УДК 517.9

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ И КРИТИЧЕСКОЙ НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Ж. И. Бахтина, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.

Аннотация. Мы исследуем методы математического моделирования объектов и явлений, описывающихся в теории динамических уравнений на временных шкалах. Нами уже была доказана возможность решить проблемы интегрального исчисления в данной теории, которые были вызваны несвязностью самих временных шкал, с помощью метода дифференциала Стилтьеса. Так мы попадаем в зону действия корректной теории Штурма-Лиувилля для импульсных задач. В настоящей работе мы говорим о неосцилляции и критической неосцилляции однородных динамических уравнений на временных шкалах.

Ключевые слова: динамические уавнения, временная шкала, дырка, неосцилляция уравнения, критическая неосцилляция уравнения, импульсная задача, метод Штурма.

ABOUT THE NON-OSCILLATION AND THE CRITICAL NON-OSCILLATION OF DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES

Zh. I. Bakhtina, S. A. Shabrov

Abstract. We investigate the methods of mathematical modeling of objects and phenomena described in the theory of dynamic equations on time scales. We have already proved the possibility of solving the problems of integral calculus in this theory, which were caused by the incoherence of the time scales themselves, using the Stieltjes differential method. So we get into the area of the correct Sturm-Liouville theory for impulse problems. In this paper we talk about non-oscillation and critical non-oscillation of homogeneous dynamic equations on time scales.

Keywords: dynamic equations, time scale, hole, non - oscillation of the equation, critical non-oscillation of the equation, impulse problem, Sturm method.

Мы продолжаем проводить исследования в области теории динамических уравнений на временных шкалах с помощью метода дифференциала Стилтьеса.

Напомним, что обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(pu')' + qu = f(= \lambda mu) \tag{0.1}$$

служит для описания систем и процессов различной природы. Ранее использование указанного уравнения с непрерывными параметрами $q(x)$, $f(x)$, $m(x)$ столкнулось с необходимостью его распространения на более широкие классы объектов, у которых параметры могут терять регулярность.

Попытки создания методов, подходящих для анализа нерегулярных ситуаций, начались еще в XIX веке - задача Стилтьеса об упругой нити с бусинками. В первой половине XX века был описан спектр собственных частот для колебаний упругой струны с произвольным распределением масс, когда "функция" $m(x)$ определяется обобщенной производной от произвольной неубывающей функции $M(x)$. Далее задача

$$u'' = \lambda m u, u(0) = u(l) = 0$$

с обобщенной функцией $m(x)$ стала объектом изучения в спектральном анализе. Это направление породило теорию обобщенных функций. Стоит отметить, что вопросы о качественных свойствах решений оставались недоступными.

В 90-е годы прошлого столетия воронежцами было предложено вместо уравнения (0.1) рассматривать уравнение вида

$$\int_0^x d(pu') + \int_0^x u\,dQ = \int_0^x dF (= \lambda \int_0^x u\,dM), \tag{0.2}$$

где $Q(x)$,$F(x)$ и $M(x)$ — поточечно определяемые функции ограниченной вариации, а интегралы понимаются по Стилтьесу. Если параметры Q,F и M регулярны, уравнение (0.2) после дифференцирования по x принимает вид

$$(pu')' + Q'u = F' (= \lambda u M').$$

Ю. В. Покорный предложил с помощью дифференциала Стилтьеса придать уравнению (0.2) аналогичный (0.1) вид

$$D(pu') + u\,DQ = DF (= \lambda u\,DM). \tag{0.3}$$

При этом символ Dg для функции ограниченной вариации $g(x)$ предложено трактовать в виде линейного на $C[a,b]$ функционала

$$(Dg)(u) = \int_0^l u\,dg.$$

Проработка такого подхода к уравнениям (0.3) и (0.2) позволила перенести на случай импульсных задач всю осцилляционную теорию Штурма. Далее была поставлена задача о распространении метода дифференциала Стилтьеса на теорию динамических уравнений на временных шкалах ([ДУВШ]).

