УДК 517.929

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $q \in (1,2)$ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

Г. Г. Петросян, М. С. Сорока

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 12.09.2022 г.

Аннотация. В настоящей работе доказывается существование решений краевой задачи для дифференциальных включений дробного порядка $1 < q < 2$, с нелокальным граничным условием, обобщающим многие известные виды краевых условий. Статья состоит из трех разделов. Во введении обосновывается актуальность данной проблематики и излагается история вопроса. Затем, в первом пункте мы приводим необходимые предварительные сведения из теории дробного интегро-дифференцирования и теории многозначных уплотняющих отображений. Во втором пункте формулируются условия, накладываемые на задачу, и доказывается теорема о существовании интегральных решений, применяя теорию топологической степени для уплотняющих многозначных отображений.

Ключевые слова: дифференциальное включение, дробная производная, краевая задача, нелокальное условие, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение.

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF AN ORDER $q \in (1,2)$ WITH A NONLOCAL BOUNDARY CONDITION IN BANACH SPACES

G. G. Petrosyan, M. S. Soroka

Abstract. In this paper, we prove the existence of solutions of a boundary value problem for fractional differential inclusions of an order $1 < q < 2$, with a nonlocal boundary condition that generalizes many well-known types of boundary conditions. The paper is divided into three sections. The introduction substantiates the relevance of this problem and outlines the history of the issue. Then in the first section we give the necessary preliminary information from the theory of fractional integro-differentiation and the theory of multivalued condensing maps. In the second section we formulate the conditions imposed on the problem and we prove a theorem of the existence of mild solutions using the topological degree theory of condensing multivalued maps.

Keywords: differential inclusion, fractional derivative, boundary value problem, nonlocal condition, measure of noncompactness, fixed point, condensing multimap.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства просвещения РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук, проект МК-338.2021.1.1.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений и включений дробного порядка на данный момент посвящено большое число статей. В скалярном случае условия разрешимости начальных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка хорошо описаны в монографиях [1], [2]. В работах [3], [4], [5] были разрешены задачи типа Коши для дифференциальных уравнений и включений с дробным порядком меньшим единицы. Статьи [6], [7] посвящены исследованию траекторий дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $q \in (0,1)$, подчиняющихся обобщенным краевым условиям, выраженным в форме операторных включений. В работах [8], [9] авторы приводят доказательства разрешимости периодических краевых задач для дифференциальных уравнений того же порядка, а для антипериодических в работах [10], [11], [12]. Аппроксимации решений дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $q \in (0,1)$ были изучены в статьях [13], [14], [15], [16]. В последние годы активно исследуются дифференциальные уравнения и включения дробного порядка $q > 1$ (см. статьи [17]–[21]). К данному направлению примыкает и исследуемая нами обобщенная краевая задача.

В сепарабельном банаховом пространстве E, мы исследуем краевую задачу для полулинейного дифференциального включения следующего вида:

$$ {}^C D_0^q x(t) \in \lambda x(t) + F(t,x(t)), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$ x(0) + g(x) = x(T) + x_0, \quad x'(0) = x_1. \tag{2}$$

Здесь ${}^C D_0^q$ — дробная производная Капуто, число $\lambda > 0$, $g : C([0,T]; E) \longrightarrow E$ — вполне непрерывное отображение, $F\colon [0,T] \times E \multimap E$ — многозначное отображение типа Каратеодори и $x_0, x_1 \in E$ наперед заданны.

Граничное условие (2) обобщает многие известные виды краевых условий. В частности, при различных заданиях оператора g оно обобщает следующие:

1) *задача типа Коши,* если $g(x) = x(T)$;
2) *периодическая краевая задача,* если $g(x) = x_0$;
3) *антипериодическая краевая задача,* если $g(x) = x_0 + 2x(T)$;
4) *многоточечная задача,* если

$$ g(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x(t_i), $$

где $x \in C([0,T]; E)$, $c_i \in \mathbb{R}, i = 1,....k,$ — заданные числа и $0 < t_1 < ... < t_k < T$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Дробный анализ

Вначале приведем необходимые базовые сведения из дробного анализа (см. монографии [1], [2]).

Определение 1. Дробным интегралом порядка $q > 0$ функции $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ называется функция $I_0^q g$ следующего вида:

$$ I_0^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} g(s)\, ds, $$

где Γ — это гамма-функция Эйлера.

