УДК 530.145.86; 517.518.85

О ПРИМЕНЕНИИ БАЗИСНЫХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ОЦИФРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ПО КОГЕРЕНТНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Н. Б. Кожевникова, И. М. Косенко, Л. А. Минин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

Аннотация. В работе рассматривается задача разложения оцифрованных сигналов по дискретным системам когерентных состояний на прямоугольной решетке. Для ее решения предлагается приближенный алгоритм с использованием базисных сплайнов. Функциями окна в данном случае являются суммы конечного числа целочисленных сдвигов базисных сплайнов. При этом получаются неотрицательные, финитные и гладкие функции, порядок гладкости которых можно регулировать степенью сплайна. Тот факт, что базисные сплайны с увеличением степени стремятся к функциям Гаусса, позволяет при больших степенях говорить о приближенном разложении по когерентным состояниям. Предлагаемый алгоритм существенно проще в сравнении с разложением по фреймам Габора с помощью построения двойственного фрейма и позволяет легче оценивать погрешности дискретизации и использования конечного числа слагаемых.

Ключевые слова: когерентные состояния, оконное преобразование Фурье, базисные сплайны, фреймы Габора.

ON THE APPLICATION OF BASIC SPLINES FOR THE DECOMPOSITION OF DIGITAL SIGNALS INTO COHERENT STATES

N. B. Kozhevnikova, I. M. Kosenko, L. A. Minin

Abstract. The paper considers the problem of decomposing digitized signals into discrete systems of coherent states on a rectangular lattice. To solve it, an approximate algorithm is proposed using basic splines. The window functions in this case are the sums of a finite number of integer shifts of the basic splines. In this case, non-negative, finite and smooth functions are obtained, the order of smoothness of which can be controlled by the degree of the spline. The fact that the basis splines tend to Gaussian functions with increasing degree allows us to speak of an approximate decomposition into coherent states at large degrees. The proposed algorithm is much simpler than the decomposition in Gabor frames with construction of a dual frame and makes it easier to estimate discretization errors and the use of a finite number of terms.

Keywords: coherent states, windowed Fourier transform, basic splines, Gabor frames.

ВВЕДЕНИЕ

Теория когерентных состояний (КС) насчитывает уже почти столетнюю историю. Волновые пакеты из КС были введены в 1926 году Э. Шредингером и использовались в эргодической теории, описании квазиклассических частиц, квантовой оптике, цифровой обработке сигналов и т. д. Данной теме посвящено несколько классических монографий [1]–[3]. Настоящая работа является продолжением работы [4], где дается краткое описание ключевых этапов развития теории КС.

С математической точки зрения, разложение по когерентным состояниям является одним из вариантов применения оконного преобразования Фурье. Именно это обстоятельство использовал в своей работе 1946 г. Д. Габор [5], предлагая использовать КС для цифровой обработки сигналов. В настоящее время под системами Габора понимают множества функций, представляющих собой целочисленные сдвиги функции окна, умноженные на мнимые экспоненты с кратными частотами. Классические когерентные состояния называются системами Габора, порожденными функцией Гаусса.

В настоящей работе предлагается новый алгоритм оконного преобразования Фурье, позволяющий получить представление оцифрованных сигналов в виде набора рядов Фурье по отрезкам вдвое меньшей длины относительно основного периода. Численная реализация алгоритма не требует ничего, кроме стандартных процедур дискретного преобразования Фурье. Функция окна строится с помощью базисных сплайнов, стремящихся с ростом степени к функции Гаусса. Таким образом, получаем последовательность разложений по системам Габора, переходящих в пределе к когерентным состояниям.

1. АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФРЕЙМАМ ГАБОРА

Когерентными состояниями принято называть волновые пакеты, составленные из функций вида

$$g(x, u_1, u_2) = \exp\left(-\frac{(x-u_1)^2}{2}\right) e^{iu_2 x}, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Мы рассматриваем случай прямоугольной решетки, когда параметры u_1 и u_2 задаются дискретно

$$u_1 = \alpha_1 k, \quad u_2 = \alpha_2 m, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}.$$

Получается набор функций с двумя целыми индексами k, m и двумя положительными параметрами α_1, α_2

$$g_{km}(x, \alpha_1, \alpha_2) = \exp\left(-\frac{(x-k\alpha_1)^2}{2}\right) e^{im\alpha_2 x}, \quad k, m, \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Обозначим через $L_2(\mathbb{R})$ гильбертово пространство функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x)\, dx,$$

где $g^*(x)$ — комплексное сопряжение к $g(x)$.

Хорошо известно (см., например, [4], [6]), что система функций (1) полна в $L_2(\mathbb{R})$ при условии $\alpha_1\alpha_2 \leqslant 2\pi$. Данная система не является ортогональной, более того, ни одно из попарных скалярных произведений этих функций не равно нулю. Устойчивое разложение по полной системе (в случае $\alpha_1\alpha_2 = 2\pi$) невозможно, поэтому приходится использовать переполненные системы — фреймы.

Для разложения в случае $\alpha_1\alpha_2 < 2\pi$ используется так называемый двойственный фрейм $\widetilde{g}_{km}(x, \alpha_1, \alpha_2)$. Формулы разложения произвольной функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ по системе функций (1) и по двойственному фрейму выглядят так:

$$f(x) = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} (f, \widetilde{g}_{km}) g_{km} = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} (f, g_{km}) \widetilde{g}_{km}.$$

Наиболее проработанной с алгоритмической точки зрения является технология разложения по переполненной системе функций в случае $\alpha_1\alpha_2 = \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, предложенной в серии работ А. Янссена [7], [8]. Но даже здесь получается представление функции окна двойственного фрейма в виде ряда, коэффициенты которого тоже вычисляются с помощью рядов. Следовательно, этот алгоритм с точки зрения практической реализации является приближенным. В общем случае используются итерационные методы нахождения $\widetilde{g}_{km}(x, \alpha_1, \alpha_2)$ или метод конечномерной редукции.

Наиболее интересным и содержательным примером приближенного разложения с помощью оконного преобразования Фурье с функцией Гаусса в качестве окна (т. е. фактически по когерентным состояниям) является библиотека Gaborator, разработанная А. Густафссоном в 2017 году на основе теоретических работ Д. Веласко, Н. Холайхаус, М. Дерфлер, Т. Грилла и др. [9]–[11]. Библиотека предназначена для обратимого преобразования сигнала в спектрограмму. Разложение здесь основано на использовании нестационарных фреймов Габора [9]. Эта модификация предназначена для тех задач, в которых имеет смысл использовать не фиксированный, а значительно меняющийся по времени или частоте размер окна. Например, если речь идет об аудиосигнале.

Поскольку мы работаем с переполненной системой функций, то сразу возникает вопрос: какой физический смысл можно придать коэффициентам разложения, если это разложение неединственно? В случае работы с фреймами также можно выделить следующие особенности:

1. Отсутствие аналитики (в отличие от рядов Фурье и преобразований Фурье нет примеров аналитических разложений для широкого класса функций).

2. Гораздо менее развита оценка погрешностей, когда для вычисления бесконечных рядов используются конечные суммы.

3. Технология двойственных фреймов достаточно сложна для исследователей, желающих использовать данные системы функций в обработке реальных сигналов.

Таким образом, процедуру подобных разложений желательно упростить, а их физическую интерпретацию облегчить. Именно этому и посвящен следующий параграф.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ БАЗИСНЫХ СПЛАЙНОВ

Пусть $\chi_{[a,b]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[a, b]$, т. е.

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b]; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Центрированными базисными сплайнами порядка n называются функции $B_n(x)$, получаемые с помощью следующих рекуррентных соотношений

$$B_1(x) = \chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(x),$$

$$B_n(x) = (B_{n-1} * B_1)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{n-1}(x - t) B_1(t)\, dt.$$

Приведем некоторые свойства базисных сплайнов [12, глава 4]:
1. $B_n(x) > 0$ для всех $x \in \left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, $B_n(x) = 0$ при $|x| \geqslant \frac{n}{2}$.
2. Сплайн $B_n(x)$ является четной функцией.
3. Сплайн $B_n(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $(n-2)$ включительно.
4. Преобразование Фурье $B_n(x)$ задается формулой

$$\widehat{B}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \xi/2}{\xi/2}\right)^n.$$

5. Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_n(x-k) = 1.$$

Последнее свойство является ключевым в нашей конструкции. Рассмотрим базисный сплайн $B_{2n}(x)$ четного порядка и зададим функцию окна $\varphi(x)$ в виде линейной комбинации

$$\varphi(x) = \sum_{j=-m}^{m} B_{2n}(x-j). \tag{2}$$

Найдем носитель функции окна (2)

$$\operatorname{supp} B_{2n}(x) = [-n, n], \quad \operatorname{supp} B_{2n}(x-j) = [-n+j, n+j], \quad \operatorname{supp} \varphi(x) = [-n-m, n+m].$$

Зададим систему функций

$$\varphi_k(x) = \varphi(x - k(2m+1)), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Величина сдвига аргумента $(2m+1)$ обусловлена тем, что в сумме, задающей функцию $\varphi(x)$, ровно $2m+1$ слагаемое. Поскольку сумма целочисленных сдвигов базисных сплайнов любого порядка тождественно равна 1, то для суммы всех функций из системы (3) справедливо равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Согласуем параметры n и m так, чтобы пересечение носителей функций $\varphi_{k-1}(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ состояло из одной точки:

$$\operatorname{supp} \varphi_0(x) = [-n-m, n+m],$$
$$\operatorname{supp} \varphi_1(x) = [-n+m+1, n+3m+1],$$
$$\operatorname{supp} \varphi_{-1}(x) = [-n-3m-1, n-m-1].$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$n - m - 1 = -n + m + 1.$$

Таким образом,

$$n = m + 1.$$

Для произвольной функции $f(x)$, заданной на всей оси, справедлива формула

$$f(x) = \sum_{k=\infty}^{\infty} f(x)\varphi_k(x).$$

Каждое из слагаемых ряда $f(x)\varphi_k(x)$ раскладываем в ряд Фурье на отрезке $[(k-1)(2m+1),(k+1)(2m+1)]$, задающем носитель функции $\varphi_k(x)$. Пересечением носителей функций $f(x)\varphi_k(x)$ и $f(x)\varphi_{k+1}(x)$ будет отрезок вдвое меньшей длины $[k(2m+1),(k+1)(2m+1)]$. Функция $f(x)$ на данном отрезке есть сумма двух рядов Фурье для функций $f(x)\varphi_k(x)$ и $f(x)\varphi_{k+1}(x)$. Например, в случае $n=2$, $m=1$ (кубический сплайн) получим следующие соотношения:

$$\varphi(x) = B_4(x-1) + B_4(x) + B_4(x+1), \quad \varphi_k(x) = \varphi(x-3k),$$

$$\operatorname{supp}\varphi_0(x) = [-3,3], \quad \operatorname{supp}\varphi_{-1}(x) = [-6,0], \quad \operatorname{supp}\varphi_1(x) = [0,6].$$

Таким образом, получено представление функции $f(x)$ в виде рядов Фурье на окнах, пересекающихся точно по концам отрезков. Все формулы при этом точные. Одним из наиболее распространенных вариантов использования окон с наложением является модифицированное косинусное преобразование, применяемое в некоторых версиях стандарта MPEG-4 [13]. Математически использование отрезков с перекрытием равносильно задаче разложения функций в ряд Фурье на отрезке, длина которого меньше основного периода. При этом вместо полной ортогональной системы функций получается переполненная система, разложение по которой будет уже неоднозначным. Вопрос о том, при каких значениях параметров эти системы функций будут образовывать фрейм, т. е. допускать устойчивую процедуру разложения и обратного восстановления, получил название abc – проблемы [14].

Можно использовать и базисные сплайны нечетного порядка. В этом случае вместо формул (2) и (3) получим другие соотношения:

$$\varphi(x) = \sum_{j=-m}^{m-1} B_{2m+1}\left(x - j - \frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi_k(x) = \varphi(x-2km), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Функция окна $\varphi(x)$ остается четной благодаря использованию полуцелого сдвига в аргументе.

Поскольку базисные сплайны с ростом степени стремятся к функции Гаусса:

$$B_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma = \sqrt{\frac{n}{12}},$$

то можно говорить о построении приближенного разложения по когерентным состояниям. При этом нет необходимости на практике использовать сплайны очень высоких степеней, потому что в случае разложения по КС все равно потребуется заменить бесконечные ряды конечными суммами и использовать дискретное преобразование Фурье.

Главная идея КС – это хорошая локализованность базисных функций как в пространственной, так и в частотной областях. Приближение с помощью базисных сплайнов это свойство сохраняет. И главное, используя хорошо известные теоремы о скорости сходимости рядов Фурье, мы гораздо лучше контролируем погрешность, чем при разложении по фреймам Габора. Устойчивость разложения по фреймам Габора, в каком-то смысле, равносильна требованию воспроизводимости опыта в физическом эксперименте. То есть разложение должно быть не искусством, а рабочим инструментом, доступным широкому кругу исследователей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено представление функции $f(x)$ в виде рядов Фурье на окнах, пересекающихся точно по концам отрезков. Все формулы при этом точные. Предложенная схема оконного разложения в ряд Фурье реализуема, если в случае базисных сплайнов четного порядка выбрать для оконной функции нечетное число слагаемых, а в случае базисных сплайнов нечетного порядка — четное число слагаемых. Полученные нами представления гораздо удобнее для обработки реальных сигналов, потому что коэффициенты разложения представляют собой амплитуды частот в заданной области пространства или времени, и возвращаться назад к коэффициентам разложения по фрейму нет никакого смысла.

После выбрасывания малых коэффициентов рядов Фурье при сжатии сигнала на границах окон может нарушаться непрерывность или гладкость сигнала. Чтобы избежать краевых эффектов, надо сначала проредить ряды Фурье на исходных отрезках и только затем переходить к отрезкам вдвое меньшей длины.

При численной реализации оцифрованный сигнал умножается на рассчитанные заранее значения функции окна, и применяется алгоритм быстрого преобразования Фурье. Избыточность коэффициентов при сжатии сигнала компенсируется тем, что в случае гладких функции получаются быстро сходящиеся ряды Фурье. С другой стороны, признаком особых точек является наличие на некоторых отрезках большого числа коэффициентов, превышающих заданный порог малости. Тем самым, предлагается другой подход к кратномасштабному анализу из теории всплесков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Переломов, А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения / А. М. Переломов. — М. : Наука, 1987. — 272 с.

2. Малкин, И. А. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем / И. А. Малкин, В. И. Манько. — М. : Наука, 1979. — 320 с.

3. Gazeau, J.-P. Coherent States in Quantum Physics / J.-P. Gazeau. — WILEY-VCH, 2009. — 358 p.

4. Минин, Л. А. О вычислительных особенностях разложения по когерентным состояниям / Л. А. Минин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 3. — С. 21–35.

5. Gabor, D. Theory of communication / D. Gabor // J. IEE (London). — 1946. — № 93. — P. 429–457.

6. Минин, Л. А. О разложении по фреймам Габора, порожденным функцией Гаусса / Л. А. Минин, И. Я. Новиков, С. Н. Ушаков // Математические заметки. — 2016. — Т. 100, № 6. — С. 951–953.

7. Janssen, A. J. E. M. Duality and biorthogonality for Weyl-Heisenberg frames / A. J. E. M. Janssen // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — № 1(4). — P. 403–436.

8. Janssen, A. J. E. M. Some Weyl-Heisenberg frame bound calculations / A. J. E. M. Janssen // Indag. Math. — 1996. — № 7. — P. 165–183.

9. Theory, implementation and applications of nonstationary Gabor frames / G. A. Velasco [and etc.] // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2011. — V. 236, № 6. — P. 1481–1496.

10. Constructing an invertible constant-Q transform with non-stationary Gabor frames / G. A. Velasco [and etc.] // Proc. of 14th International Conference on DAFx-11. — 2011. — 14 p.

11. A Framework for Invertible, Real-Time Constant-Q Transforms / G. A. Velasco [and etc.] // IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. — 2013. — V. 21, № 4. — P. 775–785.

12. Чуи, Ч. Введение в вейвлеты / Ч. Чуи. — М. : Мир, 2001. — 412 с.

13. Princen, John P. Analysis/synthesis filter bank design based on time domain aliasing cancellation / John P. Princen, Alan B. Bradley // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing, ASSP-34. — 1986. — V. 5. — P. 1153–1161.

14. Dai, X. The abc-Problem for Gabor Systems / X. Dai, Q. Sun // Memoirs of the AMS. — 2016. — V. 244, № 1152. — P. 1–99.

REFERENCES

1. Perelomov A.M. Generalized Coherent States and Their Applications. [Perelomov A.M. Obobshchennye kogerentnye sostoyaniya i ih primeneniya]. Moscow: Nauka, 1987, 272 p.

2. Malkin I.A., Man'ko V.I. Dynamical Symmetries and Coherent States of Quantum Systems. [Malkin I.A., Man'ko V.I. Dinamicheskie simmetrii i kogerentnye sostoyaniya kvantovyh sistem]. Moscow: Nauka, Moscow, 1979, 320 p.

3. Gazeau J.-P. Coherent States in Quantum Physics. WILEY-VCH, 2009, 358 p.

4. Minin L.A. On computational peculiarities of decomposition with coherent states. [Minin L.A. O vychislitel'nyh osobennostyah razlozheniya po kogerentnym sostoyaniyam]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 21–35.

5. Gabor D. Theory of communication. J. IEE (London), 1946, no. 93, pp. 429–457.

6. Minin L.A., Novikov I.Ya., Ushakov S.N. On expansion in Gabor frames generated by the Gaussian function. [Minin L.A., Novikov I.YA., Ushakov S.N. O razlozhenii po frejmam Gabora, porozhdennym funkciej Gaussa]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, no. 6, pp. 951–953.

7. Janssen A.J.E.M. Duality and biorthogonality for Weyl-Heisenberg frames. J. Fourier Anal. Appl., 1995, no. 1(4), pp. 403–436.

8. Janssen A.J.E.M. Some Weyl-Heisenberg frame bound calculations. Indag. Math 1996, no. 7, pp. 165–183.

9. Velasco G.A. et al. Theory, implementation and applications of nonstationary Gabor frames. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, vol 236, no. 6, pp. 1481–1496.] Velasco G.A. et al. Constructing an invertible constant-Q transform with non-stationary Gabor frames. Proc. of 14th International Conference on DAFx-11, 2011, 14 p

10. Velasco G.A. et al. A Framework for Invertible, Real-Time Constant-Q Transforms. IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2013, vol. 21, no. 4. pp. 775–785.

11. Chui C. An Introduction to Wavelets. [CHui CH. Vvedenie v vejvlety]. Moscow: Mir, 2001, 412 p.

12. Princen John P., Bradley Alan B. Analysis/synthesis filter bank design based on time domain aliasing cancellation. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing, ASSP-34, 1986, vol. 5, pp. 1153–1161.

13. Dai X., Sun Q. The abc-Problem for Gabor Systems. Memoirs of the AMS, 2016, vol. 244, no. 1152, pp. 1–99.

Кожевникова Наталья Борисовна, магистр 2-го года обучения кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: NBKozhevnikova@mail.ru

Kozhevnikova Natalya Borisovna, second-year master's student at the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: NBKozhevnikova@mail.ru

Косенко Иван Михайлович, магистр 2-го года обучения кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kv1tr4vn@gmail.com

Kosenko Ivan Mikhailovich, second-year master's student at the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kv1tr4vn@gmail.com

Минин Леонид Аркадьевич, доцент кафедры математической физики и информационных технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mininla@mail.ru

Minin Leonid Arcadievich, Associate Professor, Department of Mathematical Physics and Information Technology, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mininla@mail.ru