УДК 517.95

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ НА СОПРЯЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ ПЕРВОГО РОДА

Ж. А. Балкизов

Институт прикладной математики и автоматизации — филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук

Поступила в редакцию 03.10.2022 г.

Аннотация. В работе исследована задача Трикоми для одного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа второго порядка, совпадающий с оператором Гельмгольца в области эллиптичности и вырождающимся гиперболическим оператором первого рода в области гиперболичности. Доказана теорема об априорной оценке решения исследуемой задачи. В случае, когда в области эллиптичности присутствует оператор Гельмгольца, априорная оценка решения получена в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$. А в случае, когда в области эллиптичности рассматриваемое уравнение совпадает с уравнением Лапласа получена оценка градиента решения. Из полученных априорных оценок вытекает единственность регулярного и существование слабого решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, уравнение Гельмгольца, вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение смешанного типа, задача Трикоми, задача Коши, априорная оценка.

ON AN A PRIORI ESTIMATE OF THE SOLUTION OF THE TRICOMI PROBLEM FOR THE CONJUGATION OF THE HELMHOLTZ EQUATION WITH A DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION OF THE FIRST KIND

Zh. A. Balkizov

Abstract. The Tricomi problem for a second-order mixed elliptic-hyperbolic type equation, which coincides with the Helmholtz operator in the ellipticity domain and the degenerate hyperbolic operator of the first kind in the hyperbolicity domain, is studied. A theorem on a priori estimation of the solution of the problem under study is proved. In the case when the Helmholtz operator is present in the ellipticity domain, an a priori estimate for the solution is obtained in the Sobolev space $W_2^1(\Omega)$. And in the case when the equation under consideration coincides with the Laplace equation in the region of ellipticity, an estimate for the gradient of the solution is obtained. The obtained a priori estimates imply the uniqueness of the regular and the existence of a weak solution of the problem under study.

Keywords: Laplace equation, Poisson equation, Helmholtz equation, degenerate hyperbolic equation, mixed type equation, Tricomi problem, Cauchy problem, a priori estimate.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из первых работ, посвященных фундаментальным исследованиям по теории уравнений смешанного типа второго порядка были работы Ф. Трикоми. В стандартной смешанной области D, ограниченной при $y > 0$ гладкой кривой Γ с концами в точках A и B (точки A и B не совпадают и лежат на оси Ox), а при $y < 0$ – характеристиками AC и BC уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

им в работе [1] была поставлена и исследована краевая задача Трикоми для уравнения (1). На линии перехода $y = 0$ должны были соблюдаться условия непрерывности решения задачи $u\,(x,y)$ и его производной $u_y\,(x,y)$. В работах [2], [3] результаты Ф. Трикоми были обобщены на случай уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + c\,(x,y)\,u = F\,(x,y)\,, \tag{2}$$

где m — нечетное натуральное число.

С целью упрощения исследований по теории краевых задач для уравнений смешанного типа в работах [4], [5], [6] вместо уравнений (1) и (2) была предложена более простая модель уравнения смешанного гиперболо-эллиптического типа

$$\operatorname{sign} y\, u_{xx} + u_{yy} = F\,(x,y)\,. \tag{3}$$

Различные краевые задачи для модельных и общих уравнений смешанного гиперболо-эллиптического типа второго порядка были исследованы в работах [7]–[17]. Подробный обзор литературы по проблеме краевых задач для уравнений смешанного типа содержатся в монографиях [4], [5], [6], [18]–[27]. В работе [28] получена априорная оценка решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, а в [29] с использованием разностных методов решена задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Вопросам применения теории краевых задач для уравнений смешанного типа к проблемам околозвуковой и сверхзвуковой газовой динамики посвящены монографии [30]–[32].

В большинстве из перечисленных выше работ исследования проводились по краевым задачам для уравнений смешанного типа, порядок вырождения которых из гиперболической и эллиптической частей области совпадали.

В данной работе исследована краевая задача Трикоми для уравнения смешанного типа, которое совпадает с неоднородным уравнением Гельмгольца в области эллиптичности и с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода в области его гиперболичности. Получена априорная оценка решения задачи, из которой следует единственность регулярного решения исследуемой задачи, а также существование слабого решения сопряженной задачи к исследуемой.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m\,u_{xx} - u_{yy} + a\,(-y)^{\frac{m-2}{2}}\,u_x\,, & y < 0, \\ u_{xx} + u_{yy} - bu + f, & y > 0, \end{cases} \tag{4}$$

где m, a, b заданные действительные числа, причем $m > 0$, $|a| \leqslant \frac{m}{2}$, $b \geqslant 0$; $f = f\,(x,y)$ — заданная функция, $u = u\,(x,y)$ — искомая функция.

Уравнение (4) при $y < 0$ является вырождающимся гиперболическим уравнением вида

$$(-y)^m\,u_{xx} - u_{yy} + a\,(-y)^{\frac{m-2}{2}}\,u_x = 0, \tag{5}$$

а при $y > 0$ совпадает с неоднородным уравнением Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} - bu = -f\,(x,y)\,. \tag{6}$$

Уравнение (5) относится к классу вырождающихся гиперболических уравнений первого рода [25, с. 23], то есть ни в одной точке линии вырождения $y = 0$ касательная не совпадает с характеристическим направлением уравнения (5). Важным свойством уравнения (5) является тот факт, что при $|a| \leqslant \frac{m}{2}$ для него корректна задача Коши в обычной постановке с данными на линии параболического вырождения $y = 0$, несмотря на то, что нарушено условие Проттера [33]. При $m = 2$ уравнение (5) переходит в уравнение Бицадзе-Лыкова [6, с. 37], [22, с. 234], [34], а при $a = 0$ из уравнения (5) приходим к уравнению Геллерстедта, которое, как показано в монографии [35, с. 234], находит применение в задаче определения формы прорези плотины. Частным случаем уравнения (5) также является уравнение Трикоми, являющееся теоретической основой околозвуковой газовой динамики [29, с. 38], [30, с. 280].

Уравнение (4) рассматривается в области Ω, ограниченной характеристиками $AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и $BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$ уравнения (5), выходящими из общей точки $C = \left(\frac{r}{2}, -\left[\frac{(m+2)r}{4}\right]^{2/(m+2)}\right)$, проходящими через точки $A = (0,0)$ и $B = (r,0)$, а также прямоугольником с вершинами в точках A, B, $A_0 = (0,h)$, $B_0 = (r,h)$, $h > 0$ при $y > 0$. Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}$; $I = \{(x,y):\ 0 < x < r,\ y = 0\}$ – интервал AB прямой $y = 0$; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$.

Определение. *Регулярным* в области Ω решением уравнения (4) назовем всякую функцию $u = u(x,y)$ из класса $C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, при подстановке которой уравнение (4) обращается в тождество.

В работе исследуется задача Трикоми в следующей постановке.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x,y)$ уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(r,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{7}$$

$$u(x,h) = \varphi_3(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{8}$$

$$u\left[\Theta_r(x)\right] = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{9}$$

где $\Theta_r(x) = \left(\frac{r+x}{2}, -\left[\frac{(m+2)(r-x)}{4}\right]^{2/(m+2)}\right)$ точка пересечения характеристики уравнения (5), выходящей из точки $(x,0) \in I$ с характеристикой BC; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(x)$, $\psi(x)$ заданные функции, причем выполнены условия согласования $\varphi_1(h) = \varphi_3(0)$, $\varphi_2(0) = \psi(r)$, $\varphi_2(h) = \varphi_3(r)$.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ

Пусть существует решение задачи (4), (7), (8), (9) и пусть

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{10}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < r. \tag{11}$$

При $|a| \leqslant \frac{m}{2}$ решение задачи Коши (10)-(11) для уравнения (5) выписывается по одной из формул [36, с. 14]

$$u(x,y) = \frac{1}{B(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \int\limits_0^1 \tau\left[x + (1-\varepsilon)(-y)^{1/(1-\varepsilon)}(2t-1)\right] t^{\varepsilon_2 - 1}\,(1-t)^{\varepsilon_1 - 1}\,dt +$$

$$+\frac{y}{B\left(1-\varepsilon_1,1-\varepsilon_2\right)}\int\limits_0^1 \nu\left[x+\left(1-\varepsilon\right)\left(-y\right)^{1/(1-\varepsilon)}\left(2t-1\right)\right]\, t^{-\varepsilon_1}\,\left(1-t\right)^{-\varepsilon_2}\,dt,\quad |a|<\frac{m}{2},\tag{12}$$

$$u\left(x,y\right)=\tau\left[x+\left(1-\varepsilon\right)\left(-y\right)^{1/(1-\varepsilon)}\right]+$$

$$+\left(1-\varepsilon\right)\,y\int\limits_0^1 \nu\left[x+\left(1-\varepsilon\right)\left(-y\right)^{1/(1-\varepsilon)}\left(2t-1\right)\right]\,\left(1-t\right)^{-\varepsilon}\,dt,\quad a=\frac{m}{2},\tag{13}$$

$$u\left(x,y\right)=\tau\left[x-\left(1-\varepsilon\right)\left(-y\right)^{1/(1-\varepsilon)}\right]+$$

$$+\left(1-\varepsilon\right)\,y\int\limits_0^1 \nu\left[x+\left(1-\varepsilon\right)\left(-y\right)^{1/(1-\varepsilon)}\left(1-2t\right)\right]\,\left(1-t\right)^{-\varepsilon}\,dt,\quad a=-\frac{m}{2},\tag{14}$$

где $\varepsilon_1 = \frac{m-2a}{2(m+2)}$, $\varepsilon_2 = \frac{m+2a}{2(m+2)}$, $\varepsilon = \varepsilon_1+\varepsilon_2 = \frac{m}{m+2}$; $\Gamma\left(p\right) = \int\limits_0^\infty \exp\left(-t\right)\,t^{p-1}\,dt$, $B\left(p,q\right) = \int\limits_0^1 t^{p-1}\left(1-t\right)^{q-1}\,dt$ интегралы Эйлера первого и второго родов, $B\left(p,q\right)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $|a|<\frac{m}{2}$. В этом случае из (12) с учетом (9) находим

$$u\left[\Theta_r\left(x\right)\right]=u\left(\frac{r+x}{2},\,-\left(2-2\varepsilon\right)^{\varepsilon-1}\left(r-x\right)^{1-\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{1}{B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)}\int\limits_0^1 \tau\left[x+\left(r-x\right)t\right]\,t^{\varepsilon_2-1}\,\left(1-t\right)^{\varepsilon_1-1}\,dt-$$

$$-\frac{1}{B\left(1-\varepsilon_1,1-\varepsilon_2\right)}\left(2-2\varepsilon\right)^{\varepsilon-1}\left(r-x\right)^{1-\varepsilon}\int\limits_0^1 \nu\left[x+\left(r-x\right)t\right]\,t^{-\varepsilon_1}\,\left(1-t\right)^{-\varepsilon_2}\,dt=\psi\left(x\right).$$

Вводя новую переменную $z=x+\left(r-x\right)\,t$, последнее равенство перепишется в виде

$$\psi\left(x\right)=\frac{\left(r-x\right)^{1-\varepsilon}}{B\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)}\int\limits_x^r \frac{\tau\left(z\right)\,\left(r-z\right)^{\varepsilon_1-1}}{\left(z-x\right)^{1-\varepsilon_2}}\,dz-\frac{\left(2-2\varepsilon\right)^{\varepsilon-1}}{B\left(1-\varepsilon_1,1-\varepsilon_2\right)}\int\limits_x^r \frac{\nu\left(z\right)\,\left(r-z\right)^{-\varepsilon_2}}{\left(z-x\right)^{\varepsilon_1}}\,dz.$$

В терминах оператора дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования последнее равенство перепишется в следующем виде

$$\psi\left(x\right)=\frac{\Gamma\left(\varepsilon\right)}{\Gamma\left(\varepsilon_1\right)}\left(r-x\right)^{1-\varepsilon}\,D_{rx}^{-\varepsilon_2}\left[\tau\left(t\right)\,\left(r-t\right)^{\varepsilon_1-1}\right]-$$
$$-\frac{\Gamma\left(2-\varepsilon\right)}{\Gamma\left(1-\varepsilon_2\right)}\left(2-2\varepsilon\right)^{\varepsilon-1}\,D_{rx}^{\varepsilon_1-1}\left[\nu\left(t\right)\,\left(r-t\right)^{-\varepsilon_2}\right].\tag{15}$$

Воспользуемся далее следующими законами взвешенной композиции операторов дробного дифференцирования и интегрирования с одинаковыми началами [22], [35], [37]

$$D_{cx}^{-\beta}\,D_{ct}^{\beta}\varphi\left(s\right)=\varphi\left(x\right),\tag{16}$$

$$D_{cx}^{\alpha}\left|t-c\right|^{\alpha+\beta}\,D_{ct}^{\beta}\varphi\left(s\right)=\left|x-c\right|^{\beta}\,D_{cx}^{\alpha+\beta}\left|t-c\right|^{\alpha}\varphi\left(t\right),\tag{17}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, $\beta < 0$, $\alpha + \beta > -1$; $\varphi(x) \in L[a,b]$, причем при $\alpha + \beta > 0$ функция $\varphi(x)$ обладает производной дробного порядка $D_{cx}^{\alpha+\beta}\varphi(t)$.

Применяя к обеим частям равенства (15) оператор $D_{rx}^{1-\varepsilon_1}$ и, пользуясь приведенными выше законами композиции (16) и (17) найдем

$$\nu(x) = \gamma_1 \, D_{rx}^{1-\varepsilon}\tau(t) - \gamma_2 \,(r-x)^{\varepsilon_2}\, D_{rx}^{1-\varepsilon_1}\psi(t). \tag{18}$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma(\varepsilon)\,\Gamma(1-\varepsilon_2)(2-2\varepsilon)^{1-\varepsilon}}{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon_1)}$, $\gamma_2 = \frac{\Gamma(1-\varepsilon_2)\,(2-2\varepsilon)^{1-\varepsilon}}{\Gamma(2-\varepsilon)}$.

Соотношение (18) есть фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 на линию $y = 0$ в случае, когда $|a| < \frac{m}{2}$.

При $a = \pm\frac{m}{2}$ из представлений (13) и (14) при условии (9) получаем соответствующие фундаментальные соотношения:

$$\nu(x) = \frac{(2-2\varepsilon)^{1-\varepsilon}}{\Gamma(2-\varepsilon)} \left[D_{rx}^{1-\varepsilon}\tau(t) - D_{rx}^{1-\varepsilon}\psi(t)\right], \quad a = -\frac{m}{2},$$

$$\nu(x) = 2\,(2-2\varepsilon)^{-\varepsilon}\,(r-x)^{\varepsilon}\,\psi'(x), \quad a = \frac{m}{2}.$$

ТЕОРЕМА ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ

При дальнейших рассуждениях под нормой $\|\upsilon(x,y)\|_0$ и $\|g(x)\|_0$ будут пониматься соответственно

$$\|g(x)\|_0^2 = \int_0^r g^2(x)\, dx, \quad \|g(x)\|_1^2 = \int_0^r \left\{g^2(x) + \left[g'(x)\right]^2\right\} dx,$$

$$\|\upsilon(x,y)\|_0^2 = \int_{\Omega_2} \upsilon^2(x,y)\, dx\, dy, \quad \|\upsilon(x,y)\|_1^2 = \int_{\Omega_2} \left[\upsilon^2 + \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right] dx\, dy,$$

$$\|grad\,\upsilon\|_0^2 = \int_{\Omega_2} \left[\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right] dx\, dy = \|\upsilon(x,y)\|_1^2 - \|\upsilon(x,y)\|_0^2.$$

Теорема 1. *Пусть заданные функции $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(x), \psi(x), f(x,y)$ и заданный коэффициент b уравнения (1) таковы, что*

$$b \neq 0, \quad \varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C[0,h], \quad \varphi_3(x) \in C[0,r], \quad \psi(x) \in C^{1-\varepsilon_1}[0,r], \quad f(x,y) \in L_2(\Omega_2).$$

Тогда для любого решения $u(x,y) \in C^1\left(\bar{\Omega}_2\right)$ имеет место априорная оценка

$$\|\tau(x)\|_0^2 + \|u(x,y)\|_1^2 \leqslant M_1\,\|\Psi(x)\|_0^2 + M_2\,\|f(x,y)\|_0^2, \tag{19}$$

где M_1 и M_2 числа, которые не зависят от искомых функций $\tau(x)$и $u(x,y), \Psi(x) = (r-x)^{\varepsilon_2}\, D_{rx}^{1-\varepsilon_1}\psi(t)$.

При $b = 0$ для решения задачи (6), (7), (8), (18) справедлива оценка

$$\|\tau(x)\|_0^2 + \|grad\,u\|_0^2 \leqslant N_1\,\|\Psi(x)\|_0^2 + N_2\,\|f(x,y)\|_0^2, \tag{20}$$

где N_1 и N_2 числа, зависящие только от заданных чисел и функций.

Действительно, с учетом полученного выше фундаментального соотношения (18) между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, в области Ω_2 приходим к задаче нахождения решения уравнения Гельмгольца (6), удовлетворяющего условиям (7), (8) и условию

$$u_y(x,0) = \gamma_1\, D_{rx}^{1-\varepsilon}u(t,0) - \gamma_2\,(r-x)^{\varepsilon_2}\, D_{rx}^{1-\varepsilon_1}\psi(t). \tag{21}$$

Не нарушая общности, будем граничные условия (7), (8) считать однородными, то есть $\varphi_1(y) \equiv 0$, $\varphi_2(y) \equiv 0$, $\varphi_3(x) \equiv 0$. Введем вспомогательную область $\Omega_{2\delta} = \{(x,y): \ \delta < x < r-\delta, \ \delta < y < h-\delta, \ \delta > 0\}$. Умножим уравнение (4) при $y > 0$ на функцию $u(x,y)$ и проинтегрируем полученное равенство по вспомогательной области $\Omega_{2\delta}$. Тогда для любой функции $f(x,y) \in L_2(\Omega_{2\delta})$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega_{2\delta}} u(x,y)\,[u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)-bu(x,y)]\,dx\,dy = \int\limits_{\Omega_{2\delta}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(uu_x)+\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)\right] dx\,dy -$$

$$-\int\limits_{\Omega_{2\delta}} \left[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+bu^2(x,y)\right] dx\,dy = -\int\limits_{\Omega_{2\delta}} u(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy.$$

Применим к последнему равенству формулу Грина. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_{2\delta}} (uu_x)\,dy+(uu_y)\,dx - \int\limits_{\Omega_{2\delta}} \left[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+bu^2(x,y)\right] dx\,dy = -\int\limits_{\Omega_{2\delta}} u(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy, \tag{22}$$

где $\Gamma_{2\delta}$ граница вспомогательной области $\Omega_{2\delta}$.

Перейдем в равенстве (22) к пределу при $\delta \to 0$. Легко заметить, что при этом область $\Omega_{2\delta}$ переходит в область Ω_2, а граница $\Gamma_{2\delta}$ области $\Omega_{2\delta}$ переходит в границу Γ_2 области Ω_2. Тогда из (22) получим

$$\int\limits_{\Gamma_2} (uu_x)\,dy+(uu_y)\,dx - \int\limits_{\Omega_2} \left[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+bu^2(x,y)\right] dx\,dy = -\int\limits_{\Omega_2} u(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy. \tag{23}$$

Вычислим интеграл по границе Γ_2. С учетом однородных граничных условий (7), (8) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_2} (uu_x)\,dy+(uu_y)\,dx = \int\limits_0^r [u(x,h)\,u_y(x,h)-u(x,0)\,u_y(x,0)]\,dx +$$

$$+\int\limits_0^h [u(r,y)\,u_x(r,y)-u(0,y)\,u_x(0,y)]\,dy = -\int\limits_0^r u(x,0)\,u_y(x,0)\,dx. \tag{24}$$

С учетом (24) равенство (23) перепишется в следующем виде

$$\int\limits_0^r u(x,0)\,u_y(x,0)\,dx + \int\limits_{\Omega_2} \left[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+bu^2(x,y)\right] dx\,dy = \int\limits_{\Omega_2} u(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy. \tag{25}$$

Подставляя значение $u_y(x,0)$ из (21) в (25), приходим к равенству

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+bu^2(x,y)\right] dx\,dy + \gamma_1 \int\limits_0^r u(x,0)\,D_{rx}^{1-\varepsilon} u(t,0)\,dx -$$

$$-\gamma_2 \int\limits_0^r u(x,0)\,(r-x)^{\varepsilon_2}\,D_{rx}^{1-\varepsilon_1}\psi(t)\,dx = \int\limits_{\Omega_2} u(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy. \tag{26}$$

Оценим слагаемые, входящие в равенство (26). Пользуясь леммой 3.1 из [38], убеждаемся в справедливости неравенства

$$\gamma_1 \int\limits_0^r u(x,0)\ D_{rx}^{1-\varepsilon} u(t,0)\ dx = \int\limits_0^r u(x,0)\ \partial_{rx}^{1-\varepsilon} u(t,0)\ dx \geqslant \frac{\gamma_1}{2} \int\limits_0^r \partial_{rx}^{1-\varepsilon} u^2(t,0)\, dx =$$

$$= -\frac{\gamma_1}{2} \int\limits_0^r \frac{d}{dx}\left[D_{rx}^{-\varepsilon} u^2(t,0)\right] dx = -\frac{\gamma_1}{2\Gamma(\varepsilon)} \int\limits_0^r \frac{d}{dx}\left[\int\limits_x^r \frac{\tau^2(t)}{(t-x)^{1-\varepsilon}}\, dt\right] dx =$$

$$= \frac{\gamma_1}{2\Gamma(\varepsilon)} \int\limits_0^r t^{\varepsilon-1}\, \tau^2(t)\ dt \geqslant \frac{\gamma_1\, r^{\varepsilon-1}}{2\Gamma(\varepsilon)} \int\limits_0^r \tau^2(t)\ dt = \frac{\gamma_1\, r^{\varepsilon-1}}{2\Gamma(\varepsilon)} \|\tau\|_0^2 .$$

Далее, использование $\varepsilon-$неравенства к третьему слагаемому слева равенства (26) дает

$$-\gamma_2 \int\limits_0^r u(x,0)\ (r-x)^{\varepsilon_2}\, D_{rx}^{1-\varepsilon_1} \psi(t)\ dx \geqslant \int\limits_0^r \left[-\gamma_2\, \delta_1 \tau^2(x) - \frac{\gamma_2}{4\delta_1} \Psi^2(x)\right] dx =$$

$$= -\gamma_2\, \delta_1\ \|\tau\|_0^2 - \frac{\gamma_2}{4\delta_1} \|\Psi(x)\|_0^2 ,$$

где $\Psi(x) = (r-x)^{\varepsilon_2}\, D_{rx}^{1-\varepsilon_1} \psi(t)$, а δ_1 достаточно малое положительное число.

Аналогично,

$$\int\limits_{\Omega_2} u(x,y)\ f(x,y)\ dx\, dy \leqslant \int\limits_{\Omega_2} \left[\delta_2 u^2(x,y) + \frac{1}{4\delta_2} f^2(x,y)\right] dx\, dy = \delta_2 \|u(x,y)\|_0^2 + \frac{1}{4\delta_2} \|f(x,y)\|_0^2 ,$$

где δ_2 произвольное, достаточно малое положительное число.

С учетом приведенных выше неравенств из (26) получим

$$\left(\frac{\gamma_1\, r^{\varepsilon-1}}{2\Gamma(\varepsilon)} - \gamma_2\, \delta_1\right) \|\tau(x)\|_0^2 + \int\limits_{\Omega_2} \left[u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y) + (b-\delta_2)\, u^2(x,y)\right] dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_2}{4\delta_1} \|\Psi(x)\|_0^2 + \frac{1}{4\delta_2} \|f(x,y)\|_0^2 . \tag{27}$$

Выбирая значения δ_1 и δ_2 так чтобы $\delta_1 < \frac{\gamma_1\, r^{\varepsilon-1}}{2\gamma_2\, \Gamma(\varepsilon)}$, $\delta_2 < b$ из (27) к следующей априорной оценке решения $u(x,y)$:

$$\|\tau(x)\|_0^2 + \|u(x,y)\|_1^2 \leqslant M_1 \|\Psi(x)\|_0^2 + M_2 \|f(x,y)\|_0^2 , \tag{28}$$

где M_1 и M_2 числа, которые не зависят от искомых функций $\tau(x)$ и $u(x,y)$.

Найдем далее априорную оценку решения $u(x,y)$ задачи (4), (7), (8), (18) в случае, когда $b = 0$. С этой целью оценим $\|u_x(x,y)\|_0^2$. Заметим, что

$$u^2(x,y) = \left(\int\limits_0^x u_s(s,y)\ ds\right)^2 \leqslant x \int\limits_0^x u_s^2(s,y)\ ds \leqslant x \int\limits_0^r u_s^2(s,y)\ ds. \tag{29}$$

Проинтегрируем обе части неравенства (29) сначала по x от 0 до r, а затем по y от 0 до h. Будем иметь

$$\int\limits_0^h \left(\int\limits_0^r u^2(x,y)\ dx\right) dy = \int\limits_{\Omega} u^2(x,y)\ dx\, dy \leqslant \frac{r^2}{2} \int\limits_0^h \left(\int\limits_0^r u_x^2(x,y)\ dx\right) dy = \frac{r^2}{2} \int\limits_{\Omega} u_x^2(x,y)\ dx\, dy,$$

откуда

$$\|u(x,y)\|_0^2 \leqslant \frac{r^2}{2}\,\|u_x(x,y)\|_0^2. \tag{30}$$

Аналогично, интегрируя неравенство

$$u^2(x,y) = \left(\int\limits_h^y u_s(x,s)\,ds\right)^2 \leqslant y\int\limits_0^h u_s^2(x,s)\,ds$$

сначала по x от 0 до r, а затем по y от 0 до h приходим к аналогичной (30) оценке

$$\|u(x,y)\|_0^2 \leqslant \frac{2}{h^2}\,\|u_y(x,y)\|_0^2. \tag{31}$$

С учетом оценок (30) или (31) из (27) получим либо

$$\left(\frac{\gamma_1\,r^{\varepsilon-1}}{2\Gamma(\varepsilon)} - \gamma_2\,\delta_1\right)\|\tau(x)\|_0^2 + \int\limits_{\Omega_2}\left[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)\right]dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_2}{4\delta_1}\|\Psi(x)\|_0^2+\frac{1}{4\delta_2}\|f(x,y)\|_0^2+\delta_2\,\|u(x,y)\|_0^2 \leqslant \frac{\gamma_2}{4\delta_1}\|\Psi(x)\|_0^2+\frac{1}{4\delta_2}\|f(x,y)\|_0^2+\frac{2\delta_2}{r^2}\,\|u_x(x,y)\|_0^2\quad, \tag{32}$$

либо же

$$\left(\frac{\gamma_1\,r^{\varepsilon-1}}{2\Gamma(\varepsilon)} - \gamma_2\,\delta_1\right)\|\tau(x)\|_0^2 + \int\limits_{\Omega_2}\left[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)\right]dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_2}{4\delta_1}\|\Psi(x)\|_0^2+\frac{1}{4\delta_2}\|f(x,y)\|_0^2+\frac{2\delta_2}{h^2}\,\|u_y(x,y)\|_0^2\quad. \tag{33}$$

При соответствующем выборе значений δ_1 и δ_2 $\left(\delta_1 < \frac{\gamma_1 r^{\varepsilon-1}}{2\gamma_2\,\Gamma(\varepsilon)}\right.$ и, либо $\delta_2 < \frac{r^2}{2}$ либо $\left.\delta_2 < \frac{h^2}{2}\right)$ из (32) и (33) приходим к априорной оценке (20).

Из априорных оценок (19) и (20) следует единственность регулярного и существование слабого решения исследуемой задачи (4), (7), (8), (9).

Аналогичные рассуждения с использованием формул (13) и (14) вновь приведут к априорным оценкам видов (19) и (20) и при $a = \pm\frac{m}{2}$, только здесь

$$\varepsilon_1 = \gamma_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{m}{m+2}, \quad \gamma_2 = (2-2\varepsilon)^{1-\varepsilon} \quad \text{при} \quad a = \frac{m}{2}$$

и

$$\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{m}{m+2}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{(2-2\varepsilon)^{1-\varepsilon}}{\Gamma(2-\varepsilon)}\text{при} \quad a = -\frac{m}{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трикоми, Ф. О линейных уравнениях второго порядка смешанного типа / Ф. Трикоми. — М.–Л. : Гостехиздат, 1947. — 192 с.

2. Gellerstedt, S. Quelques problemes mixtes pour l'equation $y^m Z_{xx} + Z_{yy} = 0$ / S. Gellerstedt // Arkiv Math. Astr. och Fysik. — 1938. — Bd. 26 A, № 3. — P. 1–32.

3. Gellerstedt, S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte / S. Gellerstedt // Uppsala. — 1935. — P. 3–91.

4. Лаврентьев, М. А. К проблеме уравнений смешанного типа / М. А. Лаврентьев, А. В. Бицадзе // Доклады АН СССР. — 1950. — Т. 70, № 3. — С. 373–376.

5. Бицадзе, А. В. К проблеме уравнений смешанного типа / А. В. Бицадзе. — М. : Издательство АН СССР, 1953. — 58 с.

6. Бицадзе, А. В. Уравнения смешанного типа / А. В. Бицадзе. — М. : Издательство АН СССР, 1959. — 164 с.

7. Пулькин, С. П. Задача Трикоми для общего уравнения Лаврентьева-Бицадзе / С. П. Пулькин // Доклады АН СССР. — 1958. — Т. 118, № 1. — С. 38–41.

8. Бабенко, К. И. К теории уравнений смешанного типа / К. И. Бабенко // Успехи математических наук. — 1953. — Т. 80, № 3. — С. 3–160.

9. Девингталь, Ю. В. О существовании и единственности решения одной задачи Ф. И. Франкля / Ю. В. Девингталь // Известия ВУЗов. Математика. — 1958. — № 2. — С. 39–51.

10. Жегалов, В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках с разрывами на переходной линии / В. И. Жегалов // Ученые записки Казанского государственного университета им. В. И. Ленина. — 1962. — Т. 122, кн. 3. — С. 3–16.

11. Жегалов, В. И. К краевым задачам со смещениями для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / В. И. Жегалов // Известия ВУЗов. Математика. — 1986. — № 3. — С. 61–64.

12. Кароль, И. Л. К теории уравнений смешанного типа / И. Л. Кароль // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 88, № 3. — С. 397–400.

13. Кароль, И. Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа / И. Л. Кароль // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 88, № 2. — С. 197–200.

14. Нахушев, А. М. К априорным оценкам для задач Трикоми и Дарбу / А. М. Нахушев // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 1. — С. 107–117.

15. Нахушев, А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа / А. М. Нахушев // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 1. — С. 44–59.

16. Солдатов, А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / А. П. Солдатов // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 11. — С. 2001–2009.

17. Франкль, Ф. И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений / Ф. И. Франкль // Известия АН СССР. Серия математика. — 1945. — Т. 9, № 2. — С. 121–142.

18. Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А. В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.

19. Жегалов, В. И. Исследование краевых задач со смещением для уравнений смешанного типа / В. И. Жегалов. — М. : Институт математики СО АН СССР, 1988. — 297 с.

20. Крикунов, Ю. М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа / Ю. М. Крикунов. — Казань : Издательство Казанского университета, 1986. — 148 с.

21. Нахушев, А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А. М. Нахушев. — М. : Наука, 2006. — 287 с.

22. Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. — М. : Наука, 1995. — 301 с.

23. Сабитов, К. Б. К теории уравнений смешанного типа / К. Б. Сабитов. — М. : Физматлит, 2014. — 304 с.

24. Смирнов, М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1966. — 292 с.

25. Смирнов, М. М. Уравнения смешанного типа / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1970. – 296 с.

26. Солдатов, А. П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / А. П. Солдатов. — М. : Высшая школа, 1991. — 206 с.

27. Трикоми, Ф. Лекции по уравнениям в частных производных / Ф. Трикоми. — М. : Издательство иностранной литературы, 1957. — 443 с.

28. Баранцев, Р. Г. Лекции по трансзвуковой газовой динамике / Р. Г. Баранцев. — Л. : Издательство Ленинградского государственного университета, 1965. — 215 с.

29. Берс, Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики / Л. Берс. — М. : Иностранная литература, 1961. — 208 с.

30. Франкль, Ф. И. Избранные труды по газовой динамике / Ф. И. Франкль. — М. : Наука, 1973. — 711 с.

31. Балкизов, Ж. А. Об априорной оценке решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / Ж. А. Балкизов, А. А. Сокуров // Вестник КРАУНЦ. Серия физико-математические науки. — 2016. — № 4–1(16). — С. 15–20.

32. Балкизов, Ж. А. Об одном разностном методе решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / Ж. А. Балкизов, А. А. Сокуров // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. — 2017. — Т. 21, № 2. — С. 221–235.

33. Protter, M. H. The Cauchy problem for a hyperbolic second-order equation with data on the parabolic line / M. H. Protter // Canad. J. of Math. — 1954. — V. 6. — P. 542–553.

34. Лыков, А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена / А. В. Лыков // Инженерно-физический журнал. — 1955. — Т. 9, № 3. — С. 287–304.

35. Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

36. Смирнов, М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — Минск : Вышэйшая школа, 1977. — 160 с.

37. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.

38. Балкизов, Ж. А. Первая краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области гиперболичности / Ж. А. Балкизов // Уфимский Математический журнал. — 2017. — Т. 9, № 2. — С. 29–35.

REFERENCES

1. Tricomi F. On linear equations of the second order of mixed type. [Trikomi F. O lineynykh uravneniyakh vtorogo poryadka smeshannogo tipa]. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1947, 192 p.

2. Gellerstedt S. Quelques problemes mixtes pour l'equation. Arkiv Math. Astr. oh Fysik. 1938, Bd. 26 A, no. 3, pp. 1–32.

3. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte. Uppsala, 1935, pp. 3–91.

4. Lavrentiev M.A., Bitsadze A.V. On the problem of equations of mixed type. [Lavrent'yev M.A., Bitsadze A.V. K probleme uravneniy smeshannogo tipa]. *Doklady AN SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1950, vol. 70, no. 3, pp. 373–376.

5. Bitsadze A.V. On the problem of equations of mixed type. [Bitsadze A.V. K probleme uravneniy smeshannogo tipa]. Moscow: Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, 1953, 58 p.

6. Bitsadze A.V. Mixed type equations. [Bitsadze A.V. Uravneniya smeshannogo tipa]. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1959, 164 p.

7. Pulkin S.P. The Tricomi problem for the general Lavrentiev-Bitsadze equation. [Pulkin S.P. Zadacha Trikomi dlya obshchego uravneniya Lavrent'yeva-Bitsadze]. *Doklady AN SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1958, vol. 118, no. 1, pp. 38–41.

8. Babenko K.I. On the theory of equations of mixed type. [Babenko K.I. K teorii uravneniy smeshannogo tipa]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1953, vol. 80, no. 3, pp. 3–160.

9. Devingtal Yu.V. On the existence and uniqueness of a solution to a problem F.I. Frankl. [Devingtal Yu.V. O sushchestvovanii i yedinstvennosti resheniya odnoy zadachi F.I. Franklya]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1958, no. 2, pp. 39–51.

10. Zhegalov V.I. Boundary value problem for a mixed type equation with a boundary condition on both characteristics with discontinuities on the transition line. [Zhegalov V.I. Krayevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s granichnym usloviyem na obeikh kharakteristikakh s razryvami na perekhodnoy linii]. *Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta im. V.I. Lenina — Scientific notes of Kazan State University named after V.I. Lenin*, 1962, vol. 122, no. 3, pp. 3–16.

11. Zhegalov V.I. On boundary value problems with displacements for the Lavrentiev-Bitsadze equation. [Zhegalov V.I. K krayevym zadacham so smeshcheniyami dlya uravneniya Lavrent'yeva-Bitsadze]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1986, no. 3, pp. 61–64.

12. Karol I.L. On the theory of equations of mixed type. [Karol I.L. K teorii uravneniy smeshannogo tipa]. *Doklady AN SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1953, vol. 88, no. 3, pp. 397–400.

13. Karol I.L. On a boundary value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type. [Karol I.L. Ob odnoy krayevoy zadache dlya uravneniya smeshannogo elliptiko-giperbolicheskogo tipa]. *Doklady AN SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1953, vol. 88, no. 2, pp. 197–200.

14. Nakhushev A.M. On a priori estimates for the Tricomi and Darboux problems. [Nakhushev A.M. K apriornym otsenkam dlya zadach Trikomi i Darbu]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1972, vol. 8, no. 1, pp. 107–117.

15. Nakhushev A.M. On some boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type. [Nakhushev A.M. O nekotorykh krayevykh zadachakh dlya giperbolicheskikh uravneniy i uravneniy smeshannogo tipa]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 44–59.

16. Soldatov A.P. Problems of Dirichlet type for the Lavrentiev-Bitsadze equation. [Soldatov A.P. Zadachi tipa Dirikhle dlya uravneniya Lavrent'yeva-Bitsadze]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 11, pp. 2001–2009.

17. Frankl F.I. On Chaplygin's problems for mixed subsonic and supersonic flows. [Frankl F.I. O zadachakh Chaplygina dlya smeshannykh do- i sverkhzvukovykh techeniy]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematika — 1945, vol. 9, no. 2, pp. 121–142*,

. 18. Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations. [Bitsadze A.V. Nekotoryye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh]. Moscow: Nauka, 1981, 448 p.

19. Zhegalov V.I. Investigation of boundary value problems with displacement for equations of mixed type. [Zhegalov V.I. Issledovaniye krayevykh zadach so smeshcheniyem dlya uravneniy smeshannogo tipa]. Moscow: Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1988, 297 p.

20. Krikunov Yu.M. Boundary Value Problems for Model Equations of Mixed Type. [Krikunov Yu.M. Krayevyye zadachi dlya model'nykh uravneniy smeshannogo tipa]. Kazan: Kazan University Press, 1986, 148 p.

21. Nakhushev A.M. Problems with displacement for partial differential equations. [Nakhushev A.M. Zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh]. Moscow: Nauka, 2006, 287 p.

22. Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. [Nakhushev A.M. Uravneniya matematicheskoy biologii]. Moscow: Nauka, 1995, 301 p.

23. Sabitov K.B. On the theory of equations of mixed type. [Sabitov K.B. K teorii uravneniy smeshannogo tipa]. Moscow: Fizmatlit, 2014, 304 p.

24. Smirnov M.M. Degenerate elliptic and hyperbolic equations. [Smirnov M.M. Vyrozhdayushchiyesya ellipticheskiye i giperbolicheskiye uravneniya]. Moscow: Nauka, 1966, 292 p.

25. Smirnov M.M. Mixed type equations. [Smirnov M.M. Uravneniya smeshannogo tipa]. Moscow: Nauka, 1970, 296 p.

26. Soldatov A.P. One-dimensional singular operators and boundary value problems of function theory. [Soldatov A.P. Odnomernyye singulyarnyye operatory i krayevyye zadachi teorii funktsiy]. Moscow: Higher School, 1991, 206 p.

27. Tricomi F. Lectures on partial differential equations. [Tricomi F. Lektsii po uravneniyam v chastnykh proizvodnykh]. Moscow: Publishing House of Foreign Literature, 1957, 443 p.

28. Barantsev R.G. Lectures on transonic gas dynamics. [Barantsev R.G. Lektsii po transzvukovoy gazovoy dinamike]. Leningrad: Leningrad State University Publishing House, 1965, 215 p.

29. Bers L. Mathematical issues of subsonic and transonic gas dynamics. [Bers L. Matematicheskiye voprosy dozvukovoy i okolozvukovoy gazovoy dinamiki]. Moscow: Foreign Literature, 1961, 208 p.

30. Frankl F.I. Selected works on gas dynamics. [Frankl F.I. Moscow: Nauka, 1973, 711 p]. .

31. Balkizov Zh.A., Sokurov A.A. On a priori estimation of the solution of the Tricomi problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation. [Balkizov Zh.A., Sokurov A.A. Ob apriornoy otsenke resheniya zadachi Trikomi dlya uravneniya Lavrent'yeva-Bitsadze]. *Vestnik KRAUNC. Seriya fiziko-matematicheskie nauki — Vestnik KRAUNTS. Series of physical and mathematical sciences*, 2016, no. 4–1 (16), pp. 15–20.

32. Balkizov Zh.A., Sokurov A.A. On one difference method for solving the Tricomi problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation. [Balkizov Zh.A., Sokurov A.A. Ob odnom raznostnom metode resheniya zadachi Trikomi dlya uravneniya Lavrent'yeva-Bitsadze]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki — Bulletin of the Samara State Technical University. Series of physical and mathematical sciences*, 2017, vol. 21, no. 2, pp. 221–235.

33. Protter M.H. The Cauchy problem for a hyperbolic second-order equation with data on the parabolic line. Canada. J. of Math., 1954, vol. 6, pp. 542–553.

34. Lykov A.V. Application of methods of thermodynamics of irreversible processes to the study of heat and mass transfer. [Lykov A.V. Primeneniye metodov termodinamiki neobratimykh protsessov k issledovaniyu teplo i massoobmena]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal — Engineering Physics Journal*, 1955, vol. 9, no. 3, pp. 287–304.

35. Nakhushev A.M. Fractional calculus and its application. [Nakhushev A.M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye]. Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p.

36. Smirnov M.M. Degenerate hyperbolic equations. [Smirnov M.M. Vyrozhdayushchiyesya giperbolicheskiye uravneniya]. Minsk: Higher School, 1977, 160 p.

37. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives and some of their applications. [Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya]. Minsk: Science and technology, 1987, 688 p.

38. Balkizov Zh.A. The first boundary value problem for an equation of parabolic-hyperbolic type of the third order with degeneration of type and order in the domain of hyperbolicity. [Balkizov Zh.A. Pervaya krayevaya zadacha dlya uravneniya parabolo-giperbolicheskogo tipa tret'yego poryadka s vyrozhdeniyem tipa i poryadka v oblasti giperbolichnosti]. *Ufimskij*

Matematicheskij zhurnal — Ufimsky Mathematical Journal, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 29–35.

Балкизов Жираслан Анатольевич, кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник отдела Уравнений смешанного типа института прикладной математики и автоматизации — филиала Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный научный центр "Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук", Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, Россия
E-mail: Giraslan@yandex.ru

Balkizov Zhiraslan Anatolievich, Candidate of Phys.-Math. Sci., Leading Researcher, Department of Mixed Type Equations, Institute of Applied Mathematics and Automation — Branch of the Federal State Budgetary Scientific Institution "Federal Scientific Center "Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences", Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russia
E-mail: Giraslan@yandex.ru