1. КРАТКИЙ ЭКСКУРС В ОСНОВЫ ТЕОРИИ [ДУВШ]

Теория динамических уравнений на временных шкалах получила развитие в основном в работах англоязычных авторов, моделирующих процессы и явления в области космологии, биологии и экономики. В их работах изучаются уравнения вида

$$(p(t)x^{\triangle}(t))^{\triangle} + q(t)x(\sigma(t)) = f(t) \tag{1.1}$$

для случая, когда аргумент решений t принадлежит "временной шкале $\mathbb{T}$" — произвольному замкнутому множеству из вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$. Здесь $\triangle$-производная $x^{\triangle}(t)$ по определению означает

$$x^{\triangle}(t_0) = \lim_{s \to t_0} \frac{x(\sigma(t_0)) - x(s)}{\sigma(t_0) - s}, t_0 \in \mathbb{T}. \tag{1.2}$$

Под $\sigma(t)$ понимается величина

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}. \tag{1.3}$$

Интересно, что множество $\mathbb{T}$ может быть сильно "дырявым" по типу канторова множества. Авторы же [ДУВШ] конструируют теорию, внешне вполне аналогичную теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом они вынуждены развивать дифференциальное исчисление, обратное к нему интегральное исчисление и прочее.

Напомним, что дополнение шкалы $\mathbb{T}$ до всей числовой оси состоит из объединения конечного или счетного числа интервалов. Каждый такой интервал мы назвали дыркой шкалы $\mathbb{T}$. Строгое неравенство $\sigma(t) > t$ по определению $\sigma(t)$ имеет место тогда и только тогда, когда t является левым краем какой-либо дырки. $\triangle$-производная не отличается от обычной производной, если t не является левым краем какой-либо дырки. Если t - левый край какой-либо дырки, то $x^{\triangle}(t) \neq x'(t-0)$, а ведь для осмысления второй производной $(x^{\triangle}(t))^{\triangle}$ необходимо иметь однозначно определенное значение $x^{\triangle}(t)$ в точке t. Смысл последнего становится корректным лишь в предположении $x^{\triangle}(t) = x'(t-0)$, а это нигде англоязычные авторы теории [ДУВШ] не оговаривали, но пользовались этим фактом.

В целом теория [ДУВШ] не полна: не предусмотрен анализ вопросов о существовании решений, об их зависимости от параметров, не обсуждаются вопросы полноты соответствующих функциональных пространств, где ищется решение, не обсуждаются привычные для обыкновенных дифференциальных уравнений качественные свойства решений типа теорем сравнения Штурма и прочее. Процедура интегрирования, обращающая $\triangle$-дифференцирование, определяется равенством

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} x^{\triangle}(t)\triangle t = x(\beta) - x(\alpha), \tag{1.4}$$

что с учетом дырявости $\mathbb{T}$ невозможно сопоставить с традиционными для теории интеграла и теории меры представлениями.

В определяющей интеграл формуле (1.4) функция $x(t)$ есть, очевидно, первообразная для $x^{\triangle}(t)$. Такой взгляд на "определенный интеграл" не позволяет говорить о квадратуре произвольной непрерывной функции, т. е. о решении даже простейшего уравнения типа

$$x^{\triangle}(t) = f(t)$$

для $f \in C[a,b]$, так как решение должно даваться формулой типа

$$x(t) = \int\limits_{a}^{t} f(s)ds + C$$

при разумном определении интеграла.

По Лейбницу-Риману-Лебегу-Радону толкования определенного интеграла подразумевают (так или иначе) введение меры, так как интеграл — по большому счету как функция множества — есть не что иное как мера. Однако в теории [ДУВШ] и присутствия меры не ощущается.

2. ВЗГЛЯД НА ТЕРИЮ [ДУВШ] С ПОЗИЦИИ МЕРЫ

Ю. В. Покорным было предложено распространить метод дифференциала Стилтьеса на теорию [ДУВШ], благодаря чему несвязность области определения $\mathbb{T}$ была преодолена введением на $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ некоторой меры (функции Q), в результате чего уравнение (1.1) оказалось частным случаем уравнения (0.3), т. е. попало в зону действия корректной теории. Мы оказались в классе абсолютно непрерывных функций без дырок в области определения аргумента, что стало возможным благодаря непрерывному распространению динамического уравнения на всю числовую ось.

Мы всюду используем стандартное для обыкновенных дифференциальных уравнений и для математической физики обозначение искомых решений в виде $u(x)$ при традиционном обозначении независимой переменной через x. Мы расширяем взгляд на динамические уравнения, придавая им вид

$$(pu')(x) - (pu')(0) + \int\limits_0^x u(s)dQ(s) = \int\limits_0^x dF(= \lambda \int\limits_0^x udM). \tag{2.1}$$

Для случая гладких параметров $p(x)$,$Q(x)$,$F(x)$ после дифференцирования (2.1) по x мы будем иметь уравнение

$$(pu')' + qu = f(= \lambda mu)$$

при $q = Q'$,$f = F'$,$m = M'$ - в точности классическое уравнение Штурма-Лиувилля. Уравнению (2.1) мы можем придавать вид

$$D(pu') + uDQ = DF(= \lambda uDM).$$

Рассматривая (2.1) не на отрезке, а (в соответствии с [ДУВШ]) на временной шкале $\mathbb{T}$, получаем, что при некотором специальном выборе Q-меры и функции $F(x)$ уравнение (2.1) окажется адекватным уравнению

$$(pu^{\triangle})^{\triangle}(x) + q(x)u(\sigma(x)) = f(x). \tag{2.2}$$

Адекватность эта достигается тем, что нам удалось распространить функции $p(x)$,$Q(x)$,$F(x)$ на всю ось $(-\infty,\infty)$ так, что непрерывные на $\mathbb{R}$ решения (2.1) будут совпадать на $\mathbb{T}$ с решениями уравнения (2.2). При этом в (2.2) мы, как и в [ДУВШ], под $\triangle$- производной понимаем

$$u^{\triangle}(x_0) = \lim_{s\to x_0} \frac{u(\sigma(x_0)) - u(s)}{\sigma(x_0) - s}; x_0 \in \mathbb{T}, \tag{2.3}$$

где, естественно, под $\sigma(x)$ подразумевается

$$\sigma(x) := inf\{s \in \mathbb{T} : s > x\}.$$

Интегралы в уравнении (2.1) понимаются по Стилтьесу, а функции $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$, $M(x)$ предполагаются лежащими в пространстве BV функций ограниченной вариации. Поскольку наш разговор усложнялся несвязностью множества $\mathbb{T}$ и необходимостью опереться на аппарат теории интеграла, мы модифицировали необходимые понятия и факты из теории меры и теории интеграла на случай несвязных компактов из $\mathbb{R}$.

У нас $\mathfrak{N}$ — множество левых краев дырок из $\mathbb{T}$. Как уже было сказано, динамическое уравнение отличается от обыкновенного только на множестве $\mathfrak{N}$.

В теории [ДУВШ] предполагается непрерывность коэффициентов p и q и непрерывность решений уравнения вместе с производными $u^{\triangle}(x)$ и $(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle}$. Эти условия мы назвали допустимыми условиями [ДУВШ].

Основной стала следующая теорема.

Теорема. *Пусть для уравнения (2.2) выполняются допустимые условия [ДУВШ]. Тогда существуют функции $P(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ с локально ограниченным изменением на $\mathbb{R}$ и такие,* *что каждому из допустимых решений $u(x)$ уравнения (2.2) соответствует определенное и непрерывное на всем $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ решение $\widehat{u}(x)$ уравнения*

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ(x) = \int\limits_r^s dF(x),$$

совпадающее с $u(x)$ на шкале $\mathbb{T}$. Здесь интегралы понимаются по Стилтьесу.

Здесь функция $Q(x)$ берется в виде

$$Q(x) = \int\limits_a^x q_0 ds + \sum_{\tau\in\mathfrak{N},\tau\leqslant x} q(\tau)\mu(\tau)\theta(x-\sigma(\tau)),$$

где $q_0 = q(x)$ при $x = \sigma(x)$ и $q_0 \equiv 0$ на $\mathbb{W}$ (дополнении $\mathbb{T}$ до всей оси), $\theta(x)$ - функция Хевисайда, $\mu(\tau) = \sigma(\tau) - \tau$.

Уравнение

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ(x) = \int\limits_r^s dF(x)$$

можно переписать в виде

$$D(Pu') + uDQ = DF.$$

Доказательство этой теоремы основано на установленном свойстве полноты $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ по метрике для каждого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{E}$ ($\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$) — множество абсолютно непрерывных на $\mathbb{R}$ (соответственно на $\mathbb{T}$) функций, производные которых имеют локально ограниченное изменение на $\mathbb{R}$ (на $\mathbb{T}$). Через $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ нами было обозначено пространство функций из $\mathbb{E}$, совпадающих на $\mathbb{T}$ с элементами из $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ и линейных на каждой дырке $\mathbb{T}$.

Приведенная основная теорема позволяет сформулировать наши результаты для основных объектов [ДУВШ] с помощью трансляции этих задач в линейчатое расширение $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$. Все доказательства излагаются уже в линейчато расширенном пространстве $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$.

Функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ из (2.2) принадлежит $BV(\mathbb{T})$. $\widehat{P}(x)$,$\widehat{Q}(x)$,$\widehat{F}(x)$ - их продолжения на $\mathbb{W}$ равенствами

$$\widehat{P}(x) = p(\alpha - 0),\widehat{Q}(x) \equiv 0,\widehat{F}(x) \equiv 0,$$

где α — левый край дырки.

Весь разговор данной тематики ведется на компактных подмножествах $\mathbb{R}$ (пересечении $[a,b]$ с временной шкалой $\mathbb{T}$). Если шкала неограничена, можно вести аналогичный разговор локально на каждом отрезке, поэтому формулировки результатов будем озвучивать на $\mathbb{T}$, подразумевая детализацию на каждом отрезке. Например, в пространстве $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ введена топология на каждом сужении $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ на компактный интервал. На каждом конечном интервале соответствующее расширение $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ является нормированным пространством, так что в целом на всей оси пространство $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ счетномерно.

3. О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ОДНОРОДНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Определение. *Будем называть однородное динамическое уравнение*

$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = 0 \tag{3.1}$$

неосциллирующим на $[a,b]$, если всякое нетривиальное решение уравнения (3.1) *имеет на $[a,b]$ не более одного нуля.*

Вместо уравнения (3.1) будем рассматривать уравнение в дифференциалах Стилтьеса

$$D(Pu') + uDQ = 0, \tag{3.2}$$

работая в расширенном пространстве.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Для неосцилляции на* $[a,b]$ *уравнения* (3.1) *достаточно, чтобы функция* $Q(x)$ *из уравнения* (3.2) *монотонно не убывала на* $[a,b]$.

Отметим эквивалентность свойств:

а) уравнение (3.1) не осциллирует на $[a,b]$;

б) на $[a,b]$ нет сопряженных $x = a$ точек, отличных от $x = a$; нет отличных от $x = b$ точек, сопряженных $x = b$;

в) существует неотрицательное на $[a,b]$ решение уравнения (3.1), такое что $u(a) > 0$ (или $u(b) > 0$);

г) существует строго положительное на $[a,b]$ решение уравнения (3.1).

Напоминаем, что для фиксированного однородного дифференциального уравнения второго порядка на $[a,b]$ точка $x = \xi$ называется сопряженной точке a, если существует нетривиальное решение с нулями в точках $x = a$ и $x = \xi$.

4. О КРИТИЧЕСКОЙ НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ОДНОРОДНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Рассуждения введем в расширенном пространстве.

Определение. *Будем называть однородное динамическое уравнение*

$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = 0 \tag{4.1}$$

критически неосциллирующим на $[a,b]$, *если оно не осциллирует на любом отличном от* $[a,b]$ *промежутке* $[\xi_1,\xi_2]$ *из* $[a,b]$, *не обладая этим свойством на* $[a,b]$.

Это значит, что точка $x = b$ является сопряженной точке $x = a$, но внутри интервала (a,b) подобных точек нет. Иными словами, отрезок $[a,b]$ является промежутком критической неосцилляции, если однородное уравнение $(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = 0$ имеет нетривиальное строго положительное на (a,b) решение с нулями на концах.

Будем называть дифференциальным неравенством и записывать в виде

$$D(Pu') + uDQ \geqslant 0$$

любое уравнение

$$D(Pu') + uDQ = DF,$$

где функция $F(x)$ не убывает на отрезке $[a,b]$ и непрерывна на его концах.

Теорема 4.1. *Пусть уравнение* (4.1) *критически не осциллирует на* $[a,b]$. *Тогда любое нетривиальное и неотрицательное на отрезке* $[a,b]$ *решение* $u(x)$ *неравенства*

$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) \geqslant 0,$$

не имеет нулей на интервале (a,b). *При этом* $u^{\triangle}(a) \neq 0$ *(*$u^{\triangle}(b) \neq 0$*), если* $u(a) \neq 0$ *(*$u(b) \neq 0$*).*

Доказательство (приводим в расширенном пространстве).

Будем рассматривать однородное уравнение

$$D(Pu') + uDQ = 0$$

и неравенство
$$D(Pu') + uDQ \geqslant 0.$$
Предположим противное. Пусть найдется нетривиальное и неотрицательное решение $u(x)$ неравенства
$$D(Pu') + uDQ \geqslant 0,$$
имеющее хотя бы один нуль на (a,b). Обозначим через G_0 множество точек из (a,b), в которых функция $u(x)$ обращается в нуль. Это множество непусто, замкнуто относительно $[a,b]$ и не совпадает с (a,b). Тогда на (a,b) найдется граничная точка x_0 множества G_0. В ней $u(x_0) = 0$. Обозначим через (ξ_1,ξ_2) интервал, примыкающий к x_0 и не лежащий в G_0. Пусть $x_0 = \xi_1$. Без ограничения общности можем считать, что точка ξ_2 не является особой, то есть функции P,Q,F в ней непрерывны.

Предположим для начала, что точка ξ_1 тоже не является особой. Заметим, что однородное уравнение не осциллирует на отрезке $[\xi_1,\xi_2]$ и, следовательно, имеет на нем строго положительное решение φ. По аналогу теоремы Пойа-Мамманы (см. [1]) получаем:
$$h(x) = h(\xi_1) - \int\limits_{\xi_1}^{x} \varphi dF,$$
где $h(x) = \varphi^2(x)P(x)(u/\varphi)'(x)$. Заметим, что $h(\xi_1) = P(\xi_1)u'(\xi_1)\varphi(\xi_1)$. Однако ξ_1 является минимума функции $u(x)$, и, следовательно, $u'(\xi_1) = 0$, а поэтому $h(\xi_1) = 0$. Таким образом, $(u/\varphi)' \leqslant 0$, то есть функция u/φ не возрастает на $[\xi_1,\xi_2]$, что с учетом равенства $(u/\varphi)(\xi_1{+}0) = 0$ противоречит неравенству $u/\varphi > 0$ на $[\xi_1,\xi_2]$.

Пусть теперь точка ξ_1 является особой. Тогда справедливо равенство
$$-P(\xi_1+0)u'(\xi_1+0) + P(\xi_1-0)u'(\xi_1-0) = \Delta F(\xi_1).$$
Однако левая часть последнего равенства неположительна, а правая — неотрицательна. Это возможно лишь тогда, когда $\Delta F(\xi_1) = 0$ и $P(\xi_1+0)u'(\xi_1+0) = P(\xi_1-0)u'(\xi_1-0)$. Заметим, что $u'(\xi_1+0) \geqslant 0$, а $u'(\xi_1-0) \leqslant 0$, откуда вытекает, что возможен только случай, когда $u'(\xi_1+0) = u'(\xi_1-0) = 0$. Следовательно, скачки P,Q,F в точке ξ_1 никакой роли не играют, и мы можем воспользоваться аналогом теоремы Пойа-Мамманы. С учетом $u'(\xi_1+0) = 0$, аналогично рассмотренному случаю, получим противоречие.

Пусть теперь $u(a) = 0$. Взяв точку ξ_1 тостаточно близко к a, будем иметь неосцилляцию уравнения
$$D(Pu') + uDQ = 0$$
на $[a,\xi_1]$. Получаем, что равенство $u'(a) = 0$ невозможно. Аналогично, если $u(\xi_2) = 0$, то $u'(\xi_2) \neq 0$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть уравнение*
$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = 0$$
критически не осциллирует на $[a,b]$. *Тогда любое нетривиальное решение неравенства*
$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) \geqslant 0$$
при условиях
$$u(a) \geqslant 0, u(b) \geqslant 0$$
превращает эти неравенства в равенства, то есть удовлетворяет задаче
$$\begin{cases} (p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = 0, \\ u(a) = 0, u(b) = 0. \end{cases}$$

Доказательство (приводим в расширенном пространстве).

Пусть $v(x)$ — положительное на (a,b) решение задачи

$$\begin{cases} D(Pu') + uDQ = 0, \\ u(a) = 0, u(b) = 0. \end{cases}$$

Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение

$$D(Pu') + uDQ \geqslant 0,$$

при условиях

$$u(a) \geqslant 0, u(b) \geqslant 0.$$

Рассмотрим непрерывную на (a,b) функцию $\varphi = u/v$. Пусть $\varphi \neq const$. Если нижняя грань $\lambda_0 = \inf\limits_{(a,b)} \varphi$ достигается в одной из внутренних точек $x_0 \in (a,b)$, то функция $h = u - \lambda_0 v$ будет являться неотрицательным решением неравенства

$$D(Pu') + uDQ \geqslant 0,$$

обращаясь в нуль в точке $x_0 \in (a,b)$, что противоречит предыдущей теореме.

Пусть $\inf\limits_{(a,b)} \varphi$ достигается в одной из граничных точек (a,b), например в точке $x = a$. Если $\lambda_0 > -\infty$, то из равенства $v(a) = 0$ следует, что $u(a) = 0$. Но тогда $\lambda_0 = u'(a)/v'(a)$ и неотрицательная на $[a,b]$ функция $h = u - \lambda_0 v$, удовлетворяя неравенству

$$D(Pu') + uDQ \geqslant 0,$$

имела бы в точке $x = a$ нулевое значение и нулевую производную, что снова противоречит предыдущей теореме.

Пусть теперь $\lambda_0 = -\infty$. Это возможно в силу неравенства $u(a) \geqslant 0$ лишь в случае, когда $u(a) = 0$. А так как $v'(a) > 0$ и предел $\varphi = u/v$ при $x \to 0$ равен $u'(a)/v'(a)$, то равенство $\lambda_0 = -\infty$ невозможно. Значит, функция $\varphi = u/v$ есть константа. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

2. Saker, S. H. Oscillation of Second-Order Forced Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales / S. H. Saker // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2005. — № 23. — P. 57–64.

3. Hilger, S. Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus / S. Hilger // Results Math. — 1990. — V. 18. — P. 18–56.

4. Bohner, M. Dynamic Equations on Time Scales / M. Bohner, A. Peterson // An Introduction with Applications. Birkh user Boston, MA, 2001. — 369 p.

5. Dosly, O. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales / O. Dosly, S. Hilger // J. Comp. Appl. Math. — 2002. — V. 141. — P. 147–158.

6. Erbe, L. Riccati equations on a measure chain / L. Erbe, A. Peterson // Dynamic systems and applications 3. — 2001. — P. 193–199.

7. Покорный, Ю. В. О стилтьесовском заглаживании временных шкал / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина // Воронеж : Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции Воронежской зимней математической школы, 2009. — С. 140–141.

8. Покорный, Ю. В. Метод дифференциалов Стилтьеса в некоторых задачах с импульсными особенностями / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Давыдова // М. : Международная научная конференция "Современные проблемы вычислительной математики и математической физики", посвященная памяти академика А. А. Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения. Серия Дифференциальные уравнения и математическая физика, 2009.

9. Бахтина, Ж. И. О задаче Штурма-Лиувилля на несвязных компактах / Ж. И. Бахтина // Воронеж : Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XX 2009. — С. 20–22.

10. Бахтина, Ж. И. Метод интеграла Стилтьеса в теории динамических уравнений на временных шкалах / Ж. И. Бахтина // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2009. — № 1. — С. 3–8.

11. Бахтина, Ж. И. Метод дифференциала Стилтьеса в моделировании некоторых динамических задач с прерывистым или ветвящимся аргументом: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Воронеж. гос. университет, Воронеж, 2009. — 100 с.

REFERENCES

1. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

2. Saker S.H. Oscillation of Second-Order Forced Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2005, no. 23, pp. 57–64.

3. Hilger S. Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus Results Math., 1990, vol. 18, pp. 18–56.

4. Bohner M., Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications. Birkh user Boston, MA, 2001, 369 p.

5. Dosly O., Hilger S. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales. J. Comp. Appl. Math., 2002, vol. 141, pp. 147–158.

6. Erbe L., Peterson A. Riccati equations on a measure chain. Dynamic systems and applications 3 (Atlanta, GA, 1999), Dynamic, Atlanta, GA, 2001, pp. 193–199.

7. Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I. On Stiltesov smoothing of time scales. [Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I. O stilt'esovskom zaglazhivanii vremennyh shkal]. Voronezh: Modern methods function theory and related problems. Proceedings of the conference of the Voronezh Winter Mathematical School, 2009, pp. 140–141.

8. Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I., Davydova M.B. The Stieltjes differential method in some problems with impulse singularities. [Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I., Davydova M.B. Metod differencialov Stilt'esa v nekotoryh zadachah s impul'snymi osobennostyami]. Moscow: International Scientific Conference "Modern Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics" dedicated to the memory of Academician AA Samarskiy in connection with the 90th anniversary of his birth, Series Differential Equations and Mathematical Physics, 2009.

9. Bakhtina Zh.I. On the Sturm-Liouville problem on disconnected compacts. [Bahtina ZH.I. O zadache SHturma-Liuvillya na nesvyaznyh kompaktah]. Voronezh: Modern methods of the theory of boundary value problems. Materials of the Voronezh Spring Mathematical School "Pontryagin Readings–XX", 2009, pp. 20–22.

10. Bakhtina Zh.I. The Stieltjes Integral Method in the Theory of Dynamic Equations on Time Scales. [Bahtina ZH.I. Metod integrala Stilt'esa v teorii dinamicheskih uravnenij na vremennyh shkalah]. *Aktual'nye problemy matematiki i informatiki (trudy matematicheskogo fakul'teta)* —

Actual problems of mathematics and Informatics (proceedings of the Faculty of Mathematics), 2009, no. 1, pp. 3–8.

11. Bakhtina Zh.I. Stieltjes differential method in modeling some dynamic problems with intermittent or branching argument: dissertation for the degree of candidate physical and mathematical sciences. [Bahtina ZH.I. Metod differenciala Stilt'esa v modelirovanii nekotoryh dinamicheskih zadach s preryvistym ili vetvyashchimsya argumentom: dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk]. Voronezh. state. University, Voronezh, 2009, 100 p.

Бахтина Жанна Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ioanna83@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Bakhtina Zhanna Igorevna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: ioanna83@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexsandrovich, Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90