УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов, Т. Ю. Гаджиева, П. Э. Абдурагимова

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 14.12.2022 г.

Аннотация. В работе рассматривается двухточечная краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с достаточно общими линейными граничными условиями на отрезке [0,1]. С помощью специальных топологических средств, основанными на использовании теории полуупорядоченных пространств, получены достаточные условия существования единственного положительного решения рассматриваемой задачи. Приведен соответствующий пример.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, конус.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY PROBLEM FOR A SECOND-ORDER NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

G. E. Abduragimov, T. Yu. Hajiyeva, P. E. Abduragimova

Abstract. The paper considers a two-point boundary value problem for a non-linear second-order ordinary differential equation with sufficiently general linear boundary conditions on the interval [0,1]. Using special topological tools based on the theory of semi-ordered spaces, sufficient conditions for the existence of a unique positive solution of the problem under consideration are obtained. An example is given.

Keywords: boundary value problem, positive solution, Green's function, cone.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам разрешимости краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, например, [1–7]. в которых, в основном, рассмотрены вопросы существования положительных решений, их поведения, асимптотики, устойчивости и т. д., причем естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании техники нелинейного анализа, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем эти были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

В работе рассматривается двухточечная краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с достаточно общего вида линейными граничными условиями на отрезке $[0,1]$. В частной постановке подобная задача для нелинейного фунционально–дифференциального уравнения с аналогичными краевыми условиями, но с достаточно обременительными ограничениями рассматривалась в [8]. Вопросы существования и единственности положительного решения близкой к рассматриваемой в статье задачи изучались, например, в [9–10]. В данной статье с помощью теоремы о неподвижной точке [11] предпринята определенная попытка обобщить эти результаты в какой-то мере ослабив соответствующие условия.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть E — банаховое пространство с частично упорядоченным конусом $P \subseteq E$.

Определение 1. [12] *Пусть $D \subseteq E$. Оператор $A : D \times D \to D$ называется смешанно - монотонным, если $A(u,v)$ не убывает по u и не возрастает по v.*

Элемент $u^* \in D$ называется неподвижной точкой A, если $A(u^*, u^*) = u^*$.

Определим для каждого $h > 0$ множество $P_h = (x \in E,\ \exists\ \lambda, \mu > 0 \mid \lambda h \leqslant x \leqslant \mu h)$.

Определение 2. [12] *Пусть $e > 0$. Говорят что оператор $A : P \to P$ e –вогнутый, если он удовлетворяет следующим двум условиям:*

(*i*) *A — e –положительный, т.е. $A(P - \{0\}) \subset P_e$;*

(*ii*) $\forall\ x \in P_e, \quad \forall\ 0 < t < 1, \quad \exists\ \eta = \eta(t,x) > 0$ *такая что*

$$A(tx) \geqslant (1 + \eta)tAx,$$

где $\eta = \eta(t,x) > 0$ называется характеристической функцией A.

Пусть $u_0, v_0 \in E$, $u_0 \leqslant v_0$. Определим порядковый интервал следующим образом $[u_0, v_0] = \{x \in E \mid u_0 \leqslant x \leqslant v_0\}$.

Теорема 1. [11] *Пусть P — нормальный конус [13, с. 17] вещественного банахова пространства E, $e > 0$ и $u_0, v_0 \in P$, $u_0 \leqslant v_0$. Пусть $A : P \times P \to P$ — смешанно - монотонный оператор. Предположим, что:*

(*i*) *существует действительное положительное число r_0 такое что $u_0 \geqslant r_0 v_0$;*

(*ii*) *$u_0 \leqslant A(u_0,v_0)$ и $A(u_0,v_0) \leqslant v_0$;*

(*iii*) *для фиксированного v $A(\cdot,v) : P \to P$ является e –вогнутым с монотонной по u и непрерывной слева по t характеристической функцией $\eta(t,u)$;*

(*iv*) *для фиксированного $u \in P$ существует $N > 0$ такое, что для $A(u,\cdot) : P \to P$:*

$$A(u,v_1) - A(u,v_2) \geqslant -N(v_1 - v_2), \quad \forall v_1 \geqslant v_2, \quad v_1, v_2 \in P.$$

Тогда оператор A имеет одну неподвижную точку в $[u_0, v_0]$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \gamma + x(t) + \varphi(t,x(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$\alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0, \tag{2}$$

$$\alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0, \tag{3}$$

где $\gamma > 0$, α_{ij}, β_{ij}, $(i,j = 1,2)$ — действительные числа, функция $\varphi(t,x)$ неотрицательна на $[0,1] \times [0,\infty)$, непрерывно дифференцируема и не возрастает по второму аргументу.