Отметим, что для гамма-функции Эйлера имеет место свойство (см., например, [2]):

$$\frac{1}{\Gamma(q)} = 0, \text{для}\, q = 0, -1, -2, ... \tag{3}$$

Определение 2. Дробной производной Капуто порядка $q \geqslant 0$ функции $g \in C^n([0,T])$ называется функция ${}^C D_0^q g$ следующего вида:

$${}^C D_0^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} g^{(n)}(s)\, ds, \quad n = [q]+1.$$

Важное значение в дробном анализе имеет функция Миттаг–Лефлера.

Определение 3. Функция вида

$$E_{q,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(qn+\beta)}, \quad q > 0,\ \beta \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C},$$

называется функцией Миттаг–Леффлера.

Рассмотрим задачу Коши для одномерного дифференциального уравнения дробного порядка $1 < q < 2$:

$${}^C D_0^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$x(0) = c_1, x'(0) = c_2, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция. Единственным решением (см. [1]) данной задачи является функция

$$x(t) = c_1 E_{q,1}(\lambda t^q) + c_2 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds. \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения и утверждения (см. [1]):

$$E_{q,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t E_{q,\beta+q}(t), \tag{7}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^{\beta-1} E_{q,\beta}(\lambda t^q)) = t^{\beta-n-1} E_{q,\beta-n}(\lambda t^q), \tag{8}$$

$$\int_0^z t^{\beta-1} E_{q,\beta}(\lambda t^q) dt = z^\beta E_{q,\beta+1}(\lambda z^q). \tag{9}$$

Последовательно применяя формулы (9) и (7), можно получить следующее равенство

$$\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) ds = \frac{1}{\lambda} \left(E_q(\lambda t^q) - 1\right). \tag{10}$$

Лемма 1. *(см. [19]) Для функции* $f \in L^\infty([0,T]; E)$ *и* $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$, *справедливо равенство*

$$\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda (t-s)^\alpha) f(s)\, ds\right)'_t = \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} E_{\alpha,\beta-1}(\lambda (t-s)^\alpha) f(s)\, ds.$$

Рассмотрим в сепарабельном банаховом пространстве E начальную задачу (4), (5), считая, что $f : [0,T] \to E$ и $c_1, c_2 \in E$.

Определение 4. Интегральным решением краевой задачи (4) — (5) в сепарабельном банаховом пространстве E, называется функция $x \in C([0,T];E)$, удовлетворяющая равенству (6), где $f:[0,T] \to E$ и $c_1, c_2 \in E$.

Лемма 2. *Пусть* $f \in C([0,T];E)$ *и*

$$1 - E_q(\lambda T^q) \neq 0. \tag{11}$$

Тогда краевая задача (4), (2)*:*

$$^C D_0^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0,T], 1 < q < 2,$$

$$x(0) + g(x) = x(T) + x_0, \quad x'(0) = x_1,$$

имеет единственное решение

$$x(t) = (1 - E_q(\lambda T^q))^{-1} E_q(\lambda t^q) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds +$$

$$(x_0 - g(x))(1 - E_q(\lambda T^q))^{-1} E_q(\lambda t^q) + T E_{q,2}(\lambda T^q) x_1 (1 - E_q(\lambda T^q))^{-1} E_q(\lambda t^q) +$$

$$x_1 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Доказательство. Применяя формулу (8) и лемму 1, мы можем найти производную для решения заданного по формуле (6):

$$x'(t) = c_1 t^{-1} E_{q,0}(\lambda t^q) + c_2 E_q(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Заметим, что благодаря свойству $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$, для функции $E_{q,0}(\lambda t^q)$ мы имеем

$$E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \frac{1}{\Gamma(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)},$$

следовательно,

$$t^{-1} E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{qn-1}}{\Gamma(qn)}.$$

В силу последней формулы, имеем

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2.$$

Теперь, используя условие (2), мы получаем систему

$$\begin{cases} c_1 + g(x) = c_1 E_q(\lambda T^q) + c_2 T E_{q,2}(\lambda T^q) + \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds + x_0, \\ c_2 = x_1. \end{cases}$$

Решив систему, получим следующие значения:

$$c_1 = \frac{\int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds + x_0 - g(x) + T E_{q,2}(\lambda T^q) x_1}{1 - E_q(\lambda T^q)},$$

$$c_2 = x_1.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу для решения, мы получаем

$$x(t) = (1 - E_q(\lambda T^q))^{-1} E_q(\lambda t^q) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds +$$
$$(x_0 - g(x))(1 - E_q(\lambda T^q))^{-1} E_q(\lambda t^q) + T E_{q,2}(\lambda T^q) x_1 (1 - E_q(\lambda T^q))^{-1} E_q(\lambda t^q) +$$
$$x_1 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s)\, ds.$$

□

1.2. Меры некомпактности и уплотняющие мультиотображения

Пусть $\mathcal{E}$ банахово пространство. Введем следующие обозначения:

- $P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}$;
- $Pb(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A -$ ограничено$\}$;
- $Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A -$ выпукло$\}$;
- $K(\mathcal{E}) = \{A \in Pb(\mathcal{E}) : A -$ компактно$\}$;
- $Kv(\mathcal{E}) = Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})$.

Определение 5. (См., например, [22], [23]). Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ частично–упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (мнк) в $\mathcal{E}$, если для каждого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется $\beta(\overline{\text{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\text{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *монотонной,* если для любых Ω_0,$\Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$, включение $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ влечет неравенство $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$;

2) *несингулярной,* если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется равенство $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ конус в банаховом пространстве, то мера некомпактности β называется:

4) *правильной,* если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$;

5) *вещественной,* если $\mathcal{A}$ подмножество действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественным порядком;

6) *алгебраически полуаддитивной,* если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$, для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$.

Примером вещественной мнк, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является мнк Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\ \}.$$

Отметим, что мнк Хаусдорфа удовлетворяет также свойству полуоднородности $\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega)$, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$. Более того, если $\mathcal{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — линейный ограниченный оператор, то $\chi(\mathcal{L}(\Omega)) \leqslant \|\mathcal{L}\|\chi(\Omega)$ для любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$.

Норма множества $M \in Pb(\mathcal{E})$ определяется по формуле $\|M\| = \sup_{x \in M} \|x\|_{\mathcal{E}}$.

Следующие понятия и утверждения можно найти в монографиях [22], [23].

Определение 6. Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху (п.н.с.)*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$,

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x,y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$,

(iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактно в $\mathcal{E}$,

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Лемма 3. *Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ — замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ — п.н.с.*

Определение 7. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно мнк β (β — уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным выполнено $\beta(\mathcal{F}(\Omega)) \not\geqslant \beta(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см., например, [22]).

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ — замкнутое β — уплотняющее мультиотображение, где β — несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$. Тогда множество неподвижных точек $\mathcal{F}$:* $\mathrm{Fix}\,\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ *— непустое множество.*

1.3. Измеримые мультифункции

Напомним некоторые понятия (см., например, [22], [23]). Пусть E — банахово пространство.

Определение 9. Мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$, для $p \geqslant 1$, называется:

•L^p *-интегрируемой*, если она допускает L^p - интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g \in L^p\,([0,T]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$;

•L^p *-интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0,T])$ такая, что:

$$\|G(t)\| := sup\,\{\|g\|_E : g(t) \in G(t)\} \leqslant \xi(t)$$

для п. в. $t \in [0,T]$.

Множество всех L^p - интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,T] \to K(E)$ обозначается $\mathcal{S}^p_G$.

Определение 10. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T]; E), p \geqslant 1$, называется L^p-полукомпактной, если она L^p-интегрально ограничена, то есть

$$\|\xi_n(t)\|_E \leqslant v(t)\,\text{для всех}\;\; n = 1,2,...,\text{и п.в.}\, t \in [0,T],$$

где $v \in L^p_+([0,T])$ и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0,T]$.

Определение 11. Мультифункция G называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$.

Для L^p-интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds := \left\{ \int_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}^p_G \right\},$$

для любого $t \in [0,T]$.

Лемма 4. *(см. [22], Теорема 4.2.3.) Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0,T] \to P(E)$ — L^p - интегрируемая и L^p - интегрально ограниченная мультифункция такая, что*

$$\chi(G(t)) \leqslant q(t),$$

для п. в. $t \in [0,T]$, где $q \in L^p_+([0,T])$. Тогда

$$\chi(\int_0^t G(s)ds) \leqslant \int_0^t q(s)ds,$$

для всех $t \in [0,T]$. В частности, если мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$ измерима и L^p - интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем:

$$\chi(\int_0^t G(s)ds) \leqslant \int_0^t \chi(G(s))ds, t \in [0,T].$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем полагать, что мультиотображение $F : [0,T] \times E \to Kv(E)$ из задачи (1) — (2) удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ для всех $x \in E$ мультифункция $F(\cdot,x) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ многозначное отображение $F(t,\cdot) : E \to Kv(E)$ – полунепрерывно сверху;

$(F3)$ для каждого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого $x \in E$ с $\|x\|_E < r$, мы имеем

$$\|F(t,x)\|_E \leqslant \omega_r(t);$$

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$, мы имеем

$$\chi(F(t,\Omega)) \leqslant \mu(t)\chi(\Omega),$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где χ — мнк Хаусдорфа в E.

Пусть отображение g удовлетворяет следующим условиям:

$(g1)$ $g : C([0,T];E) \longrightarrow E$ — вполне непрерывный оператор;

$(g2)$ существует константа $\rho > 0$ такая, что

$$\|g(x)\|_E \leqslant \frac{\rho}{\lambda}(1 + \|x\|_E),$$

для всех $x \in C([0,T];E)$.

Для $x \in C([0,T];E)$ введем в рассмотрение мультифункцию:

$$\Phi_F : [0,T] \to Kv(E), \qquad \Phi_F(t) = F(t,x(t)).$$

Из условий $(F1)$ – $(F3)$ следует (см., [22], теорема 1.3.5), что мультифункция Φ_F является L^p–интегрируемой для любого $p \geqslant 1$.

Для решения нашей задачи мы будем использовать суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}^\infty_F : C([0,T];E) \multimap L^\infty([0,T];E)$, определенный следующим образом:

$$\mathcal{P}^\infty_F(x) = \mathcal{S}^\infty_{\Phi_F}.$$

Рассмотрим мультиоператор $\Gamma : C([0,T];E) \multimap C([0,T];E)$, заданный следующим образом:

$$\Gamma(x)(t) = (1 - E_q(\lambda T^q))^{-1} E_q(\lambda t^q) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds +$$

$$(x_0 - g(x))(1 - E_q(\lambda T^q))^{-1} E_q(\lambda t^q) + T E_{q,2}(\lambda T^q) x_1 (1 - E_q(\lambda T^q))^{-1} E_q(\lambda t^q) +$$

$$x_1 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds,$$

где $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$.

Ясно, что функция $x \in C([0,T];E)$ является решением задачи (1) – (2) тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора Γ. Поэтому, нашей задачей является показать, что Γ имеет неподвижную точку.

Для доказательства существования неподвижных точек мультиоператора Γ введем в рассмотрение оператор $S : L^\infty([0,T];E) \to C([0,T];E)$ вида

$$S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Лемма 5. *(см. [19]) Для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0,T];E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0,T]$, слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0,T];E)$ влечет сходимость $S(\eta_n) \to S(\eta_0)$ в $C([0,T];E)$.*

Лемма 6. *(см. [19]) Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ — непустое ограниченное множество, $\Omega(t)$ — относительно компактное подмножество E для каждого $t \in [0,T]$, тогда*

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s) ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x), x \in \Omega \right\}$$

является равностепенно непрерывным множеством.

Для доказательства того, что мультиоператор Γ уплотняющий, рассмотрим конус

$$\mathbb{R}_+^2 = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_1 \geqslant 0, \zeta_2 \geqslant 0\}$$

с естественным частичным порядком и введем в пространстве $C([0,T];E)$ следующую векторную меру некомпактности

$$\nu : Pb(C([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+^2,$$

определенную как

$$\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), mod_C(\Omega)),$$

где $\varphi(\Omega)$ есть модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0,T]} \chi(\{y(t) : y \in \Omega\}),$$

а вторая компонента — модуль равностепенной непрерывности

$$mod_C(\Omega) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{y \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \leqslant \delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Теорема 12. *Пусть выполняются условия $(F1) - (F4)$, $(g1) - (g2)$, (11), предположим, что дополнительно выполняется условие*

$$\frac{\|\mu\|_\infty (2E_q(\lambda T^q) - 1)}{\lambda} < 1, \tag{12}$$

где $\mu(\cdot)$ — функция из условия $(F4)$. Тогда мультиоператор Γ является ν-уплотняющим.

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ — непустое ограниченное множество такое, что

$$\nu(\Gamma(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega). \tag{13}$$

Покажем, что Ω — относительно компактно.

Из (13), следует, что

$$\varphi(\Gamma(\Omega)) \geqslant \varphi(\Omega). \tag{14}$$

Используя свойство $(F4)$ и формулу (10), мы получаем

$$\chi\left(S(f)(t)\right) \leqslant \chi\left(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega\right) \leqslant$$

$$\|\mu\|_\infty \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\chi_E(\{x(t) : x \in \Omega\})ds \leqslant \frac{\|\mu\|_\infty\left(E_q(\lambda T^q)-1\right)}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Применяя условие $(g1)$ и последнее неравенство, получим

$$\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \leqslant (E_q(\lambda T^q)-1)^{-1}E_q(\lambda T^q)\frac{\|\mu\|_\infty\left(E_q(\lambda T^q)-1\right)}{\lambda}\varphi(\Omega) + \frac{\|\mu\|_\infty\left(E_q(\lambda T^q)-1\right)}{\lambda}\varphi(\Omega)$$

$$\leqslant \left(2E_q(\lambda T^q)-1\right)\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Из последней оценки мы имеем

$$\sup_{t\in[0,T]} \chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \leqslant \frac{\|\mu\|_\infty\left(2E_q(\lambda T^q)-1\right)}{\lambda}\varphi(\Omega),$$

или, что тоже самое

$$\varphi\left(\Gamma(\Omega)\right) \leqslant \frac{\|\mu\|_\infty\left(2E_q(\lambda T^q)-1\right)}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Условия (12) и (14) вместе с последним влекут за собой равенство

$$\varphi(\Omega) = 0.$$

Теперь покажем, что

$$mod_C(\Gamma(\Omega)) = 0.$$

Неравенство (13) влечет за собой следующее

$$mod_C(\Gamma(\Omega)) \geqslant mod_C(\Omega). \tag{15}$$

Из леммы 6 известно, что множество функций

$$M = \left\{S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega\right\}$$

является равностепенно непрерывным, поэтому благодаря неравенству (15) мы получаем равенство $mod_C\,(\Omega) = 0$.

Таким образом, мы имеем $\nu(\Omega) = (0,0)$, что доказывает относительную компактность множества Ω. □

Теорема 13. *Мультиоператор* Γ *является п.н.с.*

Доказательство. Из аналитического задания мультиоператора Γ и свойств многозначных отображений (см., например, [22]), следует, что утверждение достаточно доказать для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$.

Покажем, что мультиотображение $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является квазикомпактным. Возьмем непустое компактное множество $A \subset C([0,T];E)$ и рассмотрим последовательность $\{y_n\} \subset S \circ \mathcal{P}_F^\infty(A)$, $y_n = S(f_n)$, где $f_n \in \mathcal{P}_F^\infty(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset A$. Предположим, без ограничения общности, что $x_n \to x_0 \in A$. Из условия $(F4)$ следует, что последовательность $\{f_n(t)\} \subset E$ относительно компактна для п.в. $t \in [0,T]$, поэтому последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является L^1-полукомпактной. По критерию слабой относительной компактности Дистеля (см. [24]), мы можем предположить для произвольной подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$, что $f_{n_k} \xrightarrow{L^1} f_0$. В силу свойств слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора (см. [22], лемма 5.1.1), мы получаем тогда, что $f_0 \in \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$. Теперь, применяя лемму 5, мы для соответствующей подпоследовательности получаем, что $y_{n_k} \to y_0 = S(f_0) \in S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$.

Аналогично рассуждая, мы придем к утверждению о том, что мультиоператор $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является замкнутым. Сославшись на утверждение леммы 3 мы получаем желаемый результат. □

Теперь мы можем перейти к доказательству главного утверждения.

Теорема 14. *При выполнении условий* $(F1), (F2), (F4)$, $(g1)-(g2)$, (11), *предположим, что условие* $(F3)$ *имеет следующий вид:*

$(F3')$ *существует функция* $\alpha \in L_+^\infty([0,T])$ *такая, что*

$$\|F(t,x)\|_E \leqslant \alpha(t)(1 + \|x\|_E).$$

Если

$$l := \frac{k(E_q^2(\lambda T^q) + (E_q(\lambda T^q) - 1)^2)}{\lambda(E_q(\lambda T^q) - 1)} < 1, \tag{16}$$

где $k = \max\{\rho, \|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty\}$, *функции* α, μ *из условий* $(F3')$ *и* $(F4)$ *соответственно,* ρ — *константа из условия* $(g2)$. *Тогда задача* (1)–(2) *имеет решение.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $x \in C([0,T];E)$, тогда для $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$ и $t \in [0,T]$ мы имеем следующую оценку:

$$\|\Gamma x(t)\|_E \leqslant$$

$$\frac{\int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) \|f(s)\|_E \, ds + \|x_0\|_E + \|g(x)\|_E + T E_{q,2}(\lambda T^q)\|x_1\|_E}{E_q(\lambda T^q) - 1} E_q(\lambda T^q) +$$

$$\|x_1\|_E T E_{q,2}(\lambda T^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) \|f(s)\|_E \, ds \leqslant$$

$$\frac{\int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) \|\alpha\|_\infty (1 + \|x\|_{C([0,T];E)}) \, ds + \|x_0\|_E + \frac{\rho}{\lambda}(1 + \|x\|_{C([0,T];E)})}{E_q(\lambda T^q) - 1} E_q(\lambda T^q) +$$

$$\frac{T E_{q,2}(\lambda T^q)\|x_1\|_E}{E_q(\lambda T^q) - 1} E_q(\lambda T^q) + \|x_1\|_E T E_{q,2}(\lambda T^q) +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) \|\alpha\|_\infty (1 + \|x\|_{C([0,T];E)}) \, ds \leqslant$$

$$\frac{\|\alpha\|_\infty (1 + \|x\|_{C([0,T];E)}) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) \, ds + \|x_0\|_E + \frac{\rho}{\lambda}(1 + \|x\|_{C([0,T];E)})}{E_q(\lambda T^q) - 1} E_q(\lambda T^q) +$$

$$\frac{2E_q(\lambda T^q)-1}{E_q(\lambda T^q)-1}TE_{q,2}(\lambda T^q)\|x_1\|_E + \|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)})\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\,ds \leqslant$$

$$\frac{\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)})\frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda T^q)-1\right)+\|x_0\|_E+\frac{\rho}{\lambda}(1+\|x\|_{C([0,T];E)})}{E_q(\lambda T^q)-1}E_q(\lambda T^q)+$$

$$\frac{2E_q(\lambda T^q)-1}{E_q(\lambda T^q)-1}TE_{q,2}(\lambda T^q)\|x_1\|_E + \|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{C([0,T];E)})\frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q)-1\right) \leqslant$$

$$\frac{\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{C([0,T];E)})\left(E_q(\lambda T^q)-1\right)+\frac{\rho}{\lambda}(1+\|x\|_{C([0,T];E)})}{E_q(\lambda T^q)-1}E_q(\lambda T^q)+\frac{\|x_0\|_E E_q(\lambda T^q)}{E_q(\lambda T^q)-1}+$$

$$\frac{2E_q(\lambda T^q)-1}{E_q(\lambda T^q)-1}TE_{q,2}(\lambda T^q)\|x_1\|_E+\frac{\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{C([0,T];E)})\left(E_q(\lambda t^q)-1\right)^2}{E_q(\lambda T^q)-1}=$$

$$\frac{\|x_0\|_E E_q(\lambda T^q)}{E_q(\lambda T^q)-1}+\frac{2E_q(\lambda T^q)-1}{E_q(\lambda T^q)-1}TE_{q,2}(\lambda T^q)\|x_1\|_E+$$

$$\frac{\left(\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}\left(E_q(\lambda T^q)-1\right)E_q(\lambda T^q)+\frac{\rho}{\lambda}E_q(\lambda T^q)+\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q)-1\right)^2\right)(1+\|x\|_{C([0,T];E)})}{E_q(\lambda T^q)-1}\leqslant$$

$$\frac{\|x_0\|_E E_q(\lambda T^q)}{E_q(\lambda T^q)-1}+\frac{2E_q(\lambda T^q)-1}{E_q(\lambda T^q)-1}TE_{q,2}(\lambda T^q)\|x_1\|_E+$$

$$+\frac{k(E_q^2(\lambda T^q)+(E_q(\lambda T^q)-1)^2)(1+\|x\|_{C([0,T];E)})}{\lambda(E_q(\lambda T^q)-1)}=$$

$$m+l(1+\|x\|_{C([0,T];E)}),$$

где

$$m=\frac{\|x_0\|_E E_q(\lambda T^q)}{E_q(\lambda T^q)-1}+\frac{2E_q(\lambda T^q)-1}{E_q(\lambda T^q)-1}TE_{q,2}(\lambda T^q)\|x_1\|_E,$$

$$l=\frac{k(E_q^2(\lambda T^q)+(E_q(\lambda T^q)-1)^2)}{\lambda(E_q(\lambda T^q)-1)}.$$

Если мы возьмем

$$R\geqslant\frac{m+l}{1-l},$$

то неравенство $\|x\|_{C([0,T];E)}\leqslant R$ влечет, что $\|\Gamma x\|_{C([0,T];E)}\leqslant R$, следовательно мультиоператор Γ преобразует замкнутый шар $B_R(0)\subset C([0,T];E)$ в себя. Заметим, что неравенство (16) влечет за собой выполнение условия (12), поэтому мультиоператор Γ — уплотняющий относительно мнк ν и по теореме 8 он имеет неподвижную точку, которая есть решение задачи (1)–(2). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam : North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., 2006. — 540 p.

2. Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego : Academic Press, 1999. — 340 p.

3. On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory. — 2017. — V. 18, № 1. — P. 269–292.

4. Appell, J. Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives / J. Appell, B. Lopez, K. Sadarangani // J. Nonlinear Var. Anal. — 2018. — V. 2. — P. 25–33.

5. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays / T. D. Ke, V. Obukhovskii, N.-C. Wong, J.-C. Yao // Applicable Analysis. — 2013. — V. 92, № 1. — P. 115–137.

6. Петросян, Г. Г. О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве / Г. Г. Петросян, М. С. Сорока (Афанасова) // Известия вузов. Математика. — 2019. — № 9. — С. 3–15.

7. Benedetti, I. On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions / I. Benedetti, V. Obukhovskii, V. Taddei // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — V. 20. — P. 1424–1446.

8. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao // Applicable Analysis. — 2018. — V. 97, № 4. — P. 571–591.

9. On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional-Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao// Mathematics. — 2019. — V. 7, № 12. — P. 5–19.

10. Петросян, Г. Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве / Г. Г. Петросян // Уфимский математический журнал. — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 71–82.

11. Petrosyan, G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order / G. Petrosyan // The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics. — 2020. — V. 34. — P. 51–66.

12. Agarwal, R. Existence theory for anti-periodic boundary value problems of fractional differential equations and inclusions / R. Agarwal, B. Ahmad // Comput. Math. Appl. — 2011. — V. 62. — P. 1200–1214.

13. Gomoyunov, M. I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems / M. I. Gomoyunov // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2018. — V. 21. — P. 1238–1261.

14. Gomoyunov, M. I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems. Progress in Fractional / M. I. Gomoyunov // Differentiation and Applications. — 2019. — V. 5. — P. 143–155.

15. Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. — 2019. — V. 2. — P. 1–21.

16. On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. — 2017. — V. 28:4. — P. 1–28.

17. Belmekki, M. Existence of Periodic Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation / M. Belmekki, J. J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez // Boundary Value Problems. — 2009. — V. 11. — P. 1–18.

18. Belmekki, M. Existence of solution to a periodic boundary value problem for a nonlinear impulsive fractional differential equation / M. Belmekki, J. J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2014. — V. 16. — P. 1–27.

19. Kamenskii, M. I. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space / M. I. Kamenskii, G. G. Petrosyan, C.-F. Wen // J. Nonlinear Var. Anal. — 2021. — V. 5, № 1. — P. 155–177.

20. On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self-adjoint positive operator in Hilbert spaces / M. Kamenskii, G. Petrosyan, P. Raynaud de

Fitte, J.-C. Yao // Mathematics. — 2022. — V. 10, iss. 2. — P. 219–231.

21. Петросян, Г. Г. О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве / Г. Г. Петросян // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2022. — Т. 32, № 3. — С. 415–432.

22. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin–New-York : Walter de Gruyter, 2001. — 239 p.

23. Obukhovskii, V. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications / V. Obukhovskii, B. Gelman. — Hackensack, NJ : World Scientific, 2020. — 220 p.

24. Diestel, J. Weak Compactness in $L^1(\mu,X)$, / J. Diestel, W. M. Ruess, W. Schachermayer // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 118. — P. 447–453.

REFERENCES

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., 2006, 540 p.

2. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego, Academic Press, 1999, 340 p.

3. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces. Fixed Point Theory, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 269–292.

4. Appell J., Lopez B., Sadarangani K. Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives. J. Nonlinear Var. Anal., 2018, vol. 2., pp. 25–33.

5. Ke T.D., Obukhovskii V.V., Wong N.-C., Yao J.-C. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays. Applicable Analysis, 2013, vol. 92, no. 1, pp. 115–137.

6. Petrosyan G., Soroka M. (Afanasova M.) On the boundary value problem for functional-differential inclusion of fractional order with general initial condition in a Banach space. [Petrosyan G.G., Soroka M.S. (Afanasova M.S.) O kraevoj zadache dlya funkcional'no-differencial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s obshchim nachal'nym usloviem v banahovom prostranstve]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2019, no. 9, pp. 3–15.

7. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions. Fract. Calc. Appl. Anal., 2017, vol. 20, pp. 1424–1446.

8. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space. Applicable Analysis, 2018, vol. 97:4, pp. 571–591.

9. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional-Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space. Mathematics, 2019, vol. 7:12, pp. 5–19.

10. Petrosyan G. On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of fractional order with a deviating argument in a Banach space. [Petrosyan G.G. Ob antiperiodicheskoj kraevoj zadache dlya polulinejnogo differencial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s otklonyayushchimsya argumentom v banahovom prostranstve]. *Ufimskij matematicheskij zhurnal — Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 71–82.

11. Petrosyan G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order. The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics, 2020, vol. 34, pp. 51–66.

12. Agarwal R., Ahmad B. Existence theory for anti-periodic boundary value problems of fractional differential equations and inclusions. Comput. Math. Appl, 2011, vol. 62, pp. 1200–1214.

13. Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2018, vol. 21, pp. 1238–1261.

14. Gomoyunov, M.I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems. Progress in Fractional. Differentiation and Applications, 2019, vol. 5, pp. 143–155.

15. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions. Fixed Point Theory and Applications, 2019, vol. 2, pp. 1–21.

16. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2017, vol. 28:4, pp. 1–28.

17. Belmekki M., Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R. Existence of Periodic Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation. Boundary Value Problems, 2009. vol. 11, pp. 1–18.

18. Belmekki M., Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R. Existence of solution to a periodic boundary value problem for a nonlinear impulsive fractional differential equation. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2014, vol. 16, pp. 1–27.

19. Kamenskii M.I., Petrosyan G.G., Wen C.-F. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space. J. Nonlinear Var. Anal., 2021, vol. 5, no. 1, pp. 155–177.

20. Kamenskii M., Petrosyan G., Raynaud de Fitte R., Yao J.-C. On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self-adjoint positive operator in Hilbert spaces. Mathematics, 2022. vol. 10, iss. 2, pp. 219–231.

21. Petrosyan G.G. On a boundary value problem for a class of fractional Langevin type differential equations in a Banach space. [O kraevoj zadache dlya klassa differencial'nyh uravnenij drobnogo poryadka tipa Lanzhevena v banahovom prostranstve]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki — Bulletin of the Udmurt University. Maths. Mechanics. Computer science*, 2022, vol. 32, iss. 3, pp. 415–432.

22. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin–New-York, Walter de Gruyter, 2001, 239 p.

23. Obukhovskii V., Gelman B. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications. Hackensack, NJ, World Scientific, 2020, 220 p.

24. Diestel J., Ruess W.M., Schachermayer W. Weak Compactness in $L^1(\mu,X)$. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, vol. 118, pp. 447–453.

Петросян Гарик Гагикович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Petrosyan Garik, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Сорока Мария Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

Soroka Maria, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru