УДК 511

О ПРИЛОЖЕНИИ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИИ В МЕТОДЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 25.10.2022 г.

Аннотация. В работе получена оценка снизу для числа элементов в конечной последовательности целых чисел, имеющих ограниченное число простых делителей. При этом использованы веса Бухштаба, анонсированные им в 1985 г. Применено неравенство для весовой функции в методе весового решета.

Ключевые слова: метод, решето, веса, число, последовательность, оценка.

ABOUT THE APPLICATION OF INEQUALITY FOR WEIGHT FUNCTION IN THE WEIGHT SIEVE METHOD

E. V. Vakhitova, S. R. Vakhitova

Abstract. In this paper obtained an lower estimation for the number of elements in the sequence of whole numbers, those have a limited number of prime divisors. In this case, the Buchstab weights announced him in 1985 were used. The inequality for the weight function in the weight sieve method was applied.

Keywords: method, sieve, weights, number, sequence, estimation.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим конечную последовательность A целых чисел a_n, где $n \in \mathbf{N}$.

В работе получена оценка снизу для числа элементов из A, имеющих в своем разложении не более r простых множителей с учетом их кратности ($r \in \mathbf{N}$, $r \geqslant 2$), то есть оценка снизу числа r-почти простых чисел в последовательности A. Для этого применим веса Бухштаба, анонсированные им в 1985 г. [1] и неравенство для весовой функции в методе весового решета.

Приведем весовую функцию, обозначив ее через $T(X)$.

$$T(X) := \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) + \frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\times$$

$$\times \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) + \sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right) S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) +$$

$$+a \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1+a(g'-1)}{ag'^2}} \Bigg(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{1-g'z}} S(A_p; X^z) \Bigg) dz +$$

$$+\sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{a-1}{g'a}}}\left(\frac{b+1}{2}-a\frac{\ln p}{\ln X}\right)S\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)+$$

$$+\frac{1}{g'}\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}}\leqslant p<X^{\frac{a-g'}{a}}}\left(bg'-a+g'-a(g'-1)\frac{\ln p}{\ln X}\right)\times S\left(A_p;\left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)\Bigg\}, \qquad (1)$$

где $a,b,c,g'\in\mathbf{R}$, $1\leqslant b\leqslant c\leqslant a$, $2c-b-1>0$, $1\leqslant g'\leqslant a-1$, $X\in\mathbf{R}, X>1, d\in\mathbf{N}$,

$$S(A_d;z):=|\{a_n\in A|a_n\equiv 0 \pmod d),(a_n,P(z))=1\}|,$$

$P(z)$ — произведение положительных простых чисел $p<z$.

Обозначим через $\nu(a_n)$ число простых чисел в разложении a_n с учетом их кратности. Введем следующее условие:

существует некоторая постоянная M, такая, что

$$|a_n|\leqslant X^M \qquad (2)$$

для всех a_n из последовательности A.

Теорема. Пусть A — конечная последовательность целых чисел, $T(X)$ определено равенством (1), выполнено условие (2) и
$a,b,c,g'\in\mathbf{R}$, $(r+1)c-Ma=2c-b-1$, $2c-b-1>0$, $1\leqslant b\leqslant c\leqslant a$, $g'+1\leqslant a\leqslant 2g'+2$, $a-c\leqslant g'$. Тогда имеет место неравенство:

$$\sum_{\substack{a_n\in A\\ \nu(a_n)\leqslant r}}1\geqslant S(A;X^{\frac{1}{a}})-T(X)-R, \qquad (3)$$

где R – число элементов из A, делящихся на квадрат простого числа p из интервала $X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{c}{a}}$, $r\in\mathbf{N}$, $r\geqslant 2, S(A;X^{\frac{1}{a}})$ – число элементов в A, не имеющих простых делителей, меньших $X^{\frac{1}{a}}$, X – достаточно большое положительное число.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для весовой функции $T(X)$, определяемой равенством (1), имеет место следующее неравенство:

$$T(X)\leqslant\sum_{\substack{a_n\in A\\ p_n\geqslant X^{\frac{1}{a}}}}\sum_{\substack{p|a_n\\ p<X^{\frac{c}{a}}}}w(p), \qquad (4)$$

где

$$w(p):=\frac{1}{2c-b-1}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln X}\right). \qquad (5)$$

Краткое доказательство неравенства (4) приведено в работах [2], [5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Применим неравенство (4), тогда, учитывая определение $S(A;X^{\frac{1}{a}})$, получим, что

$$S(A;X^{\frac{1}{a}})-T(X)\geqslant\sum_{\substack{a_n\in A\\ p_n\geqslant X^{\frac{1}{a}}}}1-\sum_{\substack{a_n\in A\\ p_n\geqslant X^{\frac{1}{a}}}}\sum_{\substack{p|a_n\\ p<X^{\frac{c}{a}}}}w(p),$$

где $w(p)$ определено равенством (5).
Продолжим преобразования.

$$S(A;X^{\frac{1}{a}})-T(X)\geqslant\sum_{\substack{a_n\in A\\ p_n\geqslant X^{\frac{1}{a}}}}\Bigg(1-\sum_{\substack{p|a_n\\ p<X^{\frac{c}{a}}}}w(p)\Bigg).$$

Введем обозначения:

$$Y(a_n):=1-\sum_{\substack{p|a_n\\ p<X^{\frac{c}{a}}}}w(p).$$

Следовательно, получим, что

$$S(A;X^{\frac{1}{a}})-T(X)\geqslant\sum_{\substack{a_n\in A\\ p_n\geqslant X^{\frac{1}{a}}}}Y(a_n).$$

Так как из определения $w(p)$ следует, что

$$\sum_{\substack{p|a_n\\ p<X^{\frac{c}{a}}}}w(p)\geqslant 0,$$

то для любого рассматриваемого в $Y(a_n)$ числа a_n справедливо неравенство:

$$Y(a_n)\leqslant 1.$$

Таким образом, для доказательства теоремы остается показать, что если $a_n\in A$ и a_n не является r-почти простым числом,то такое a_n не дает положительного слагаемого в правую часть неравенства (3).

Пусть $a_n\in A$ и a_n не является r-почти простым числом, то есть $\nu(a_n)\geqslant r+1$, где $\nu(a_n)$ – число простых множителей в разложении a_n с учетом их кратности. В правой части неравенства (3) рассматриваются только те $a_n\in A$, для которых $p_n\geqslant X^{1/a}$.

1) если $p^2\,|\,a_n$ и $X^{1/a}\leqslant p<X^{c/a}$, то так как $Y(a_n)\leqslant 1$, имеется R в (3), такие числа a_n не дают положительного слагаемого в правую часть неравенства (3);

2) если $p^2\ \ |\,a_n$ и a_n – такое, что любой его простой делитель p в интервале $X^{1/a}\leqslant p<X^{c/a}$ имеет вес

$$w(p)=\left(c-a\,\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{1}{2c-b-1}.$$

Так как $p^2\ \ \|\,a_n$, то ни один такой делитель не является кратным. Для такого a_n будем иметь:

$$Y(a_n)=1-\sum_{\substack{p|a_n\\ p<X^{\frac{c}{a}}}}w(p)=1-\frac{1}{2c-b-1}\sum_{\substack{p|a_n\\ p<X^{\frac{c}{a}}}}\left(c-a\,\frac{\ln p}{\ln X}\right).$$

При $p\geqslant X^{c/a}$ имеем: $(\ln p)/\ln X\geqslant c/a$, отсюда $c-a\,(\ln p)/\ln X\leqslant 0$, поэтому, продолжая область суммирования на все делители числа a_n, учитывая их кратность, получим:

$$Y(a_n)\leqslant 1-\frac{1}{2c-b-1}\sum_{p|a_n}\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}\\ p^m|a_n}}\left(c-a\,\frac{\ln p}{\ln X}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 1-\frac{1}{2c-b-1}\left(\sum_{p|a_n}\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}\\ p^m|a_n}}c-\frac{a}{\ln X}\sum_{p|a_n}\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}\\ p^m|a_n}}\ln p\right)\leqslant$$

$$\leqslant 1 - \frac{1}{2c-b-1}\left((r+1)c - \frac{a}{\ln X}\ln|a_n|\right).$$

Учитывая теперь условие (2), получим

$$Y(a_n) \leqslant 1 - \frac{(r+1)c - a(\ln X^M)/\ln X}{2c-b-1} = 1 - \frac{(r+1)c - Ma}{2c-b-1}.$$

Применим условие для $(r+1)c - Ma$, данное в теореме, получим

$$Y(a_n) \leqslant 1 - \frac{2c-b-1}{2c-b-1} = 0.$$

Следовательно, если a_n – такое, что любой его простой делитель p из интервала

$$X^{1/a} \leqslant p < X^{c/a}$$

имеет вес

$$w(p) = \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right)\frac{1}{2c-b-1},$$

то $Y(a_n) \leqslant 0$.

Далее, заметим, что случай $p_n \geqslant X^{c/a}$ можно не рассматривать, так как в этом случае было бы

$$|a_n| \geqslant X^{(r+1)c/a} > X^M,$$

что противоречит условию (2).

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Веса Бухштаба, анонсированные им в 1985 г., позволяют получить преимущества в выборе параметров в методе весового решета в сравнении с весами Бухштаба (1967 г.), их непрерывной формой, полученной Лабордэ (1979 г.), частным случаем которых являются веса Рихерта (1969 г.).

О методе весового решета можно узнать из работ [2]–[10]. Метод весового решета, содержащий решето Сельберга в сочетании с весами Бухштаба, анонсированными им в 1985 г., можно успешно применять при решении теоретико–числовых задач, в которых простые числа заменяются числами с ограниченным количеством простых делителей (такие числа называются почти простыми числами).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб, А. А. Новый тип весового решета / А. А. Бухштаб // Теория чисел и её приложения : тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 22–24.

2. Вахитова, Е. В. О новом типе весового решета Бухштаба / Е. В. Вахитова. — М. Деп. в ВИНИТИ 26.08.93, № 2342–В93, 1993. — 34 с.

3. Вахитова, Е. В. О применении решета Бруна с весами Бухштаба нового типа к полиномиальной последовательности / Е. В. Вахитова. — М. Деп. в ВИНИТИ 22.06.95, № 1814–В95, 1995. — 52 с.

4. Вахитова, Е. В. О приложении функций Бухштаба / Е. В. Вахитова // Математические заметки. — 1995. — Т. 57, № 1. — С. 121–125.

5. Вахитова, Е. В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа / Е. В. Вахитова // Математические заметки. — 1999. — Т. 66, № 1. — С. 38–49.

6. Greaves, G. Sieves in number theory / G. Greaves // Ergebnisse der Mathematik. — 2001. — V. 43, № 3. — 304 p.

7. Greaves, G. Sieve methods and problems / G. Greaves // Modern problem of number theory and its application: International conference 10–15 sept. 2001. — Москва, 2001. — Ч. II. — С. 7–47.

8. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения / Е. В. Вахитова. – М. : Изд–во МПГУ "Прометей", 2002. — 268 с.

9. Heath–Brown, D. R. Lectures on sieves / D. R. Heath–Brown // Proceedings of the session in analytic number theory and Diophantine equations held in Bonn, Germany, Januare–June, 2002. Bonn: Univ. Bonn, Mathematisches Institut. Bonner Mathematische Schriften. — 2003. — V. 360. — 50 p.

10. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 332 с.

REFERENCES

1. Bukhstab A.A. A new type of weight sieve. [Buhshtab A.A. Novyj tip vesovogo resheta]. Number theory and its applications: tez. dokl. All-Union. conf.. Tbilisi, 1985, pp. 22–24.

2. Vakhitova E.V. On a new type of weight sieve of the Buchstab. [Vahitova E.V. O novom tipe vesovogo resheta Buhshtaba]. *M. Dep. v VINITI 26.08.93, N. 2342-V93, 1993, 34 s — Moscow, Dep. in VINITI 26.08.93, No. 2342-B93, 1993, 34 p.*

3. Vakhitova E.V. On the use of the Brun sieve with the weights of the Buhshtab of a new type to polynomial sequence. [Vahitova E.V. O primenenii resheta Bruna s vesami Buhshtaba novogo tipa k polinomial'noj posledovatel'nosti]. *M. Dep. v VINITI 22.06.95, N. 1814-V95, 1995, 52 s — M. Dep. in VINITI 22.06.95, N. 1814-B95, 1995, 52 p.*

4. Vakhitova E.V. Application of Bukhstab functions. [Vahitova E.V. O prilozhenii funkcij Buhshtaba]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1995, vol. 57, no. 1, pp. 121–125.

5. Vakhitova E.V. On a One-Dimensional Selberg Sieve with Bukhstab weights of a new type. [Vahitova E.V. Ob odnomernom reshete Sel'berga s vesami Buhshtaba novogo tipa]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, no. 1, pp. 38–49.

6. Greaves G. Sieves in number theory. Ergebnisse der Mathem, 2001, vol. 43, no. 3, 304 p.

7. Greaves G. Sieve methods and problems. [Greaves G. Sieve methods and problems]. Modern problem of number theory and its application: International conference 10–15 sept. 2001, part II, pp. 7–47.

8. Vakhitova E. V. Methods of a sieve with weights of the Buchstab and their applications. [Vahitova E.V. Metody resheta s vesami Buhshtaba i ih prilozheniya]. Moscow: MPSU, "Prometheus", 2002, 268 p.

9. Heath–Brown D.R. Lectures on sieves. Proceedings of the session in analytic number theory and Diophantine equations held in Bonn, 2002. Bonn: Univ. Bonn, Mathematisches Institut. Bonner Mathematische Schriften, 2003, vol. 360, 50 p.

10. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Methods of a sieve with Buchstab weights and their applications. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Metody resheta s vesami Buhshtaba i ih prilozheniya]. Voronezh: VSU Publishing House, 2014, 332 p.

Вахитова Екатерина Васильевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Ekaterina Vasilevna, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Departament digital technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru

Вахитова Светлана Рифовна, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Svetlana Rifovna, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru