УДК 517.926.4

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ШТУРМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ*

С. А. Шабров, Э. Ю. Курклинская, Д. Е. Марфин, П. В. Садчиков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.03.2022 г.

Аннотация. В работе доказан аналог теоремы Штурма для дифференциальных уравнений шестого порядка с негладкими решениями, которые имеют важное значение при анализе качественных свойств решений. Отметим, что при анализе решений уравнения, мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным и показавший свою эффективность при изучении уравнений не только второго порядка, но и более высокого порядка, в частности, построена точная параллель классической теории качественной теории вплоть до осцилляционных теорем.

Ключевые слова: однородное уравнение, дифференциальное уравнение, поточечный подход, теоремы о перемежаемости нулей.

ANALOGUE OF STURM'S THEOREM FOR SIXTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MEASURE DERIVATIVES

S. A. Shabrov, E. Yu. Kurklinskaya, D. E. Marfin, P. V. Sadchikov

Abstract. The paper proves analog of Sturm's theorem for sixth-order differential equations with nonsmooth solutions, which are important in the analysis of the qualitative properties of solutions. Note that in the analysis of solutions to the equation, we use the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokorny and which has shown its effectiveness in studying equations not only of the second order, but also of a higher order, in particular, an exact parallel is constructed to the classical theory of qualitative theory up to to oscillation theorems.

Keywords: homogeneous equation, differential equation, pointwise approach, zero intermittency theorems.

Данная работа является продолжением цикла работ [1], [2], [3].

Отметим, что интенсивное изучение граничных задач с производными Радона–Никодима началось после выхода работы Ю. В. Покорного [4], а именно, была построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [5], [6], [7], [8], [9], [10], получен ряд результатов о нелинейных краевых задач с производными Радона–Никодима [11], [2], граничных задачах четвертого и более высокого порядков [12], [13], [14], [15], [16]. Эффективность использования производных по мере объясняется следующим обстоятельством: для применения качественных методов анализа (теорем типа Ролля) решений дифференциальных уравнений необходимо знать значения функции и её производных в каждой точке, что с позиций теории обобщённых функций затруднительно; более того, не до конца решена проблема умножения обобщенной функции на разрывную.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF–2020–0009), при финансовой поддержке РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20–51–15003 НЦНИ–а.

В работе рассматриваются следующие уравнения:

$$-\left(p_1 u'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma} + \left(r_1 u''_{xx}\right)''_{x\sigma} - \left(g_1 u'_x\right)'_\sigma + q_1 u = 0, \tag{1}$$

$$-\left(p_2 v'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma} + \left(r_2 v''_{xx}\right)''_{x\sigma} - \left(g_2 v'_x\right)'_\sigma + q_2 v = 0, \tag{2}$$

причем

$$p_1(x) \geqslant p_2(x) > 0,\, r_1(x) \geqslant r_2(x) \geqslant 0,\, g_1(x) \geqslant g_2(x) \geqslant 0, q_1(x) \geqslant q_2(x) \geqslant 0. \tag{3}$$

Функции $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ строго возрастают на $[0;\ell]$, причем $\mu(x)$ является σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$. Мы будем также предполагать, что x — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Каждое из уравнений определено на специальном расширении $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ отрезка $[0;\ell]$. В этом множестве каждая точка ξ разрыва функции $\sigma(x)$, порождающая меру σ, заменена на тройку собственных элементов $\{\xi_-, \xi, \xi_+\}$. Строится $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ следующим образом.

На $[0;\ell]$ вводим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. В случае, когда множество $S(\sigma)$ точек разрыва не является пустым, метрическое пространство $([0;\ell], \rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0;\ell]}_\sigma$.

Решение (1) (и (2)) мы ищем в классе E непрерывно дифференцируемых функций, первая производная $u'_x(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; вторая производная $u''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна; $u'''_{xx\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная $pu'''_{xx\mu}(x)$ — непрерывно дифференцируема; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}$ — σ—абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Уравнение (1), как впрочем и (2), в точках ξ разрыва функции $\sigma(x)$ понимается как равенство

$$-\Delta\left(p_1 u'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta\left(r_1 u''_{xx}\right)'_x(\xi) - \Delta\left(g_1 u'_x\right)(\xi) + q_1(\xi)u(\xi) = 0, \tag{4}$$

где $\Delta\psi(x) = \psi(\xi+0) - \psi(x-0)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Введем понятия нуля решения уравнения

$$Lu \equiv -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma} + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma} - \left(gu'_x\right)'_\sigma + qu = 0, \tag{5}$$

и кратности нуля.

Точку x_0 назовем нулем решения $u(x)$ однородного уравнения, кратности 1 (или простым нулём), если $u(x_0) = 0$ и $u'_x(x_0) \neq 0$; кратности 2, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0) = 0$ и $\left(u''_{xx}\right)(x_0 - 0) \times \times \left(u''_{xx}\right)(x_0 + 0) > 0$; кратности 3, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0) = 0$, $u''_{xx}(x_0 - 0) = u''_{xx}(x_0 + 0) = 0$ и $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0) \neq 0$; кратности 4, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0) = 0$, $u''_{xx}(x_0 - 0) = u''_{xx}(x_0 + 0) = 0$, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0) = 0$ и $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x_0) \neq 0$; кратности 5, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0) = 0$, $u''_{xx}(x_0 - 0) = = u''_{xx}(x_0 + 0) = 0$, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0) = 0$, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x_0) = 0$ и $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x_0 - 0) \times \left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x_0 + 0) > > 0$. В случае, когда последнее неравенство нарушается (при этом остальные должны выполняться), то мы будем говорить, что кратность нуля выше пяти.

Если x_0 не принадлежит множеству $S(\sigma)$, т. е. является точкой непрерывности самого решения и всех ее производных до пятого порядка включительно, то введенное определение совпадает с классическим. Если x_0 принадлежит разности множеств $S(\sigma)$ и $S(\mu)$ ($x_0 \in S(\sigma) \backslash S(\mu)$), то определение нуля кратности 1, 2, 3 и 4 снова совпадает с классическим.

Нетрудно видеть, что нули кратности больше, чем 5 могут быть только у тривиального

Следующая лемма устанавливают конечность нулей любого нетривиального решения.

Лемма 1. *У любого нетривиального решения однородного уравнения $Lu = 0$ конечное число нулей на $[0;\ell]$.*

Доказательство. Пусть у нетривиального решения $u(x)$ однородного уравнения $Lu = 0$ бесконечное число различных нулей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ на $[0;\ell]$. Переходя если необходимо к подпоследовательности, можно считать $\{x_n\}$ сходящейся, причем монотонно. Рассмотрим случай $x_n \to x_0 + 0$. (Случай $x_n \to x_0 - 0$ рассматривается аналогично.)

В силу непрерывности $u(x)$ имеем $u(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} u(x_n)$. Из теоремы Ролля следует существование последовательности $\left\{x_n^{(1)}\right\}$ такой, что

1) $x_n^{(1)}$ заключена между x_n и x_{n+1};

2) $u'_x(x_n^{(1)}) = 0$.

Из первого заключаем, что $x_n^{(1)} \to x_0 + 0$, из второго — $u'_x(x_0) = 0$.

Применяя несколько раз обобщенную теорему Ролля, мы получим $u''_{xx}(x_0 + 0) = u'''_{xx\mu}(x_0 + 0) = \left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x (x_0 + 0) = \left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx} (x_0 + 0) = 0$. Но это означает, что $u(x)$ тождественный нуль. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Лемма 2. *Пусть $u(x) \in E$ и отлична от константы на любом подотрезке $[\alpha;\beta]$; $u(x)$ имеет два нуля кратности* 3 *(или более). Тогда существует точка в которой $u'''_{xx\mu}(x)$ равна нулю.*

Доказательство. Если у $u(x)$ хотя бы один нуль кратности 5, то утверждение леммы следует из определения нуля кратности 5.

Пусть τ_1 и τ_2 — нули $u(x)$ кратности 5. Предположим, что утверждение леммы неверно: $u'''_{xx\mu}(x) \neq 0$ для всех $x \in [0;\ell]$. Так как $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x)$ непрерывна на $[0;\ell]$ (более того, она абсолютно непрерывна), то $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x)$ сохраняет знак на всем $[0;\ell]$. Так как $p(x) > 0$, то этим же свойством обладает и $u'''_{xx\mu}(x)$. Пусть для определенности $u'''_{xx\mu}(x) > 0$. Тогда $u''_{xx}(x)$ возрастает на $\overline{[0;\ell]}_S$, отсюда вытекают неравенства

$$u''_{xx}(\tau_1 - 0) \leqslant u''_{xx}(\tau_1 + 0) < u''_{xx}(\tau_2 - 0) \leqslant u''_{xx}(\tau_2 + 0). \tag{6}$$

По условию τ_1 и τ_2 — нули кратности 3, т. е. $u''_{xx}(\tau_1 - 0) \cdot u''_{xx}(\tau_1 + 0) \leqslant 0$ и $u''_{xx}(\tau_2 - 0) \cdot u''_{xx}(\tau_2 + 0) \leqslant 0$. Предположим, что $u''_{xx}(\tau_1 - 0) < 0$. Тогда $u''_{xx}(\tau_1 + 0) \geqslant 0$, и как следствие (6), $u''_{xx}(\tau_2 - 0) > 0$ и $u''_{xx}(\tau_2 + 0) > 0$. Отсюда вытекает, что τ_2 — нуль кратности 2, что противоречит условию.

Если же $u''_{xx}(\tau_2 + 0) \geqslant 0$, то из (6) опять находим, что $u''_{xx}(\tau_2 - 0) > 0$ и $u''_{xx}(\tau_2 + 0) > 0$, т. е. τ_2 — нуль кратности 2. Лемма доказана. □

Основным результатом работы является теорема.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее условиям $u(x_1) = u'_x(x_1) = u''_{xx}(x_1 + 0) = u(x_2) = u'_x(x_2) = u''_{xx}(x_2 - 0) = 0$, $x_1 < x_2$. Пусть также выполнены условия согласования: $\left(p_2 v'''_{xx\mu}\right)'_x (x) \cdot v''_{xx}(x) < 0$ и $\left(\left(p_2 v'''_{xx\mu}\right)''_{xx} (x) - (r_2 v''_{xx})\right) \cdot v'_x(x) > 0$ для всякой $x \in \overline{[0;\ell]}_{\sigma} \backslash S(\sigma)$. Тогда для любого решения $v(x)$ уравнения* (2) *существует точка $x_0 \in (x_1, x_2)$, такая, что $v(x_0) = 0$ или $v'_x(x_0) = 0$ или $v''_{xx}(x_0 - 0) \cdot v''_{xx}(x_0 + 0) \leqslant 0$.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда существует решение уравнения (2) $v(x)$ такое, что $v(x) \neq 0$, $v'_x(x) \neq 0$ для любого $x \in [x_1, x_2]$, и $v''_{xx}(x - 0) \cdot v''_{xx}(x + 0) > 0$ для любых $x \in (x_1, x_2)$.

Рассмотрим следующее выражение:

$$I = \frac{d}{d\sigma}\left[\left(p_1 u'''_{xx\mu}\right)''_{xx} u - \left(r_1 u''_{xx}\right)'_x u + g_1 u'_x u - \left(p_1 u'''_{xx\mu}\right)'_x u'_x + \left(r_1 u''_{xx}\right) u'_x + \right.$$
$$\left. + \left(p_2 v'''_{xx\mu}\right)'_x \frac{u'^2_x}{v'_x} + \left(r_2 v''_{xx}\right) \frac{u'^2_x}{v'_x} + p_1 u'''_{xx\mu} u''_{xx} - p_2 v'''_{xx\mu} \frac{u''^2_{xx}}{v''_{xx}}\right]. \quad (7)$$

Если $x \notin S(\sigma)$, то, после несложных преобразований, имеем

$$I = (q_1 - q_2)u^2 + (g_1 - g_2)u'^2_x x'_\sigma + (r_1 - r_2)u''^2_{xx} x'_\sigma + (p_1 - p_2)u'''^2_{xx\mu} x'_\sigma +$$
$$+ g_2 v'^2_x \left(\frac{u}{v} - \frac{u'_x}{v'_x}\right)^2 x'_\sigma + r_2 v''^2_{xx} \left(\frac{u'_x}{v'_x} - \frac{u''_{xx}}{v''_{xx}}\right)^2 + p_2 v'''^2_{xx\mu} \left(\frac{u''_{xx}}{v''_{xx}} - \frac{u'''_{xx\mu}}{v'''_{xx\mu}}\right)^2 x'_\sigma +$$
$$+ \left(\left(p_2 v'''_{xx\mu}\right)''_{xx} - \left(r_2 v''_{xx}\right)'_x\right) v'_x \left(\frac{u}{v} - \frac{u'_x}{v'_x}\right)^2 x'_\sigma - \left(p_2 v'''_{xx\mu}\right)'_x v''_{xx} \left(\frac{u'_x}{v'_x} - \frac{u''_{xx}}{v''_{xx}}\right)^2 x'_\sigma. \quad (8)$$

Пусть $\xi \in S(\sigma)$. Тогда (так как $u(x)$, $v(x)$, $u'_x(x)$ и $v'_x(x)$ непрерывны)

$$I(\xi) = \Delta(p_1 u'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi)u(\xi) - \Delta(r_1 u''_{xx})'_x(\xi)u(\xi) + \Delta(g_1 u'_x)(\xi)u(\xi) -$$
$$- \Delta(p_2 v'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi)\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)} + \Delta(r_2 v''_{xx})'_x(\xi)\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)} - \Delta(g_2 v'_x)(\xi)\frac{u^2(\xi)}{v(\xi)} +$$
$$+ (p_1 u'''_{xx\mu})(\xi)\Delta u''_{xx}(\xi) - (p_2 v'''_{xx\mu})(\xi)\left(\frac{u''^2_{xx}(\xi+0)}{v''_{xx}(\xi+0)} - \frac{u''^2_{xx}(\xi-0)}{v''_{xx}(\xi-0)}\right), \quad (9)$$

или, после несложных преобразований,

$$I(\xi) = u^2(\xi)(q_1(\xi) - q_2(\xi)) + u'''^2_{xx\mu}(\xi)(p_1(\xi) - p_2(\xi)) +$$
$$+ p_2(\xi)\frac{(u''_{xx}(\xi+0)v''_{xx}(\xi-0) - u''_{xx}(\xi-0)v''_{xx}(\xi+0))^2}{v''_{xx}(\xi-0)v''_{xx}(\xi+0)}. \quad (10)$$

Из соотношений (8) и (10) мы находим, что I неотрицательна на $(x_1; x_2)$. Тогда,

$$\int\limits_{x_1+0}^{x_2-0} I\, d\sigma = \left[\left(p_1 u'''_{xx\mu}\right)''_{xx} u - \left(r_1 u''_{xx}\right)'_x u + g_1 u'_x u - \left(p_1 u'''_{xx\mu}\right)'_x u'_x + \left(r_1 u''_{xx}\right) u'_x + \right.$$
$$\left. + \left(p_2 v'''_{xx\mu}\right)'_x \frac{u'^2_x}{v'_x} + \left(r_2 v''_{xx}\right) \frac{u'^2_x}{v'_x} + p_1 u'''_{xx\mu} u''_{xx} - p_2 v'''_{xx\mu} \frac{u''^2_{xx}}{v''_{xx}}\right]\Bigg|_{x_1+0}^{x_2-0}. \quad (11)$$

Но правая часть, по условию, равна нулю. Интеграл от неотрицательной функции равен нулю, если подынтегральная функция почти всюду (по мере σ) равна нулю. Это возможно только, если $\dfrac{u}{v} - \dfrac{u'_x}{v'_x} \equiv 0$, или $v \equiv Cu$ при некотором C. Полученное противоречие доказывает теорему. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аналоги теорем Штурма для дифференциальных уравнений второго порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Д. А. Крохина, Н. А. Белов, А. Г. Ильченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2021. — № 4. — С. 96–102.

2. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

3. Аналог теоремы Штурма для дифференциальных уравнений четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Д. А. Крохина, Н. А. Белов, А. Г. Ильченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2022. — № 2. — С. 107–114.

4. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

5. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

6. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

7. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

8. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

9. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

10. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

11. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

12. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

13. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, М. Меач // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

14. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

15. Borodina, E. A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E. A. Borodina, S. A. Shabrov, M. V. Shabrova // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

16. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives / S. A. Shabrov, O. M. Ilina, E. A. Shaina, D. A. Chechin // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012044.

17. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

18. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи с производными по

мере и спектральным параметром при второй производной / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина, М. В. Шаброва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 203–207.

19. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Головко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

20. Шабров, С. А. Об одной спектральной задаче четвертого порядка с производными Радона–Никодима и со спектральным параметром / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 163–167.

21. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

22. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

23. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

24. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

25. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

26. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

REFERENCES

1. Shabrov S.A., Krokhina D.A., Belov N.A., Ilchenko A.G. Analogues of Sturm's theorems for second-order differential equations with derivatives in measure. [Shabrov S.A., Krohina D.A., Belov N.A., Il'chenko A.G. Analogi teorem SHturma dlya differencial'nyh uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 96–102.

2. Davydova M.B., Shabrov S.A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

3. Shabrov S.A., Tkachenko D.A., Belov N.A., Ilchenko A.G. Analogue of Sturm's theorem for fourth-order differential equations with measure derivatives. [SHabrov S.A., Tkachenko D.A., Belov N.A., Il'chenko A.G. Analog teoremy SHturma dlya differencial'nyh uravnenij chetvertogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*,

2022, no. 2, pp. 107–114.

4. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

5. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

6. Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev B.L. et al. Differential equations for geometric graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Phizmatlit, 2004, 272 p.

7. Pokorny Yu.V., Bakhtina G.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm oscillation method in spectral problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Phizmatlit, 2009, 192 p.

8. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

9. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

10. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

11. Davydova M.B., Shabrov S.A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

12. Shabrov S.A. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

13. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon The Function Of The Differential Impact Model Fourth Order. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon Funkciya vliyaniya differencial'noj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo instituta GPS MChS Rossii — Herald of the Voronezh Institute of Russian Ministry for Emergency Situations*, 2014, iss. 3 (12), pp. 65–73.

14. Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About one boundary value problem of the sixth order with a strong nonlinearity. [Borodina E.A., Golovanyova F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj granichnoyj zadache shestogo poryadka s sil'noyj nelineyjnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 65–69.

15. Borodina E.A., Shabrov S.A., Shabrova M.V. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity. Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012023.

16. Shabrov S.A., Ilina O.M., Shaina E.A., Chechin D.A. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives Journal of Physics: Conference

Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012044.

17. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

18. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M., Shabrova M.V. On the rate of growth of the eigenvalues of one spectral problem with derivatives of the measure and a spectral parameter in the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M., Shabrova M.V. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj spektral'noyj zadachi s proizvodnymi po mere i spektral'nym parametrom pri vtoroyj proizvodnoyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 203–207.

19. Shabrov S.A., Golovko N.I. About the velocity of increase of eigenvalue of a different order spectral problem with derivative on the measure. [Shabrov S.A., Golovko N.I. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj raznoporyadkovoyj spektral'noyj zadachi s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 186–195.

20. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M. On one spectral problem of the fourth order with Radon–Nikodim derivatives and with spectral parameter at the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M. Ob odnoyj spektral'noyj zadache chetvertogo poryadka s proizvodnymi Radona–Nikodima i so spektral'nym parametrom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 163–167.

21. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

22. Shabrov S. A. About the estimates of the function influence of a mathematical model fourth order. [Shabrov S. A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

23. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

24. Shabrov S.A. Adaptation of the finite element method for mathematical model with nonsmooth solutions. [Shabrov S.A. Adaptaciya metoda konechnyx elementov dlya matematicheskoyj modeli s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 2, pp. 153–164.

25. Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lilov E.V. About the adaptation of the method of

finite elements for the solution of a boundary value problem with Stieltjes differentials on a geometric graph. [Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya resheniya granichnoyj zadachi s differencialami Stilt'esa na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 97–105.

26. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. The adaptation of the finite elements method for a problem with discontinuous solutions. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya zadachi s razryvnymi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 4, pp. 112–120.

Шабров Сергей Александрович, доктор физико–математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Курклинская Элеонора Юрьевна, преподаватель, институт международного образования, кафедра естественных дисциплин, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: dom.vor@mail.ru

Kurklinskaya Eleonora Yurievna, teacher, Institute of International Education, Department of Natural Disciplines, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dom.vor@mail.ru

Марфин Даниил Евгеньевич, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: danil-marfin@yandex.ru

Marfin Daniil Evgenievich, postgraduate student of the Faculty of Mathematics of the Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: danil-marfin@yandex.ru

Садчиков Павел Валерьевич, доцент кафедры теории уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Sadchikov Pavel Valerievich, Associate Professor of the Department of Theory of Partial Differential Equations and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia