

УЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ОБЪЕКТА КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Н. И. Варминская

Черноморское высшее военно-морское училище имени П. С. Нахимова

Поступила в редакцию 31.10.2022 г.

Аннотация. Исследованы различные типы целенаправленного управляемого движения объекта конечной жесткости. Примеры: разгон из состояния покоя до заданной скорости; разгон при заданной начальной скорости до большей, с возвратом к исходной скорости. Рассмотрен пример торможения объекта от некоторой скорости до состояния абсолютного покоя. Для управления использованы гармонические функции либо полиномы. Описана процедура определения общего времени движения упругого объекта для устранения колебаний в конечной точке. Дана оценка энергоемкости предлагаемых оптимальных управлений. Показана возможность учета линейно-вязкого сопротивления и сухого трения при целенаправленном движении объектов.

Ключевые слова: оптимальное управление, объекты конечной жесткости, колебания объектов, достижение относительного и абсолютного покоя в конце движения, линейно-вязкое сопротивление, сухое трение.

CONSIDERATION OF RESISTANCE IN OPTIMAL CONTROL OF THE FINITE RIGIDITY OBJECT MOTION

N. I. Varminskaya

Abstract. Various types of purposeful movement of an object of finite rigidity are investigated: acceleration from a state of quiescence to a given speed, acceleration at a given speed to a higher one with a return to the initial state (overtaking), deceleration of an object from a certain speed to a state of quiescence using controls in the form of harmonic functions or a polynomial. A procedure for determining the total motion time to ensure that there are no oscillations at the end point is described. An estimate of the energy intensity of the proposed optimal controls is presented. The possibility of taking into account linear-viscous resistance and dry friction during the purposeful movement of objects is shown.

Keywords: optimal control, objects of finite rigidity, objects oscillations, achievement of relative and absolute quiescence at the end of motion, linear viscous resistance, dry friction.

ВВЕДЕНИЕ

Теории оптимального управления, методам, применяемым для поиска оптимального управления колебаниями деформируемых систем, посвящены классические работы [1–6].

В [9, 12] показано, что движение объекта можно осуществлять с учетом поставленной цели — достижение абсолютного покоя либо некоторой скорости объекта в конце движения (например, при постановке объекта на ленту транспортера); рассмотрены также управляемые движения типа разгон-торможение, при которых колебания в точке позиционирования отсутствуют. Интересно, что управления в простом классическом случае можно получить без использования вариационного метода теории оптимального управления, подчинив заданный

исходный полином только краевым условиям. Дальнейшее увеличение степени задаваемого полинома (без предварительного заданного критерия оптимальности) приводит к новым типам управлений, функционалы-критерии которых восстанавливаются по предложенной в [10] процедуре синтеза.

Оценка энергоемкости управлений, обоснованных в работах [9, 12], проведена в [7, 8, 11]. Показано, например, что с ростом степени полинома, описывающего управление движением объекта, затраты энергии снижаются. В случае управлений, заданных в виде гармонических функций, поведение объекта и энергоемкость зависит от степени и вида функции управления.

Цель исследования — анализ динамического поведения объекта конечной жесткости при различных типах управления (переносного ускорения) с учетом линейно-вязкого сопротивления либо сухого трения с достижением относительного либо абсолютного покоя в конце движения.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. *Конструирование движения объекта конечной жесткости из начального состояния абсолютного покоя в состояние относительного покоя, т.е. разгон до заданной скорости движения с отсутствием колебаний в конце разгона.*

1.1. Управление движением (переносное ускорение) принято в виде гармонической функции

$$U_{e1} = a \sin pt, \quad (1)$$

где $a, p = \text{const}$. Движение подчинено краевым условиям:

$$S_{e1}(0) = 0, \quad V_{e1}(0) = 0; \quad S_{e1}(T) = L, \quad V_{e1}(T) = V_1. \quad (2)$$

Дважды интегрируя (1) с учетом краевых условий (2) и $p = \pi/T$, получим выражения для перемещения $S_{e1}(t)$, скорости $V_{e1}(t)$ и ускорения (управления) $U_{e1}(t)$ переносного движения:

$$S_{e1}(t) = \frac{V_1}{2} \left(t - \frac{T \sin(\pi t/T)}{\pi} \right), \quad V_{e1}(t) = \frac{V_1}{2} (1 - \cos(\pi t/T)),$$

$$U_{e1}(t) = \frac{V_1 \pi \sin(\pi t/T)}{2T}. \quad (3)$$

Графики $S_{e1}(t)$, $V_{e1}(t)$ и $U_{e1}(t)$ при $m = 1$ кг, $V_1 = 5$ м/с, $T = 1,11035$ с приведены на рисунке 1.

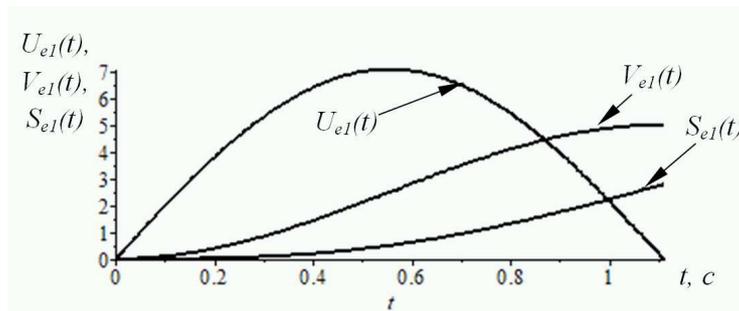


Рис. 1. Графики $S_{e1}(t)$, $V_{e1}(t)$ и $U_{e1}(t)$ при разгоне объекта с управлением $U_{e1} = a \sin pt$.

Примечательно, что пройденный путь за указанное время составляет $L = V_1 T/2$, т. е. половину пути в случае равномерного движения.

Относительное движение (колебания) упругого объекта (с одной степенью свободы, без учета сопротивления) описывается уравнением

$$\frac{d^2x_r}{dt^2} + k^2x_r = -U_{e1}(T), \quad (4)$$

где k — частота собственных колебаний. Движение — из состояния относительного покоя, $x_r(0) = 0, \dot{x}_r(0) = 0$.

С учетом управления (3) из (4) следуют выражения для перемещения x_r и скорости \dot{x}_r в относительном движении:

$$\begin{aligned} x_r &= -\frac{\pi^2 V_1 \sin(kt)}{2k(\pi^2 - k^2 T^2)} + \frac{\pi V_1 T \sin(\pi t/T)}{2(\pi^2 - k^2 T^2)}; \\ v_r = \dot{x}_r &= -\frac{\pi^2 V_1 \cos(kt)}{2(\pi^2 - k^2 T^2)} + \frac{\pi^2 V_1 \cos(\pi t/T)}{2(\pi^2 - k^2 T^2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Общее время движения найдено как один из общих корней моментных соотношений ($x_r(T) = 0, \dot{x}_r(T) = 0$), которые преобразуются к виду:

$$x_r(T) = -\frac{\pi^2 V_1 \sin(kT)}{2k(\pi^2 - k^2 T^2)}; \quad \dot{x}_r(T) = -\frac{\pi^2 V_1 (1 + \cos(kT))}{2(\pi^2 - k^2 T^2)}.$$

При $k = 4,5\pi$ и $V_1 = 5$ м/с графики $x_r(T), \dot{x}_r(T)$ представлены на рисунке 2.

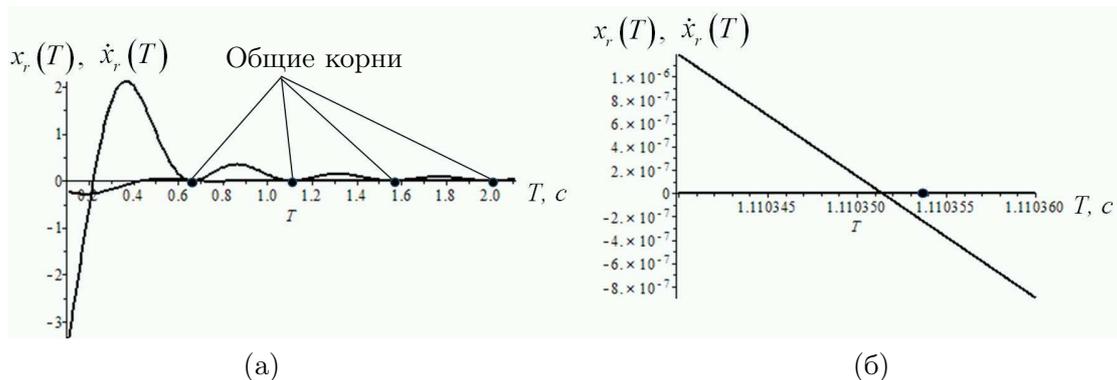


Рис. 2. Поиск общих корней моментных соотношений; графическое уточнение одного из корней

Взяв второй корень $T = 1,11035$ с, уточнение которого показано на рисунке 2б). Графики перемещения и скорости (функции (5)), а также ускорения в относительном движении за указанное время изображены на рисунке 3. Из представленных графиков следует, что в конечный момент времени наступает относительный покой (колебаний нет).

1.2. Использовано управление движением в виде гармонической функции

$$U_{e2} = a \sin^3 pt, \quad (6)$$

где $a, p = \text{const}$; движение подчинено прежним краевым условиям (2).

После интегрирования функции (6) с учетом краевых условий получены выражения для перемещения $S_{e2}(t)$, скорости $V_{e2}(t)$ и ускорения $U_{e2}(t)$ в переносном движении

$$S_{e2}(t) = \frac{V_1 t}{2} - \frac{V_1 T}{12\pi} (\sin^3(\pi t/T) + 6 \sin(\pi t/T)),$$

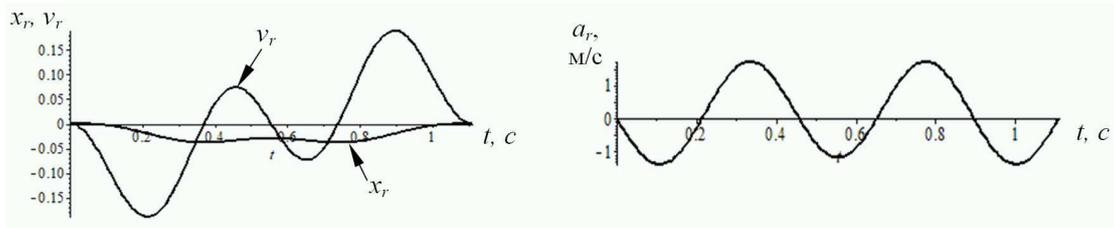


Рис. 3. Графики перемещения, скорости и ускорения в относительном движении при разгоне объекта с управлением $U_{e1} = a \sin pt$.

$$V_{e2}(t) = \frac{V_1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi t}{T} \right) (2 + \sin^2(\pi t/T)) \right), \quad U_{e2}(t) = \frac{3V_1 \pi \sin^3(\pi t/T)}{4T}, \quad (7)$$

графики которых изображены на рисунке 4.

Решение уравнения (4) с учетом нулевых начальных условий и управления (6) записывается так:

$$x_r(T) = -\frac{3\pi V_1 T}{(144\pi^4 - 160\pi^2 k^2 T^2 + 16k^4 T^4)} \left(3 \sin \frac{\pi t}{T} (k^2 T^2 - 9\pi^2) + \sin \frac{3\pi t}{T} (\pi^2 - k^2 T^2) \right) - \frac{9}{2k} \frac{\pi^4 V_1 \sin(kt)}{(9\pi^4 - 10\pi^2 k^2 T^2 + k^4 T^4)}. \quad (8)$$

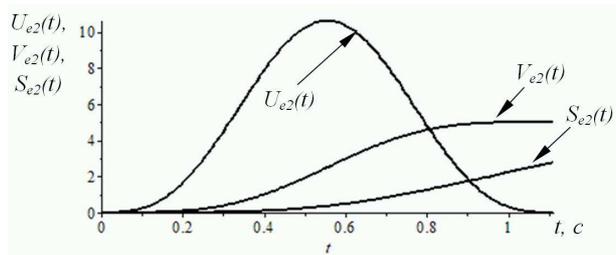


Рис. 4. Графики $S_{e2}(t)$, $V_{e2}(t)$ и $U_{e2}(t)$ при разгоне объекта с управлением $U_{e2} = a \sin^3 pt$.

С использованием выше описанного алгоритма выбора времени движения и учетом моментных соотношений графики $x_r(T)$, $\dot{x}_r(T)$ изображены на рисунке 5.

Для того же общего времени движения ($T = 1,11035$ с) на рисунке 6 построены графики относительного движения. Перемещение — функция (8); выражения для скорости и ускорения не приведены из-за громоздкости. Представленные графики свидетельствуют о наступлении относительного покоя в конце движения.

Совместное рассмотрение графиков переносного (рисунок 4) и относительного (рисунок 6) движений подтверждает достижение цели: переносная скорость в конце движения равна 5 м/с, колебания отсутствуют, перемещение $L = 2,775$ м.

Графики относительного движения (рисунки 3 и 6) для управлений (1) и (6) показывают увеличение относительных перемещений, а также ускорений в случае управления (6). Для более “комфортного” движения следует, по возможности, выбирать управление (1).

Затраченная энергия в обоих случаях движения одинакова:

$$J_1 = \int_0^T m U_e(T) V_e(T) dt = \frac{m V_1^2}{2} = 12,25 \text{ Дж.}$$

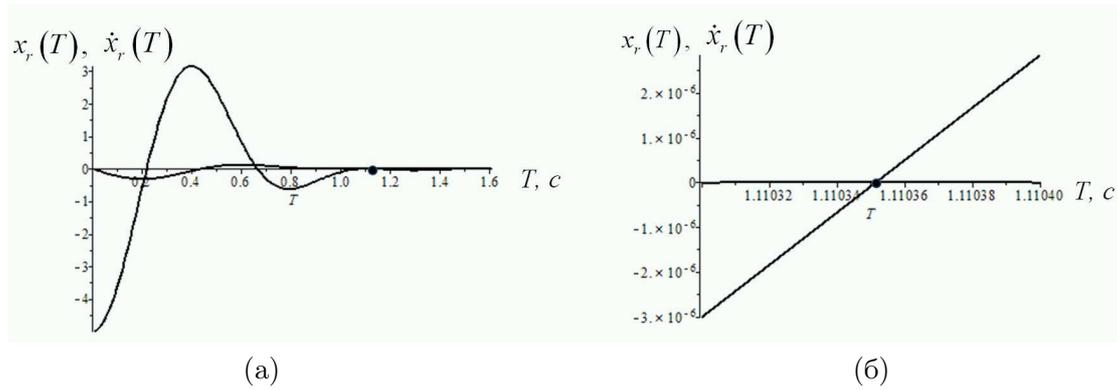


Рис. 5. Поиск общих корней моментных соотношений, уточнение корня

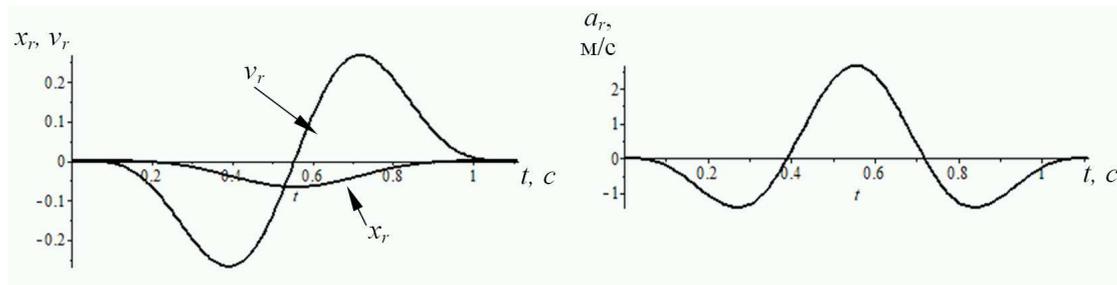


Рис. 6. Графики относительного движения при разгоне объекта с управлением $U_{e2} = a \sin^3 pt$.

Действие (по Лагранжу) $J_2 = \int_0^T 2T dt$ (здесь под интегралом T — кинетическая энергия) в первом случае $J_2 = \frac{3}{8} m T V_1^2 = 10,409$ Дж·с, во втором случае $J_2 = \frac{105}{256} m T V_1^2 = 11,385$ Дж·с.

2. Торможение объекта из начального состояния с некоторой заданной скоростью до состояния абсолютного покоя с отсутствием колебаний в конце движения.

2.1. Ускорение, как и ранее, задано в виде гармонической функции

$$U_{e1} = a \sin pt, \tag{9}$$

где $a, p = \text{const}$; движение подчинено краевым условиям:

$$S_{e1}(0) = 0, \quad V_{e1}(0) = V_1; \quad S_{e1}(T) = L, \quad V_{e1}(T) = 0. \tag{10}$$

Функции перемещения, скорости и ускорения в переносном движении получены аналогично описанному выше алгоритму в результате интегрирования функции (9) с учетом краевых условий (10); они похожи на уравнения (3) и поэтому здесь не приведены, их графики представлены на рисунке 7. За соответствующее время происходит торможение объекта с $V_1 = 5$ м/с до нуля.

Процедура поиска общего времени движения аналогична, как один из общих корней системы трансцендентных уравнений — моментных соотношений, представляющих собой равенство нулю перемещения и скорости в относительном движении в конечный момент времени. Поэтому приведены только графики относительного движения (рисунок 8), подтверждающие отсутствие колебаний в конце движения за то же время, как и в ранее приведенных примерах.

2.2. Торможение объекта с управлением $U_{e2} = a \sin^3 pt$, где $a, p = \text{const}$, и граничными условиями (10).

Процедуры конструирования управления переносным движением и определения общего времени движения описаны выше, поэтому дальше приведены только графики, описывающие

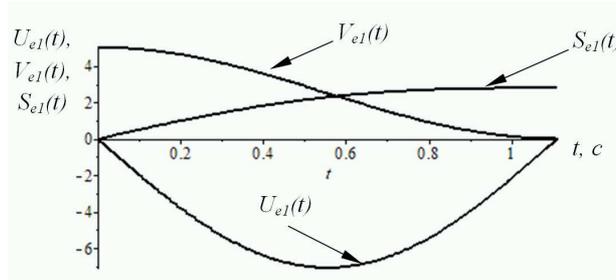


Рис. 7. Графики $S_{e1}(t)$, $V_{e1}(t)$ и $U_{e1}(t)$ при торможении объекта с управлением $U_{e1} = a \sin pt$.

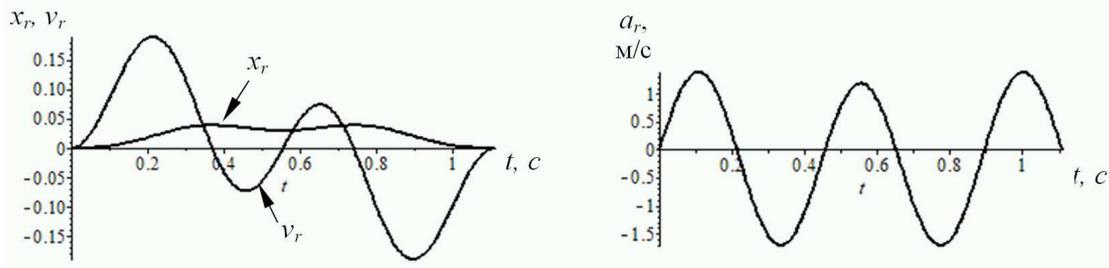


Рис. 8. Графики перемещения, скорости и ускорения в относительном движении при торможении объекта с управлением $U_{e1} = a \sin pt$.

динамику переносного (рисунок 9) и относительного (рисунок 10) движений объекта конечной жесткости для управления $U_{e2} = a \sin^3 pt$.

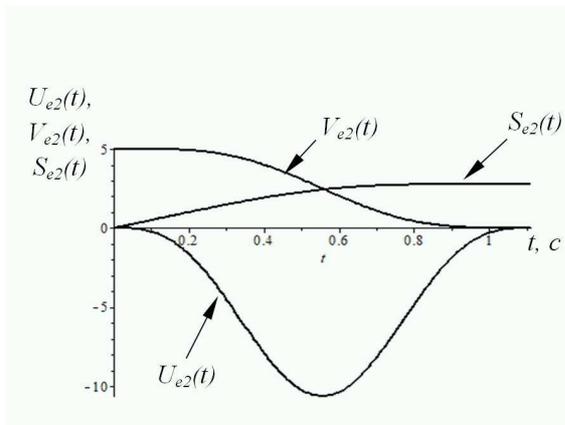


Рис. 9. Графики переносного движения при торможении объекта с управлением $U_{e2} = a \sin^3 pt$.

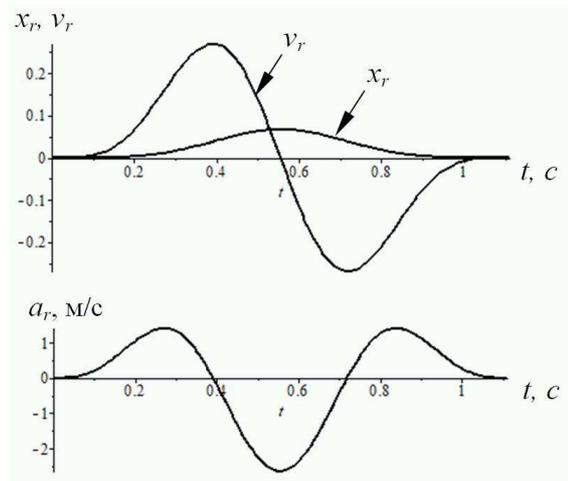


Рис. 10. Графики относительного движения при торможении объекта с управлением $U_{e2} = a \sin^3 pt$.

3. Разгон объекта из состояния покоя в состояние со скоростью V_1 с управлением в виде полинома.

Управление движением (ускорение переносного движения) принято в виде полинома

$$U_{e3} = \sum_{i=1}^6 C_i t^{i-1}, \quad (11)$$

где $C_i = \text{const}$. Движение подчинено краевым условиям:

$$S_{e3}(0) = 0, \quad V_{e3}(0) = 0; \quad V_{e3}(T) = V_1, \quad U_{e3}(T) = 0, \\ \frac{dU_{e3}(T)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2U_{e3}(T)}{dt^2} = 0. \quad (12)$$

После определения констант C_i с учетом (12) уравнение (11) принимает вид:

$$U_{e3} = \frac{4V_1}{T} \left(\frac{T-t}{T} \right)^3.$$

Графики перемещения $S_{e3}(t)$, скорости $V_{e3}(t)$ и ускорения $U_{e3}(t)$ в переносном движении при $m = 1$ кг, $V_1 = 5$ м/с, $T = 1$ с изображены на рисунке 11.

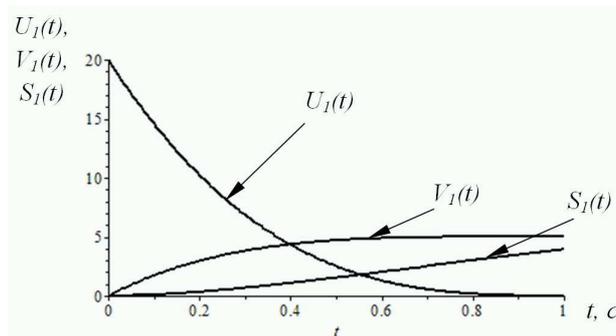


Рис. 11. Графики $S_{e3}(t)$, $V_{e3}(t)$ и $U_{e3}(t)$ при разгоне объекта с управлением $U_{e3} = \frac{4V_1}{T} \left(\frac{T-t}{T} \right)^3$.

Анализ графиков на рисунке 11 подтверждает достижение цели переносного движения $V_1 = 5$ м/с.

При этом управлении путь, пройденный объектом за $T = 1$ с, составляет 4 м. Энергия, затраченная на управляемое движение, равна $J_1 = \frac{mV_1^2}{2} = 12,25$ Дж. Действие (по Лагранжу)

$$J_2 = \int_0^T 2T dt = \frac{32}{45} mTV_1^2 = 17,77 \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

4. Разгон объекта из состояния со скоростью V_1 до скорости V_2 и возврат в состояние со скоростью V_1 с управлением в виде полинома.

Задано управление движением (ускорение переносного движения)

$$U_{e4} = \sum_{i=1}^6 C_i t^{i-1}, \quad (13)$$

где $C_i = \text{const}$. Граничные условия записываются следующим образом:

$$V_{e4}(0) = 0; \quad V_{e4}(T/2) = 2V_1; \quad S_{e4}(T) = L, \quad V_{e4}(T) = V_1, \\ U_{e4}(T) = 0, \quad \frac{dU_{e4}(T)}{dt} = 0. \quad (14)$$

После определения констант C_i с учетом (14) выражение (13) записывается так:

$$U_{e4} = \frac{16V_1}{T^4} (T^3 - 6T^2t + 9Tt^2 - 4t^3).$$

Графики переносного движения $S_{e4}(t)$, $V_{e4}(t)$ и $U_{e4}(t)$ при $m = 1$ кг, $V_1 = 5$ м/с, $T = 1$ с приведены на рисунке 12.

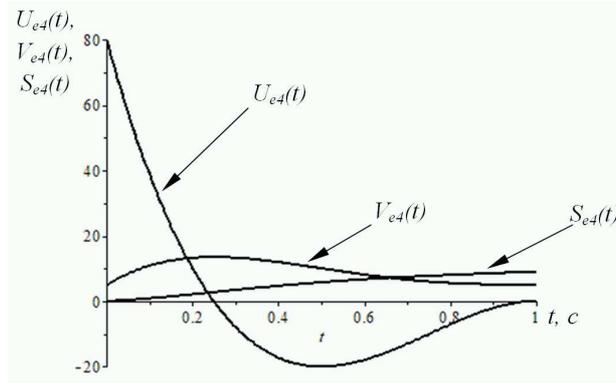


Рис. 12. Графики $S_{e4}(t)$, $V_{e4}(t)$ и $U_{e4}(t)$ при управлении $U_{e4} = \frac{16V_1}{T^4} (T^3 - 6T^2t + 9Tt^2 - 4t^3)$.

5. Учет линейно-вязкого сопротивления при движении объектов конечной жесткости.

Один из возможных путей конструирования заданного движения упругого объекта при учете линейно-вязкого сопротивления – движение по эталону, т. е. зная эталонное движение, необходимо найти управление (с учетом дифференциального уравнения, описывающего колебания объекта).

Поиск управления переносным движением рассмотрен на примере разгона объекта до скорости V_1 .

Дифференциальное уравнение колебаний объекта с одной степенью свободы с учетом линейно-вязкого сопротивления имеет вид:

$$\frac{d^2x_r}{dt^2} + 2n\frac{dx_r}{dt} + k^2x_r = -U_e(T), \tag{15}$$

где k – частота собственных колебаний; n – коэффициент линейно-вязкого сопротивления.

Принимая выражение для x_r из (5), как эталонное относительное движение, после вычисления производных и их подстановки в (15), получено выражение для $U_e(t)$. Само выражение $U_e(t)$ здесь не приводится, но графики ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и перемещения $S_e(t)$ в переносном движении изображены на рисунке 13 для исходных данных: $k = 4,5\pi$; $n = 2,9$; $V_1 = 5$ м/с.

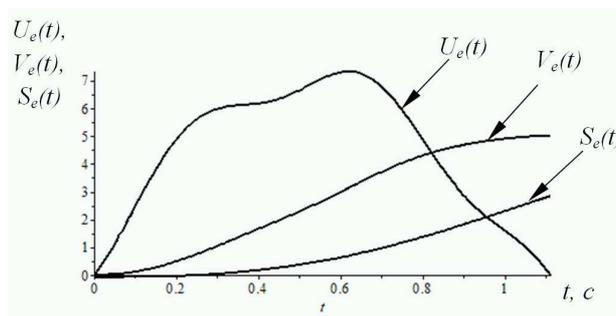


Рис. 13. Графики переносного движения с учетом линейно-вязкого сопротивления.

Из графиков (рисунок 13) следует, что цель переносного движения достигается: $V_1 = 5$ м/с. При этом вид функции управления существенно изменяется, а пройденный путь $L = 2,84$ м.

6. Управляемое движение с учетом сухого трения рассмотрено на примере торможения объекта, движущегося с заданной скоростью, до состояния покоя.

В абсолютном движении уравнение записывается так:

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} = U_e(T) - T_{\text{тр}},$$

где $U_e(t)$ — управление (ускорение переносного движения); $T_{\text{тр}}$ — сила трения, т. е. $U_e(T) = \frac{d^2 S_e}{dt^2} + T_{\text{тр}}$.

Относительное движение описывается уравнением:

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -U_e(T) - T_{\text{тр}}.$$

Для исходных данных $m = 1$ кг, $V_1 = 5$ м/с, $T = 1$ с, $T_{\text{тр}} = 2$ Н графики переносного и относительного движений изображены на рисунках 14, 15.

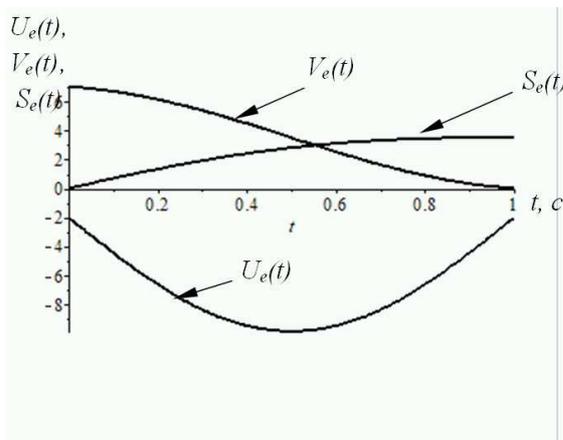


Рис. 14. Графики переносного движения при торможении объекта с учетом трения.

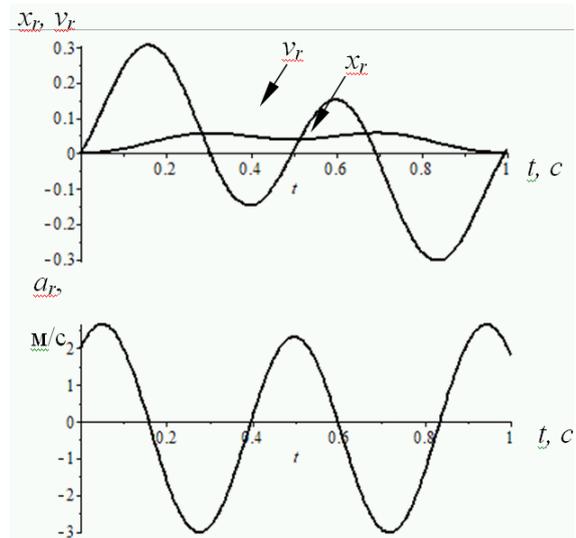


Рис. 15. Графики относительного движения при торможении объекта с учетом трения.

Графики на рисунке 14 свидетельствуют о достижении цели движения: в конечный момент времени объект приводится в состояние покоя. Из рисунка 15 следует, что в конце движения колебания отсутствуют. Абсолютный покой достигается как сумма переносного и относительного; т.е. справедливо $\ddot{x}_r(T) + U_e(T) = 0$.

ВЫВОДЫ

Существует широкий класс управлений, которые обеспечивают комфортное движение, т.е. снижение колебаний в интервале движения и, например, относительный покой в конце управляемого движения.

Исследованы новые управления (ускорения) для достижения цели оптимального движения – различные варианты разгона и торможения объекта. При использовании управления в виде гармонических функций выявлено, что с ростом степени (функции управления) увеличивается действие по Лагранжу, а также относительные перемещения, скорости и ускорения во временном интервале движения, что свидетельствует о росте уровня колебаний. Поэтому для комфортного движения следует выбирать, по возможности, управления с более низкими степенями функции ускорения переносным движением, которая и выступает в роли управления. Важно, что в конечной точке позиционирования перемещение и скорость в относительном движении отсутствуют, т.е. колебаний нет.

Общее время движения находится из моментных соотношений, обеспечивая в конечной точке отсутствие колебаний, как при разгоне, так и торможении объекта конечной жесткости. При этом время движения можно подобрать таким образом, чтобы снизить уровень колебаний во временном интервале движения с учетом ограничений двигателя, реализующего данное движение.

При учете линейно-вязкого сопротивления и сухого трения корректируются законы управления переносным движением и общее время движения. Предложенные управления могут быть применены для транспортировочных операций (постановка на движущуюся ленту транспортера, захват объекта, имеющего начальную скорость и т. д.), а также при управлении транспортными средствами при разгоне или торможении с экономией энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.
2. Крутько, П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели / П. Д. Крутько. — М. : Наука, 1987. — 304 с.
3. Карновский, И. А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И. А. Карновский, Ю. М. Почтман. — К. : Высп. школа, 1982. — 116 с.
4. Троицкий, В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем / В. А. Троицкий. — Л. : Машиностроение, 1976. — 236 с.
5. Черноусько, Ф. Л. Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, П. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. — М. : Наука, 1980. — 384 с.
6. Бутковский, А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1975. — 568 с.
7. Бохонский, А. И. Энергоемкость управления перемещением объектов / А. И. Бохонский // *Фундаментальные основы механики: матер. междунар. науч.-практич. конф.* — Новокузнецк, 2017. — С. 38–41.
8. Бохонский, А. И. Конструирование оптимального управления движением объектов как абсолютно твердых и деформируемых тел / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская, А. И. Рыжков // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.* — 2016. — № 3. — С. 70–76.
9. Бохонский, А. И. Конструирование оптимальных управлений перемещением упругих объектов / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская. — С-Пб. : НИЦ МС, 2020. — 120 с.
10. Бохонский, А. И. Реверсионный принцип оптимальности / А. И. Бохонский. — М. : Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. — 174 с.
11. Бохонский, А. И. Оценка энергопотребления для оптимального управления движением объекта (Evaluation of energy consumption for the object motion optimal control / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская // *ICMTMTE IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020.
12. Бохонский, А. И. Механика управляемого движения объектов / А. И. Бохонский, Н. И. Варминская, Т. В. Мозолевская. — М. : ИНФРА-М, 2021. — 170 с.

REFERENCES

1. Krasovsky N.N. Motion control theory. [Krasovsky N.N. Teoriya upravleniya dvizheniem]. Moscow: Science, 1968, 476 p.
2. Krut'ko P.D. Inverse problems of controlled systems dynamics: Linear models. [[Krut'ko P.D. Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemyh sistem: linejnye modeli]. Moscow: Science, 1987, 304 p.
3. Karnovsky I.A., Pochtman Yu.M. Methods for optimal control of deformable systems oscillations. [Karnovsky I.A., Pochtman Yu.M. Metody optimal'nogo upravleniya kolebaniyami

deformiruemyh system]. Kiev: Vyssh. shk., 1982, 116 p.

4. Troicky V.A. Optimal vibration processes of mechanical systems. [Troicky V.A. Optimal'nye processy kolebaniy mekhanicheskikh system]. L.: Mashinostroenie, 1976, 236 p.

5. Chernous'ko F.L., Akulenko P.D., Sokolov B.N. Oscillation control. [Chernous'ko F.L., Akulenko P.D., Sokolov B.N. Upravlenie kolebaniyami]. Moscow: Science, 1980, 384 p.

6. Butkovsky A.G. Control methods for systems with distributed parameters. [Butkovsky A.G. Metody upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami]. Moscow: Science, 1975, 568 p.

7. Bokhonsky A.I. Energy intensity of object motion control. [Bokhonsky A.I. Energoemkost' upravleniya peremeshcheniem ob'ektov]. *Fundamental'nye osnovy mekhaniki — Fundamentals of mechanics*, 2017, pp. 38–41.

8. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Designing optimal motion control for objects as absolutely rigid and deformable bodies. [Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Konstruirovaniye optimal'nogo upravleniya dvizheniya ob'ektov kak absolyutno tverdyh i deformiruemyh tel]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii — Fundamental and applied problems of engineering and technology*, 2016, no. 3, pp. 70–76.

9. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Designing optimal controls for the elastic objects motion. [Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Konstruirovaniye optimal'nyh upravlenij peremeshcheniem uprugih ob'ektov]. S-Pb.: NIC MS, 2020, 120 p.

10. Bokhonsky A.I. Optimality reversive principle. [Bokhonsky A.I. Reversionnyj princip optimal'nosti]. Moscow: INFRA-M, 2016, 174 p.

11. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Evaluation of energy consumption for the object motion optimal control. [Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Ocenka energopotrebleniya dlya optimal'nogo upravleniya dvizheniem ob'ekta]. *Materials, Science and Engineering*, 2020.

12. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Mozolevskaya T.V. Mechanics of objects controlled motion. [Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Mozolevskaya T.V. Mekhanika upravlyaemogo dvizheniya ob'ektov]. Moscow: INFRA-M, 2021, 170 p.

Варминская Наталья Ивановна, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин Черноморского высшего военно-морского училища имени П. С. Нахимова, Севастополь, Россия
E-mail: nvarminska@gmail.com

Varminskaya Natalia Ivanovna, Ph. D., associate professor, Head of Physics and General Technical Disciplines Department of Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol, Russia
E-mail: nvarminska@gmail.com