], [12], в которых рассматриваются параболические уравнения и некоторые задачи гидродинамики.

В работах [8], [12] речь идет о задаче Навье-Стокса с большими быстро осциллирующими слагаемыми. В этих работах исследована полная асимптотика решения, но для бесконечно гладких данных.

Данная работа посвящена асимптотическому интегрированию задачи Стокса с быстро осциллирующей по времени правой частью и данными конечной гладкости. Здесь используется

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания в сфере научной деятельности № 0852–2020–0015.

тот же алгоритм построения асимптотик, что и в [8], [12], а также существенно используются результаты работ [11], [9].

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В цилиндре $\mathbf{Q} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $2\pi/\omega$-периодическом по времени решении системы Стокса

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v = -\nabla p + \sum_{0 \leqslant |s| \leqslant N} f_s(x) e^{is\omega t}, \\ &div v = 0, \\ &v|_\Gamma = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где Ω — трехмерная ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $\Gamma = \partial\Omega \times \mathbb{R}$ — граница $\mathbf{Q}$, ω — большой параметр, $\nu > 0$, $\int\limits_\Omega p dx = 0$. Здесь $f_s(x)$ — известные комплекснозначные вектор-функции, причем $\overline{f_s(x)} = f_{-s}(x)$, где чертой обозначена операция комплексного сопряжения над каждой компонентой вектор-функции.

Формулировке теоремы мы предпошлем несколько задач.

(A1) Задача о 2π-периодических по времени с нулевым средним решениях для системы вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} + \nabla s(x,\tau) = 0, \\ &div\, v(x,\tau) = 0, \\ &v^{(3)}(x,\tau)\Big|_\Gamma = g_0(x,\tau), \end{aligned}$$

где g_0 — 2π-периодическая по τ трехмерная вектор-функция, и ее среднее $g_0 \in C(\mathbf{Q})$, $< g_0 > \equiv \int\limits_0^{2\pi} g_0(x,\tau) d\tau = 0, \int\limits_\Omega s dx = 0.$

(A2) Задача Дирихле для системы Стокса

$$\begin{aligned} &-\nu \Delta u(x) + \nabla p(x) = 0, \\ &div\, u(x) = 0, \\ &u(x)|_{\partial\Omega} = w_0(x), \end{aligned}$$

где w_0 — трехмерная вектор-функция, $w_0 \in C(\overline{\Omega})$, $\int\limits_\Omega p dx = 0$.

Еще три типа представляют собой задачи об ограниченных на луче $\rho > 0$ решениях следующих обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\psi \in \partial\Omega$.

(A3)

$$\begin{aligned} &ikz(\psi,\rho) = \nu \frac{\partial^2 z(\psi,\rho)}{\partial \rho^2} + F(\psi,\rho) e^{\lambda\rho}, \\ &z(\psi,0) = z_0(\psi), \\ &z|_{\rho=\infty} = 0. \end{aligned}$$

(A4)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w(\psi,\rho)}{\partial \rho^2} + F(\psi,\rho) e^{\lambda\rho} = 0, \\ &w\,|_{\rho=\infty} = 0. \end{aligned}$$

(A5)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w(\psi,\rho)}{\partial \rho} + F(\psi,\rho) e^{\lambda\rho} = 0, \\ &w\,|_{\rho=\infty} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, Re\lambda < 0, F$ — полином относительно ρ, а функции F, z_0 непрервыны.

Замечание. Представленный список из пяти типов вспомогательных задач вполне характеризует используемый нами алгоритм (см. [8], [12]) построения асимптотики решения задачи (1). Именно по этой причине в него включены простые задачи (A3)-(A5).

Для построения формальной асимптотики решения задачи (1) введем в замыкании $\overline{\Omega}_\eta$ пограничной подобласти Ω_η области Ω ширины η криволинейную систему координат (ψ, r) следующим образом.

Определим отображение $\partial\Omega \times [0, \eta] \to \overline{\Omega}_\eta$ по закону $(\psi, r) \to \psi + n_\psi r$, где ψ — точка на $\partial\Omega$, имеющая местную координату ψ, а n_ψ — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке ψ. Число η выбираем достаточно малым так, чтобы указанные нормали в Ω_η не пересекались.

Согласно методу пограничного слоя [2], введем новую независимую переменную $\rho = \sqrt{\omega}r, r \leqslant \eta$.

Частичную асимптотику решения задачи (1) будем разыскивать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\overset{m}{v}(x,t) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-k/2} \left[u_k(x) + v_k(x,\tau) + w_k(\psi,\rho) + z_k(\psi,\rho,\tau)\right], \\
&\overset{m}{p}(x,t) = \sum_{k=0}^{m} \omega^{-k/2} p_k(x) + \sum_{k=0}^{m} \omega^{(-k+2)/2} s_k(x,\tau) + \\
&+ \sum_{k=2}^{m} \omega^{-k/2} h_k(\psi,\rho) + \sum_{k=1}^{m} \omega^{(-k+1)/2} g_k(\psi,\rho,\tau), \\
&\tau = \omega t,
\end{aligned} \tag{2}$$

где m — натуральное число, u_k, v_k, p_k и s_k — регулярные слагаемые, а w_k, z_k, h_k и g_k — погранслойные. Следуя [2], мы предполагаем, что все погранслойные вектор–функции обращаются в ноль вне погранполосы Ω_η.

Введем обозначение: $Q_{t_0} = \Omega \times [0, t_0]$.

Теорема 1. *Пусть $m, k, l, n \in \mathbb{Z}_+, q > 3, t_0 > 0$, $\partial\Omega \in C^{k+3}$, $f_s \in W_q^{m+k+3}(\Omega)$ и пусть (v,p) — $2\pi/\omega$-периодическое по времени решение задачи (1). Тогда можно эффективно построить вектор-функцию $\left(\overset{m}{v}, \overset{m}{p}\right)$, для которой справедлива оценка:*

$$\left\| D_x^l D_t^{n+1} \left(v - \overset{m}{v}\right) \right\|_{L_q(Q_{t_0})} + \left\| D_x^{l+2} D_t^n \left(v - \overset{m}{v}\right) \right\|_{L_q(Q_{t_0})} +$$

$$+ \left\| D_x^{l+1} D_t^n \left(p - \overset{m}{p}\right) \right\|_{L_q(Q_{t_0})} = O(\omega^{-(m-l-2n-2)/2}), l + n \leqslant k, \omega \to \infty.$$

В теореме 1 под эффективностью понимаем тот факт, что построение вектор-функции $\left(\overset{m}{v}, \overset{m}{p}\right)$ при $\omega >> 1$ сводится к решению конечного числа линейных однозначно разрешимых задач типов (A1)-(A5).

Под решением задачи (1) понимается $2\pi/\omega$-периодическая по времени вектор-функция (v,p), где v,p имеют обобщенные производные $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}, \frac{\partial p}{\partial x_i}$, принадлежащие $L_q(Q_{2\pi/\omega})$, причем вектор-функция (v,p) удовлетворяет уравнению 1 системы (1) в L_q и второму и третьему уравнению этой системы в обычном смысле.

3. ФОРМУЛИРОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Важную роль в доказательстве основного результата играют следующие теоремы Юдовича.

Прежде чем сформулировать утверждение, введем несколько обозначений. Пусть Ω — ограниченная трехмерная область с границей S.

Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u = F(x,t) - \frac{1}{\rho}\nabla p,\\ divu = 0,\, u\big|_S = 0, u(x,t+T) \equiv u(x,t),\end{gathered} \tag{3}$$

$F(x,t+T) \equiv F(x,t)$.

Введем два пространства: H_1' — замыкание множества Q гладких T-периодических соленоидальных финитных вектор-функций по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u,w)_{H_1'} = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega rotu \cdot rotw dxdt,$$

а H_r — замыкание множества Q по норме

$$\|u\|_{H_r}^r = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^r + |\Delta u|^r\right) dxdt.$$

Обобщенным T-периодическим решением задачи (3) называется вектор-функция u, для которой выполняются следующие условия: $u \in H_1', \max\limits_t \|u\|_{L_2(\Omega)} < \infty$ и для любого T-периодического $\Phi \in Q$ u удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}u - \nu rotu \cdot rot\Phi + F\cdot\Phi\right] dxdt = 0.$$

Теорема 2. *([11, теорема 3]) Пусть $u(x,t)$ — обобщенное T-периодическое решение задачи (3). Пусть также S обладает непрерывной кривизной, $F \in L_r (r > 1)$ в $\mathbf{Q}_T = \Omega \times [0,T]$. Тогда существуют обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ и*

$$\|u\|_{H_r}^r \leqslant C\left(\|F\|_{L_r(\mathbf{Q}_T)} + \max_t \|u\|_{L_2(\Omega)}\right).$$

Если граница S $l+2$ раза непрерывно дифференцируема и $F \in W_r^{(l)}$ в $\mathbf{Q}_T$, то

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left(\left|\frac{\partial}{\partial t}D^l u\right|^r + \sum_{i,k}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}D^l u\right|^r\right) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|F\|_{W_r^{(l)}(\mathbf{Q}_T)} + \max_t \|u\|_{L_2(\Omega)}\right),$$

D^l — любая производная порядка l по x_i, t.

Заметим, что в теореме 2 требуется, чтобы граница S была дифференцируема $l+2$ раза. Доказательство гладкости границы для существования гладкого решения на примере эллиптических уравнений можно посмотреть в [10, теорема 1].

Нам также понадобится следующая теорема.

Теорема 3. *([9, теорема 7.1]) Пусть $S \in C^2$, а $F(x,t)$ — T-периодическая вектор-функция класса $L_q(Q_T)$ $(Q_T = \Omega \times [0,T])$. Тогда задача (3) имеет единственное T-периодическое решение, обладающее в Q_T обобщенными производными $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} \in L_q(Q_T)$ и справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L_q(Q_T)} + \left\|D_x^2 v\right\|_{L_q(Q_T)} + \|\nabla P\|_{L_q(Q_T)} \leqslant C\|F\|_{L_q(Q_T)}.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для $x \in \Omega_\eta$ через $v^{(s)}(x), s = 1{,}2{,}3$, будем обозначать компоненты произвольного вектора $v(x) \in \mathbb{R}^3$ в криволинейных координатах $(\psi{,}r)$. При этом будем использовать известные представления операторов Δ, ∇ и div в координатах (ψ, ρ) ([3], [7]). Выпишем выражения лишь главных членов разложений Δ, ∇ и div:

$$\Delta v^{(s)} = \omega \partial^2 v^{(s)}/\partial\rho^2 + O(\sqrt{\omega}), s = 1{,}2{,}3, \nabla p^{(s)} = 0 \cdot \sqrt{\omega} + O(1), s = 1{,}2,$$

$$\nabla p^{(3)} = \sqrt{\omega}\partial p/\partial\rho + O(1), divv = \sqrt{\omega}\frac{\partial v^{(3)}}{\partial\rho} + O(1), \omega \to \infty. \tag{4}$$

Найдем первые погранслойные быстро осциллирующие слагаемые. Подставим асимптотическую формулу (2) в систему (1), имеем:

$$\frac{\partial w_0^{(3)}}{\partial\rho} = 0, \frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial\rho} = 0, \frac{\partial^2 w_0^{(j)}}{\partial\rho^2} = 0{,}j = 1{,}2.$$

Выпишем уравнения для первых регулярных быстро осциллирующих слагаемых:

$$\frac{\partial v_0}{\partial\tau} + \nabla s_0 = 0,$$

$$divv_0 = 0,$$

$$v_0^{(3)}\Big|_\Gamma = -\, z_0^{(3)}\Big|_\Gamma.$$

Получаем, что $v_0 = 0, p_0 = c, c = const$.

Займемся оставшимися регулярными слагаемыми:

$$-\nu\Delta u_0 + \nabla p_0 = f_0(x),$$

$$divu_0 = 0,$$

$$u_0|_\Gamma = -w_0|_\Gamma.$$

Тогда обозначим $u_0 = G(x)$, найдем $\nabla p_0 = (I - \Pi)(f_0(x) + \nu\Delta G(x)) + c, c = const$. Очевидно, что $\Delta u_0, \nabla p_0 \in W_q^{m+k+3}(Q_{2\pi/\omega})$.

Перейдем к погранслойным слагаемым:

$$\frac{\partial z_0^{(j)}}{\partial\tau} = \nu\frac{\partial^2 z_0^{(j)}}{\partial\rho^2},$$

$$z_0^{(j)}\Big|_\Gamma = -\, v_0^{(j)}\Big|_\Gamma = 0, j = 1{,}2.$$

Откуда $z_0^{(j)} = 0$.

Наконец, $\frac{\partial g_1}{\partial\rho} = -\frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial\tau} = 0$.

Отыщем вторые погранслойные слагаемые:

$$\frac{\partial w_1^{(3)}}{\partial\rho} = 0, \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial\rho} = 0, \frac{\partial^2 w_1^{(j)}}{\partial\rho^2} = 0, j = 1{,}2.$$

Выпишем уравнения для вторых регулярных быстро осциллирующих слагаемых:

$$\frac{\partial v_1}{\partial\tau} + \nabla s_1 = 0,$$

$$divv_1 = 0,$$

$$\left. v_1^{(3)} \right|_\Gamma = -\left. z_1^{(3)} \right|_\Gamma.$$

Положим $v_1 = 0, s_1 = c, c = const$.

Перейдем к остальным регулярным слагаемым:

$$-\nu \Delta u_1 + \nabla p_1 = 0,$$

$$divu_1 = 0,$$

$$\left. u_1 \right|_\Gamma = -\left. w_1 \right|_\Gamma.$$

Решение $(u_1, p_1) = (0,c), c = const$, нам подходит.

Перейдем к погранслойным слагаемым:

$$\frac{\partial z_1^{(j)}}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 z_1^{(j)}}{\partial \rho^2},$$

$$\left. z_1^{(j)} \right|_\Gamma = -\left. v_1^{(j)} \right|_\Gamma = 0, j = 1,2.$$

Откуда $z_1^{(j)} = 0$.

Наконец, $\frac{\partial g_2}{\partial \rho} = -\frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial \tau} = 0$, $\frac{\partial h_2}{\partial \rho} = \nu \frac{\partial^2 w_1^{(3)}}{\partial \rho^2} = 0$.

Найдем третьи погранслойные слагаемые:

$$\frac{\partial w_2^{(3)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial^2 w_2^{(j)}}{\partial \rho^2} = 0, j = 1,2.$$

Выпишем уравнения для третьих регулярных быстро осциллирующих слагаемых:

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} - \nu \Delta v_0 + \nabla s_2 = \sum_{0<|s|\leqslant N} f_s(x) e^{is\omega t},$$

$$divv_2 = 0,$$

$$\left. v_2^{(3)} \right|_\Gamma = -\left. z_2^{(3)} \right|_\Gamma.$$

Т.к. $v_0 = 0$, находим: $v_2 = -\Pi \left(\sum_{0<|s|\leqslant N} \frac{i}{s} f_s(x) e^{is\omega t} \right)$,

$\nabla s_2 = (I - \Pi) \left(\sum_{0<|s|\leqslant N} f_s(x) e^{is\omega t} \right) + c, c = const$. Заметим, что $\frac{\partial v_2}{\partial t}, \Delta v_2, \nabla s_2 \in W_q^{m+k+1}(Q_{2\pi/\omega})$.

Перейдем к регулярным слагаемым:

$$-\nu \Delta u_2 + \nabla p_2 = 0,$$

$$divu_2 = 0,$$

$$\left. u_2 \right|_\Gamma = -\left. w_2 \right|_\Gamma.$$

Решением будет $u_2 = 0, p_2 = c, c = const$.

Перейдем к погранслойным слагаемым:

$$\frac{\partial z_2^{(j)}}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 z_2^{(j)}}{\partial \rho^2},$$

$$z_2^{(j)}\Big|_\Gamma = -\, v_2^{(j)}\Big|_\Gamma, j = 1{,}2.$$

Отметим, что $\frac{\partial z_2^{(j)}}{\partial t}, \Delta z_2^{(j)} \in W_q^{m+k+1}(Q_{2\pi/\omega}), j = 1{,}2.$

Наконец, $\frac{\partial g_3}{\partial \rho} = -\frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial \tau} = 0, \frac{\partial h_3}{\partial \rho} = \nu\frac{\partial^2 w_2^{(3)}}{\partial \rho^2} = 0.$

Оценим $r-$е погранслойные слагаемые, $r > 2$:

$$\frac{\partial w_r^{(3)}}{\partial \rho} = e_1(\psi,\rho), \frac{\partial z_r^{(3)}}{\partial \rho} = e_2(\psi,\rho,\tau), \frac{\partial^2 w_r^{(j)}}{\partial \rho^2} = e_3(\psi,\rho), j = 1{,}2.$$

Из построения видно, что $\Delta w_r^{(j)}, \frac{\partial z_r^{(3)}}{\partial t}, \Delta z_r^{(3)} \in W_q^{m-r+k+1}(Q_{2\pi/\omega}), j = 1{,}2{,}3, r \leqslant m.$

Выпишем уравнения для r-х регулярных быстро осциллирующих слагаемых:

$$\frac{\partial v_r}{\partial \tau} - \nu\Delta v_{r-2} + \nabla s_r = 0,$$

$$div v_r = 0,$$

$$v_r^{(3)}\Big|_\Gamma = -\, z_r^{(3)}\Big|_\Gamma.$$

Заметим, что $\frac{\partial v_r}{\partial t}, \Delta v_r, \nabla s_r \in W_q^{m-r+k+1}(Q_{2\pi/\omega}), r \leqslant m.$

Перейдем к регулярным слагаемым:

$$-\nu\Delta u_r + \nabla p_r = 0,$$

$$div u_r = 0,$$

$$u_r|_\Gamma = -w_r|_\Gamma.$$

Приходим к заключению, что $\Delta u_r, \nabla p_r \in W_q^{m-r+k+1}(Q_{2\pi/\omega}), r \leqslant m.$

Перейдем к погранслойным слагаемым:

$$\frac{\partial z_r^{(j)}}{\partial \tau} = \nu\frac{\partial^2 z_r^{(j)}}{\partial \rho^2} + e_4(\psi,\rho,\tau),$$

$$z_r^{(j)}\Big|_\Gamma = -\, v_r^{(j)}\Big|_\Gamma, j = 1{,}2.$$

Очевидно, что $\frac{\partial z_r^{(j)}}{\partial t}, \Delta z_r^{(j)} \in W_q^{m-r+k+1}(Q_{2\pi/\omega}), j = 1{,}2.$

Наконец,

$$\frac{\partial g_{r+1}}{\partial \rho} = e_5(\psi,\rho,\tau), \frac{\partial h_{r+1}}{\partial \rho} = e_6(\psi,\rho).$$

Имеем: $\nabla g_{r+1}, \nabla h_{r+1}, \in W_q^{m-r+k+1}(Q_{2\pi/\omega}), r \leqslant m.$

Здесь известные (вектор-)функции $e_{1,3,6}$ имеют вид $\sum\limits_{s=1}^{k} F_s(\psi,\rho)e^{\lambda_s\rho}$, а $e_{2,4,5}$ — $\sum\limits_{|r|=1}^{p}\sum\limits_{s=1}^{k} F_{rs}(\psi,\rho)e^{\lambda_{rs}\rho}e^{ir\omega t}$, где $F_{rs}(F_s)$ и $\lambda_{rs}(\lambda_s)$ имеют тот же характер, что F и λ в задачах (A3)-(A5).

Легко проследить, что вектор-функции $\frac{\partial \overset{m}{v}}{\partial t}, \Delta \overset{m}{v}, \nabla \overset{m}{p}$ принадлежат классу $W_q^{k+1}(Q_{2\pi/\omega})$.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overset{m}{v}}{\partial t} - \nu\Delta \overset{m}{v} = -\nabla \overset{m}{p} + \sum_{0\leqslant |s| \leqslant N} f_s(x)e^{is\omega t} + R_\omega, \\ &div\, \overset{m}{v} = 0, \\ &\overset{m}{v}\Big|_\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу построения $\overset{m}{v}$, вектор-функция $R_\omega = -\frac{\partial w}{\partial t} + \nu\Delta w - \nabla P, w = v - \overset{m}{v}, P = p - \overset{m}{p}$, имеет порядок $O(\omega^{-\frac{m-1}{2}}), \omega \to \infty$, в норме $L_q(Q_{2\pi/\omega})$. Заметим также, что т.к. $\frac{\partial \overset{m}{v}}{\partial t}, \Delta \overset{m}{v}, \nabla \overset{m}{p}, f_s$ принадлежат классу $W_q^{k+1}(Q_{2\pi/\omega})$, то в силу (5), и R_ω принадлежит этому же классу.

Пусть $l = k_1 + k_2 + k_3, k_i, \in \mathbb{Z}_+$. Воспользуемся теоремами 3 и 2, чтобы получить существование гладкого решения системы (5). Продифференцируем систему (5) по x_1 k_1 раз, по x_2 k_2 раз, по x_3 k_3 раз, а по t n раз:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{l+n}\left(\frac{\partial \overset{m}{v}}{\partial t}\right)}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n} - \nu\frac{\partial^{l+n}\Delta \overset{m}{v}}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n} = \\ &-\frac{\partial^{l+n}\nabla \overset{m}{p}}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n} + \frac{\partial^{l+n}\sum\limits_{0\leqslant|s|\leqslant N} f_s(x)e^{is\omega t}}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n} + \frac{\partial^{l+n}R_\omega}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n}, \\ &\frac{\partial^{sl+n} div \overset{m}{v}}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n} = 0, \\ &\frac{\partial^{l+n}\overset{m}{v}}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n}\Bigg|_\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В силу условий теоремы 2 и условий теоремы 1, $\frac{\partial^{l+n}\left(\frac{\partial \overset{m}{v}}{\partial t}\right)}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n}, \frac{\partial^{l+n}\Delta\overset{m}{v}}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n}, \frac{\partial^{l+n}\nabla\overset{m}{p}}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n} \in W_q^1(Q_{2\pi/\omega})$. Т.к. $q > 3$, из теоремы вложения соболевских пространств в пространства непрерывных функций следует, что $W_q^1(Q_{2\pi/\omega})$ непрерывно вложено в $C(Q_{2\pi/\omega})$. Тогда можно переставлять соответствующие операции дифференцирования [4, с. 274]. В силу построения, $\frac{\partial^{l+n}R_\omega}{\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_t^n}$ можно оценить как $O(\omega^{\frac{-m+l+2n-1}{2}}), \omega \to \infty$.

Вычтем из первого уравнения системы (1) первое уравнение (5), из второго — второе, из третьего – третье.

Придем к системе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t} - \nu\Delta w = -\nabla P + R_\omega, \\ &divw = 0, \\ &w|_\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Продифференцируем систему (7) по x_1 k_1 раз, по x_2 k_2 раз, по x_3 k_3 раз, а по t n раз, $l = k_1+k_2+k_3$. Используя теоремы 3 и 2, получаем, что система (7) имеет гладкое решение. Из рассуждений выше насчет перестановки операций дифференцирования и теоремы 3 вытекает следующая оценка:

$$\left\|D_x^l D_t^{n+1} w(x,t)\right\|_{L_q(Q_{2\pi/\omega})} + \left\|D_x^{l+2} D_t^n w(x,t)\right\|_{L_q(Q_{2\pi/\omega})} +$$

$$+\left\|\nabla D_x^l D_t^n P(x,t)\right\|_{L_q(Q_{2\pi/\omega})} \leqslant C\|D_x^l D_t^n R_\omega(w(x,t), P(x,t), t)\|_{L_q(Q_{2\pi/\omega})} = O(\omega^{-\frac{m-l-2n-1}{2}}), \omega \to \infty.$$

Из периодичности решения (w,P) следует равенство

$$\left\| D_x^l D_t^{n+1} w(x,t) \right\|_{L_q(Q_{t_0})} + \left\| D_x^{l+2} D_t^n w(x,t) \right\|_{L_q(Q_{t_0})} +$$

$$+ \left\| D_x^{l+1} D_t^n P(x,t) \right\|_{L_q(Q_{t_0})} = O(\omega^{-\frac{m-l-2n-2}{2}}), \omega \to \infty.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В. Б. Левенштаму за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басистая, Д. А. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми / Д. А. Басистая, В. Б. Левенштам // Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Механика сплошной среды. Спецвыпуск. — 2004. — С. 46–48.

2. Вишик, М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // Успехи мат. Наук. — 1957. — № 5(12). — С. 3–122.

3. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — М. : Физматгиз, Ч. II, 1963.

4. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 2 / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Изд. Юрайт, 2019.

5. Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М. : Наука, 1970.

6. Левенштам, В. Б. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми / В. Б. Левенштам // Сиб. матем. журн. — 2005. — № 4(46). — С. 805–821.

7. Левенштам, В. Б. Асимптотическое интегрирование задачи о вибрационной конвекции / В. Б. Левенштам // Дифференц. ур-ния. — 1997. — № 4(34). — С. 523–532.

8. Левенштам, В. Б. Асимптотическое интегрирование системы Навье–Стокса с быстро осциллирующей массовой силой / В. Б. Левенштам // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 5. — С. 696–705.

9. Юдович, В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости / В. И. Юдович. — Ростов-на-Дону : Изд-во РГУ, 1984. — 192 с.

10. Юдович, В. И. Некоторые оценки решений эллиптических уравнений / В. И. Юдович // Матем. сб. — 1962. — № 101(59). — С. 229–244.

11. Юдович, В. И. Периодические движения вязкой несжимаемой жидкостию / В. И. Юдович // ДАН СССР. — 1960. — № 6(130). — С. 1214–1217.

12. Ivleva, N. S. Asymptotic analysis of the generalized convection problem / N. S. Ivleva, V. B. Levenshtam // Eurasian Math. J. — 2015. — V. 6, № 1. — P. 41–55.

REFERENCES

1. Basistaya D.A. Asymptotics of Solutions to Ordinary Differential Equations with Large High-Frequency Terms. [Basistaya D.A. Asimptotika resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s bol'shimi vysokochastotnymi slagayemymi]. *Izvestiya vuzov. Sev.-Kavk. region. Yestekstvennyye nauki. Mekhanika sploshnoy sredy. Spetsvypusk — Izvestiya vuzov. North-Kavk. region. Natural sciences. Continuum mechanics. Special issue*, 2004, pp. 46-48.

2. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. [Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regulyarnoye vyrozhdeniye

i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122.

3. Kochin N.E., Kibel I.A., Rose N.V. Theoretical gidroaeromechanics. [Kochin N.E., Kibel I.A., Rose N.V. Teoreticheskaya gidromekhanika]. Moscow, 1963.

4. Kudryavtsev, L.D. Course of mathematical analysis in 3 volumes. Volume 2. [Kudryavtsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza v 3 t. Tom 2]. Moscow, 2019.

5. Ladyzhenskaya O.A. Mathematical questions of the dynamics of a viscous incompressible fluid. [Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskiye voprosy dinamiki vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti]. Moscow, 1970.

6. Levenshtam V.B. Asymptotic integration of differential equations with large high-frequency terms. [Levenshtam V.B. Asymptotic integration of parabolic problems with large high-frequency summands]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2005, no. 4(46), pp. 805–821.

7. Levenshtam V.B. Asymptotic integration of a vibration convection problem. [Levenshtam V.B. Asimptoticheskoe integrirovanie zadachi o vibracionnoj konvekcii]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 4, pp. 522–531.

8. Levenshtam V.B. Asymptotic integration of the Navier–Stokes system with a rapidly oscillating mass force. [Levenshtam V.B. Asimptoticheskoe integrirovanie sistemy Nav'e–Stoksa s bystro oscilliruyushchej massovoj siloj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 5, pp. 696–705.

9. Yudovich V.I. Linearization method in hydrodynamic stability theory. [YUdovich V.I. Metod linearizacii v gidrodinamicheskoj teorii ustojchivosti]. Rostov-on-Don, 1984, 192 p.

10. Yudovich V.I. Some estimates for solutions of elliptic equations. [YUdovich V.I. Nekotorye ocenki reshenij ellipticheskih uravnenij]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1962, no. 101(59), pp. 229–244.

11. Yudovich V.I. Periodic motions of a viscous incompressible fluid. [YUdovich V.I. Periodicheskie dvizheniya vyazkoj neszhimaemoj zhidkostiyu]. *DAN SSSR — Sov. Math. Dokl.*, 1960, no. 6(130), pp. 1214–1217.

12. Ivleva N.S., Levenshtam V.B. Asymptotic analysis of the generalized convection problem. Eurasian Math. J., 2015, vol. 6, no. 1, pp. 41–55.

Ивлева Н. С., Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: ivleva.n.s@yandex.ru

Ivleva N. S., Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: ivleva.n.s@yandex.ru