Определение 3. *Под положительным решением задачи* (1)–(3) *будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую на* $[0,1]$ *функцию* x, *положительную в интервале* $(0,1)$, *удовлетворяющую на указанном интервале уравнению* (1) *и граничным условиям* (2)–(3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)(\gamma + x(s) + \varphi(s,x(s))\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ с краевыми условиями (2)–(3).

Введем следующие обозначения: $\alpha \equiv \dfrac{\alpha_{12} + \beta_{11} + \beta_{12}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}$, $\beta \equiv \dfrac{\alpha_{22} + \beta_{21} + \beta_{22}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}}$.

Несложно показать, что при выполнении условий

A) $\alpha \neq \beta, \alpha_{11} + \alpha_{12} \neq 0, \alpha_{21} + \alpha_{22} \neq 0$;

B) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha) - \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right] \leqslant 0$;

C) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha) - \frac{\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right] > 0$;

D) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha - \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta\right] > 0$;

E) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta + 1\right] < 0$

функция Грина существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s) = \begin{cases} a_1(s)(t-\alpha) + a_2(s)(t-\beta), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant s; \\ b_1(s)(t-\alpha) + b_2(s)(t-\beta), & \text{если } s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где

$$a_1(s) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\beta - \frac{\alpha_{22}s + \beta_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{22}}\right], \qquad a_2(s) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{12}s + \beta_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{12}} - \alpha\right], \quad s \in [0,1],$$

$$b_1(s) = \frac{\alpha_{21}s - \beta_{21}}{(\beta-\alpha)(\alpha_{21} + \alpha_{22})}, qquad b_2(s) = \frac{\alpha_{11}s - \beta_{11}}{(\alpha-\beta)(\alpha_{11} + \alpha_{12})}, \quad s \in [0,1].$$

Обозначим через $\widetilde{K}$ — нормальный конус неотрицательных и непрерывных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условиям (2)–(3).

Введем в рассмотрение функцию $f(t,x,y) = \gamma + x + \varphi(t,y)$ непрерывную в области $[0,1] \times [0,\infty) \times [0,\infty)$. Определим оператор $A : \widetilde{K} \times \widetilde{K} \to \widetilde{K}$ равенством

$$A(x(t),y(t)) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s),y(s))\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где x является решением задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда $x = A(x,x)$.

Теорема 2. *Предположим, что существуют* $x_0, y_0 \in \widetilde{K}$, $x_0 \leqslant y_0$ *такие, что*

$$\frac{x_0}{m} \leqslant \int_0^1 (\gamma + x_0 + \varphi(s,y_0))\, ds \leqslant \frac{y_0}{M}, \tag{5}$$

где m *и* M *соответственно миноранта и мажоранта функции Грина.*

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет единственное решение* x^* *в* $[x_0, y_0]$.

Доказательство. В дальнейшем под полуупорядочиванием $u \prec v$ и $u \precneqq v$ в конусе $\widetilde{K}$ соответственно будем понимать $u(x) \leqslant v(x)$ и $u(x) > v(x)$ при всех $x \in [0,1]$. Доказательство настоящей теоремы основывается на проверке выполнения условий теоремы 1.

Во–первых, легко видеть, что в силу определения функции $f(t,x,y)$, оператор $A : \widetilde{K} \times \widetilde{K} \to \widetilde{K}$ смешанно - монотонный.

Далее, ввиду условия (5) теоремы, имеем

$$A(x_0,y_0) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x_0,y_0)\, ds = \int_0^1 G(t,s)(\gamma + x_0 + \varphi(s,y_0))\, ds \leqslant$$
$$\leqslant M \int_0^1 (\gamma + x_0 + \varphi(s,y_0))\, ds \leqslant y_0.$$

С другой стороны,

$$A(x_0,y_0) = \int_0^1 G(t,s)(\gamma + x_0 + \varphi(s,y_0))\, ds \geqslant m \int_0^1 (\gamma + x_0 + \varphi(s,y_0))\, ds \geqslant x_0.$$

Покажем теперь e - вогнутость оператора $A(\cdot,y) : \widetilde{K} \to \widetilde{K}$.

Для любого $\tau \in (0,1)$ при фиксированном $y \in \widetilde{K}$ с учетом монотонности φ имеем

$$\int_0^1 G(t,s) f(s,\tau x(s),y(s))\, ds > \int_0^1 G(t,s)(\gamma + \tau x(s) + \tau\varphi(s,y(s)))\, ds.$$

Отсюда,

$$\int_0^1 G(t,s) f(s,\tau x(s),y(s))\, ds - \tau \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s),y(s))\, ds >$$
$$> (1-\tau)\gamma \int_0^1 G(t,s)\, ds \geqslant (1-\tau)\gamma m.$$

Преобразуя последнее неравенство, получим

$$\int_0^1 G(t,s) f(s,\tau x(s),y(s))\, ds > \tau \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s),y(s))\, ds + (1-\tau)\gamma m >$$
$$> \tau\left(1 + \frac{(\tau^{-1}-1)\gamma m}{\sigma}\right) \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s),y(s))\, ds,$$

где через σ обозначена соответственно положительная величина $M\int_0^1 (\gamma + x(s) + \varphi(s,y(s)))\, ds$.

Положив, наконец, $\eta = \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)\frac{\gamma m}{\sigma} > 0$, легко убедиться в e - вогнутости оператора A.

Для фиксированного $x \in \widetilde{K}$ и произвольных $y_1 \geqslant y_2$, $y_1, y_2 \in \widetilde{K}$ имеем

$$A(x,y_1) - A(x,y_2) = \int_0^1 G(t,s)\left(f(s,x(s),y_1(s)) - f(s,x(s),y_2(s))\right)\, ds \geqslant$$
$$\geqslant m \int_0^1 \left(\varphi(s,y_1(s)) - \varphi(s,y_2(s))\right)\, ds.$$

Применив к разности функций под интегралом формулу конечных приращений, обеспечим выполнение неравенства

$$A(x,y_1) - A(x,y_2) \geqslant -N(y_1 - y_2), \tag{6}$$

где $N \geqslant -m\int_0^1 \varphi'_y(s,\widetilde{y}(s))\,ds$. Здесь $\widetilde{y}(s)$ принимает значения промежуточные между значениями $y_1(s)$ и $y_2(s)$.

Таким образом, оператор A удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Следовательно, оператор A имеет в $[x_0, y_0]$ в точности одну неподвижную точку, что равносильно существованию в указанном конусном отрезке единственного положительного решения краевой задачи (1)–(3).

Пример 1. Приведем пример, иллюстрирующий выполнений условий теоремы 2.

$$x''(t) + \gamma + x(t) + \frac{1}{x(t)} = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{7}$$

$$x(0) - 9x'(0) = 0, \tag{8}$$

$$10x(0) - 99x'(0) - x'(1) = 0, \tag{9}$$

где γ – некоторый положительный параметр, границы которого будут определены ниже.

Легко убедиться, что функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (8)–(9) существует, положительна и имеет вид

$$G(t,s) = \begin{cases} 0{,}1t + 0{,}9, & 0 \leqslant t \leqslant s; \\ -0{,}9t + s + 0{,}9, & s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

причем $0{,}9 \leqslant G(t,s) \leqslant 1$ $(t, s \in [0{,}1])$.

Пусть $x_0 = 0{,}01$ и $y_0 = 100$. Тогда, очевидно, неравенство (5) примет вид:

$$\frac{1}{900} \leqslant \gamma + 0{,}01 + \frac{1}{100} \leqslant 100,$$

откуда $0 < \gamma \leqslant 99{,}98$.

Кроме того, в частности, на промежутке $[0{,}01; 100]$, выбрав

$$N \geqslant 0{,}9 \int_0^1 \frac{ds}{\widetilde{y}^2(s)} \geqslant 0{,}9 \int_0^1 \frac{ds}{10000} \geqslant \frac{1}{9000},$$

можно гарантировать выполнение условия (6).

Таким образом, при $\gamma \in (0; 99{,}98]$ краевая задача (7)–(9) будет иметь единственное положительное решение $x^* \in [0{,}01; 100]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказано существование единственного положительного решения на некотором конусном отрезке двухточечной краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с достаточно общими линейными граничными условиями. Доказательство проведено с использованием модифицированного принципа неподвижной точки. Приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий выполнение условий теоремы единственности положительного решения рассматриваемой задачи.

Полученные результаты являются продолжением исследований авторов, посвященных данной тематике и могут представлять определенный теоретический интерес для специалистов, занимающихся вопросами существования и единственности положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Li, Z. The existence of solutions for Sturm–Liouville differential equation with random impulses and boundary value problems / Z. Li, XB. Shu, T. Miao // Bound. Value Probl. — 2022. — V. 97. — P. 1–23.

2. Talib, I. New results and applications on the existence results for nonlinear coupled systems / I. Talib, T. Abdeljawad, M. A. Abdulah // Adv. Differ. Equ. — 2021. — V. 368. — P. 1–22.

3. Cabada, A. Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions / A. Cabada, J. Iglesias // Bound. Value Probl. — 2021. — V. 66. — P. 1–19.

4. Wang, F. On positive solutions of second-order delayed differential system with indefinite weight / F. Wang, R. Ding // Bound. Value Probl. — 2021. — V. 96. — P. 1–17.

5. Yang, Z. Positive solutions of a second-order nonlinear Robin problem involving the first-order derivative / Z. Yang // Adv. Differ. Equ. — 2021. — V. 313. — P. 1–16.

6. Zhang, Y. Positive solutions for second order differential equations with singularities and separated integral boundary condition / Y. Zhang, K. Abdella K. W. Feng // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2020. — V. 75. — P. 1–12.

7. Zhong, S. Existence of positive solutions to periodic boundary value problems with sign-changing Green's function / S. Zhong, Y. An // Bound. Value Probl. — 2011. — V. 8. — P. 1–6.

8. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально - дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 54–59.

9. Абдурагимов, Э. И. Единственность положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи и численный метод его нахождения / Э. И. Абдурагимов // Изв. вузов. Матем. — 1998. — № 11. — С. 3–7.

10. Абдурагимов, Э. И. О единственности положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи / Э. И. Абдурагимов // Изв. вузов. Матем. — 2002. — № 6. — С. 3–6.

11. Sang, Y. A class of φ - concave operators and applications / Y. Sang // Fixed Point Theory Appl. — 2013. — V. 274. — P. 1–12.

12. Guo, D. Fixed points of mixed monotone operators with application / D. Guo // Appl. Anal. — 1988. — V. 34. — P. 215–224.

13. Красносельский, М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 396 с.

REFERENCES

1. Li Z., Shu XB., Miao T. The existence of solutions for Sturm–Liouville differential equation with random impulses and boundary value problems. Bound. Value Probl., 2022, vol. 97, pp. 1–23.

2. Talib I., Abdeljawad T., Abdulah M.A. New results and applications on the existence results for nonlinear coupled systems. Adv. Differ. Equ., 2021, vol. 368, pp. 1–22.

3. Cabada A., Iglesias J. Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions. Bound. Value Probl., 2021, vol. 66, pp. 1–19.

4. Wang F., Ding R. On positive solutions of second-order delayed differential system with indefinite weight. Bound. Value Probl., 2021, vol. 96, pp. 1–17.

5. Yang Z. Positive solutions of a second-order nonlinear Robin problem involving the first-order derivative. Adv. Differ. Equ., 2021, vol. 313, pp. 1–16.

6. Zhang Y., Abdella K., Feng W. Positive solutions for second - order differential equations with singularities and separated integral boundary condition. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2020, vol. 75, pp. 1–12.

7. Zhong S., An Y. Existence of positive solutions to periodic boundary value problems with sign-changing Green's function. Bound. Value Probl., 2011, vol. 8, pp. 1–6.

8. Abduragimov G.E. On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a non-linear second-order functional differential equation. [Abduragimov G.E. O sushchestvovanii i yedinstvennosti polozhitel'nogo resheniya krayevoy

zadachi dlya odnogo nelineynogo funktsional'no - differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 54–59.

9. Abduragimov E.I. Uniqueness of a positive solution to one nonlinear two-point boundary value problem and a numerical method for finding it. [Abduragimov E.I. Yedinstvennost' polozhitel'nogo resheniya odnoy nelineynoy dvukhtochechnoy krayevoy zadachi i chislennyy metod yego nakhozhdeniya]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedeniyj. Fizika — Proceedings of higher educational institutions. Mathematics*, 1998, no. 11, pp. 3–7.

10. Abduragimov E.I. On the uniqueness of a positive solution to a nonlinear two-point boundary value problem. [Abduragimov E.I. O yedinstvennosti polozhitel'nogo resheniya odnoy nelineynoy dvukhtochechnoy krayevoy zadachi]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedeniyj. Fizika — Proceedings of higher educational institutions. Mathematics*, 2002, no. 6, pp. 3–6.

11. Sang Y. A class of φ - concave operators and applications. Fixed Point Theory Appl., 2013, vol. 274, pp. 1–12.

12. Guo D. Fixed points of mixed monotone operators with application. Appl. Anal., 1988, vol. 34, pp. 215–224.

13. Krasnoselsky M.A. Positive solutions of operator equations. [Krasnoselsky M.A. Polozhitel'nyye resheniya operatornykh uravneniy]. Moskow: Fizmatgiz, 1962, 396 p.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Дагестанского государственного университета, Махачкала, Россия
E-mail: gusen_e@mail.ru

Abduragimov Gusen Elderkhanovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics Dagestan State University, Makhachkala, Russia
E-mail: gusen_e@mail.ru

Гаджиева Тамила Юсуповна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Дагестанского государственного университета, Махачкала, Россия
E-mail: tamila.usup@mail.ru

Hajiyeva Tamila Yusupovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics Dagestan State University, Makhachkala, Russia
E-mail: tamila.usup@mail.ru

Абдурагимова Патимат Эльдерхановна, учебный мастер кафедры прикладной математики Дагестанского государственного университета, Махачкала, Россия
E-mail: abpatuka@mail.ru

Abduragimova Patimat Elderkhanovna, Educational Master of the Department of Applied Mathematics, Dagestan State University, Makhachkala, Russia
E-mail: abpatuka@mail.ru