

ЗАДАЧА ОБ ОРТОНОРМАЛИЗАЦИИ И КВАЗИИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СДВИГОВ ФУНКЦИИ ГАУССА

Е. А. Киселев, Л. А. Минин, С. Н. Ушаков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.12.2021 г.

Аннотация. В данной работе исследуется семейство целочисленных сдвигов функции Гаусса. Результаты получены в двух основных направлениях. Во-первых, с использованием леммы Рисса аналитически решена задача об ортогонализации с сохранением структуры сдвига. Во-вторых, указан простой способ построения нового семейства кардинальных функций, позволяющих проводить процедуру квазиинтерполяции. В ходе исследования установлено, что решение задачи об ортогонализации и одна из кардинальных функций с точностью до постоянного множителя совпадают. Это открывает широкие возможности для построения новых приближенных формул, являющихся близкими аналогами теоремы Шеннона–Котельникова.

Ключевые слова: функция Гаусса, система целочисленных сдвигов, ортонормализация, квазиинтерполяция, кардинальная функция.

THE PROBLEM OF ORTHONORMALIZATION AND QUASI-INTERPOLATION FOR A SYSTEM OF INTEGER TRANSLATES OF THE GAUSSIAN

E. A. Kiselev, L. A. Minin, S. N. Ushakov

Abstract. In this paper we study a family of integer translates of the Gaussian. The results are obtained in two main directions. First, using the Riesz lemma, we analytically solve the orthogonalization problem while keeping the translate structure. Secondly, a simple method is shown for constructing a new family of cardinal functions those allow one to carry out the quasi-interpolation procedure. In the course of the study, it was found that the solution of the orthogonalization problem and one of the cardinal functions coincide up to a constant multiplier. This opens up wide opportunities for constructing new approximate formulas that are close analogues of the Shannon–Kotel'nikov theorem.

Keywords: Gaussian, system of integer translates, orthonormalization, quasi-interpolation, cardinal function.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время весьма актуальны задачи аппроксимации с помощью неортогональных наборов функций. Одними из наиболее популярных являются системы сдвигов и фреймы Габора, порожденные функцией Гаусса. Основные результаты, касающиеся систем сдвигов, содержатся в работах [1], [2]. На данный момент накоплен достаточно богатый теоретический материал по этой тематике (см., например, [3]), однако остались и нерешенные проблемы. Некоторым из них посвящена данная статья.

Рассматривается пространство $L_2(\mathbb{R})$. Скалярное произведение и связанная с ним норма задаются стандартным образом

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx, \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Преобразование Фурье определим с помощью формулы

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

В дальнейшем нам понадобятся четыре тета-функции Якоби [4, гл. 21], [5, (20.1.1)–(20.1.4)]

$$\theta_1(z, q) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z},$$

$$\theta_2(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z},$$

$$\theta_3(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz},$$

$$\theta_4(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nz}.$$

Здесь $z, q \in \mathbb{C}$, причем $|q| < 1$. Часто бывает удобно параметр q записать в виде $q = e^{i\pi\tau}$, $\text{Im}\tau > 0$. В дальнейшем во всех формулах, где одновременно присутствуют величины q и τ , мы будем предполагать, что между ними имеет место взаимосвязь $q = e^{i\pi\tau}$. Также при формулировке некоторых утверждений будут использоваться особые обозначения

$$q_\sigma = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\right), \tau_\sigma = \frac{i}{4\pi\sigma^2},$$

где σ — вещественный положительный параметр.

Для решения задачи об ортогонализации систем целочисленных сдвигов с сохранением структуры обычно используется следующий факт.

Утверждение 1. ([6, гл. 1], [7, гл. 3]) Пусть $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Если функции $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ образуют систему Рисса, то семейство целочисленных сдвигов функции

$$\varphi^\perp(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p^\perp \varphi(x - p), \quad (1)$$

где коэффициенты $c_p^\perp$ удовлетворяют равенству

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p^\perp e^{ip\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2}}, \quad (2)$$

является ортонормированным.

Замечание 1. На самом деле вместо условия (2) можно записать несколько более общее соотношение

$$\left| \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p^{\perp} e^{ip\xi} \right|^2 = \frac{1}{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2}. \quad (3)$$

Это равносильно добавлению в (2) фазового множителя $e^{if(\xi)}$, где $f(\xi)$ — некоторая вещественная функция.

Поскольку нас интересуют системы целочисленных сдвигов функции Гаусса, положим $\varphi(x) = q_{\sigma}^{2x^2}$ в формуле (3). Коэффициенты $c_p^{\perp}$ в данной ситуации будут зависеть от параметра σ , поэтому мы обозначим их как $c_p^{\perp}(\sigma)$. В этом случае совокупность сдвигов $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, как хорошо известно, образует систему Рисса, а соотношение (3) приводит к следующему равенству [8]

$$\left| \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p^{\perp}(\sigma) e^{ip\xi} \right|^2 = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi} \theta_3\left(\frac{\xi}{2}, q_{\sigma}\right)}. \quad (4)$$

Насколько известно авторам, до сих пор в научной литературе не было приведено какого-либо аналитического выражения для коэффициентов $c_p^{\perp}(\sigma)$. Чтобы найти $c_p^{\perp}(\sigma)$, из правой части выражения (4) необходимо извлечь квадратный корень. Такая возможность имеется, так как $\theta_3(z, q) > 0$ при $z, q \in \mathbb{R}$. Обычно корень из тета-функции извлекают симметричным образом, после чего, однако, найти $c_p^{\perp}(\sigma)$ удастся только численно [8]. В данной работе мы поступим иначе: извлечем корень по лемме Рисса. Аналогичный подход был использован Я. Стрембергом при ортогонализации B -сплайнов с сохранением структуры сдвига [9]. Здесь стоит отметить, что после работы Я. Стремберга эту процедуру в научной литературе стало принято называть ортонормализацией. В отличие от сплайнов, для функции Гаусса удастся решить задачу о нахождении коэффициентов $c_p^{\perp}(\sigma)$ полностью с получением явной формулы для их расчета.

Другим ключевым вопросом, который рассматривается в данной статье, является задача о квазиинтерполяции на равномерной сетке точек. Для простоты узлы полагаются целочисленными: $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Нас будет интересовать случай, когда интерполирующая функция строится в виде линейной комбинации целочисленных сдвигов одной заданной функции $\varphi(x)$. В этом вопросе важную роль играет следующая вспомогательная математическая конструкция.

Определение 1. ([7, гл. 4]) Функция $\tilde{\varphi}(x)$, являющаяся линейной комбинацией $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, называется кардинальной функцией, если выполняется условие

$$\tilde{\varphi}(k) = \delta_{0,k}, k \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

где $\delta_{k,m}$ — символ Кронекера.

В некоторых конкретных случаях существуют определенные алгоритмы получения соответствующих кардинальных функций [1, гл. 7], [7, гл. 4], [10]. Нас будет интересовать следующий результат.

Утверждение 2. ([1, гл. 7]) Функция

$$\tilde{\varphi}(x, \sigma) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma) q_{\sigma}^{2(x-p)^2},$$

где коэффициенты $c_p(\sigma)$ определяются выражением

$$c_p(\sigma) = \frac{2}{\theta_1'(0, q_{\sigma})} q_{\sigma}^{-2p^2} \sum_{r=|p|}^{\infty} (-1)^r q_{\sigma}^{2(r+\frac{1}{2})^2}, \quad (6)$$

является кардинальной функцией.

В данном утверждении, по сути, применяется система целочисленных сдвигов функции Гаусса. В статье [11] предложено несколько других вариантов квазиинтерполяции с использованием нецелочисленных сдвигов. Нашим достижением является получение явных формул для расчета кардинальных функций, о которых говорилось в [11].

Укажем дополнительно одно важное соотношение для коэффициентов $c_p(\sigma)$ из утверждения 2, которое потребуется нам в дальнейшем [1, гл. 7], [4, гл. 21]:

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma) e^{ip\xi} = \frac{1}{\theta_3\left(\frac{\xi}{2}, q^2\right)}. \quad (7)$$

1. ОРТОНОРМАЛИЗАЦИЯ

Докажем одно вспомогательное тождество для третьей тета-функции Якоби, которое позднее позволит извлечь из нее квадратный корень по лемме Рисса.

Лемма. Для $\forall z, q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ справедливо равенство

$$\theta_3(z, q) = \frac{2e^{\frac{i\pi\tau}{4}}}{\theta_2(0, q)} \theta_3\left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right) \theta_3\left(z - \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right).$$

Доказательство. Применим одно из тождеств Ватсона [5, (20.7.14)]

$$\theta_3(z, q)\theta_3(w, q) = \theta_3(z + w, q^2)\theta_3(z - w, q^2) + \theta_2(z + w, q^2)\theta_2(z - w, q^2),$$

положив в нем $w = \pi\tau/2$:

$$\begin{aligned} \theta_3(z, q)\theta_3\left(\frac{\pi\tau}{2}, q\right) &= \\ &= \theta_3\left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right)\theta_3\left(z - \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right) + \theta_2\left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right)\theta_2\left(z - \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Запишем второе слагаемое через третью тета-функцию. Для этого воспользуемся следующим соотношением [5, (20.2.10), (2.2.12)]

$$\theta_2(z, q) = e^{iz + \frac{i\pi\tau}{4}} \theta_3\left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q\right). \quad (9)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \theta_2\left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right)\theta_2\left(z - \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right) &= \\ &= e^{i\left(z + \frac{\pi\tau}{2}\right) + \frac{i\pi\tau}{2}} e^{i\left(z - \frac{\pi\tau}{2}\right) + \frac{i\pi\tau}{2}} \theta_3\left(z + \frac{3\pi\tau}{2}, q^2\right)\theta_3\left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right) = \\ &= e^{2iz + i\pi\tau} \theta_3\left(z + \frac{3\pi\tau}{2}, q^2\right)\theta_3\left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь мы учли, что величине q^2 будет соответствовать параметр 2τ .

Упростим выражение (10), воспользовавшись квазипериодичностью $\theta_3(z, q)$ [5, (20.2.8)]

$$\theta_3(z + (m + n\tau)\pi, q) = q^{-n^2} e^{-2inz} \theta_3(z, q), m, n \in \mathbb{Z}.$$

Если положить здесь $m = 0$, $n = 1$, а также заменить z на $z - \pi\tau/2$, q на q^2 и, соответственно, τ на 2τ , получим

$$\theta_3\left(z + \frac{3\pi\tau}{2}, q^2\right) = q^{-2} e^{-2i\left(z - \frac{\pi\tau}{2}\right)} \theta_3\left(z - \frac{\pi\tau}{2}, q^2\right) =$$

$$= q^{-1} e^{-2iz} \theta_3 \left(z - \frac{\pi\tau}{2}, q^2 \right).$$

С учетом этого, после некоторых сокращений соотношение (10) принимает вид

$$\theta_2 \left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q^2 \right) \theta_2 \left(z - \frac{\pi\tau}{2}, q^2 \right) = \theta_3 \left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q^2 \right) \theta_3 \left(z - \frac{\pi\tau}{2}, q^2 \right).$$

В результате формула (8) запишется следующим образом

$$\theta_3(z, q) \theta_3 \left(\frac{\pi\tau}{2}, q \right) = 2 \theta_3 \left(z + \frac{\pi\tau}{2}, q^2 \right) \theta_3 \left(z - \frac{\pi\tau}{2}, q^2 \right).$$

Осталось выразить отсюда $\theta_3(z, q)$ и применить для $\theta_3(\pi\tau/2, q)$ соотношение (9), положив в нем $z = 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Набор коэффициентов*

$$c_p^\perp(\sigma) = \Omega(\sigma) c_p(\sigma) q_\sigma^p, \quad (11)$$

где

$$\Omega(\sigma) = \sqrt{\frac{\theta_2(0, q_\sigma)}{2q_\sigma^{\frac{1}{4}} \sigma \sqrt{\pi}}}, \quad (12)$$

удовлетворяет соотношению (4).

Доказательство. Сразу стоит отметить, что $\theta_2(0, q) > 0$ при $q \in \mathbb{R}$. Это становится очевидным, если представить $\theta_2(0, q)$ в виде бесконечного произведения [5, (20.4.3)]. Поэтому подкоренное выражение в формуле (12) всегда положительно, а значит величина $\Omega(q)$ является вещественной.

Подставим выражение (11) для коэффициентов $c_p^\perp(\sigma)$ в равенство (4) и убедимся, что если $\xi \in \mathbb{R}$, то оно превращается в тождество:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p^\perp(\sigma) e^{ip\xi} \right|^2 &= \left| \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Omega(\sigma) c_p(\sigma) q_\sigma^p e^{ip\xi} \right|^2 = \\ &= \Omega^2(\sigma) \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma) q_\sigma^p e^{ip\xi} \right) \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma) q_\sigma^p e^{-ip\xi} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим выражение в первых скобках, обозначив его $C(\xi, \sigma)$. Поскольку $q_\sigma = e^{i\pi\tau\sigma}$, ему можно придать следующий вид:

$$C(\xi, \sigma) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma) e^{ip(\xi + \pi\tau\sigma)}.$$

Воспользовавшись формулой (7), получим:

$$C(\xi, \sigma) = \frac{1}{\theta_3 \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\pi\tau\sigma}{2}, q_\sigma^2 \right)}.$$

Аналогично множитель во вторых скобках будет равен

$$\overline{C(\xi, \sigma)} = \frac{1}{\theta_3 \left(-\frac{\xi}{2} + \frac{\pi\tau\sigma}{2}, q_\sigma^2 \right)} = \frac{1}{\theta_3 \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\pi\tau\sigma}{2}, q_\sigma^2 \right)}.$$

Отметим, что при $\xi \in \mathbb{R}$ знаменатели в обоих выражениях не обращаются в нуль, поскольку корнями $\theta_3(z, q)$ являются числа $z_{mn} = ((m + 1/2) + (n + 1/2)\tau)\pi$, $m, n \in \mathbb{Z}$ [5, (20.2)].

Подставим полученные соотношения в формулу (13) и воспользуемся леммой 1, полагая в ней $z = \xi/2$, $q = q_\sigma$, $\tau = \tau_\sigma$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p^\perp(\sigma) e^{ip\xi} \right|^2 &= \frac{\Omega^2(\sigma)}{\theta_3\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\pi\tau_\sigma}{2}, q_\sigma^2\right) \theta_3\left(\frac{\xi}{2} - \frac{\pi\tau_\sigma}{2}, q_\sigma^2\right)} = \\ &= \frac{2q_\sigma^{\frac{1}{4}} \Omega^2(\sigma)}{\theta_2(0, q_\sigma) \theta_3\left(\frac{\xi}{2}, q_\sigma\right)} = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi} \theta_3\left(\frac{\xi}{2}, q_\sigma\right)}. \end{aligned}$$

Здесь мы также учли явный вид величины $\Omega(\sigma)$, даваемый формулой (12). Итак, подставив $c_p^\perp(\sigma)$ в левую часть равенства (4), мы получили тождество. Теорема доказана.

Замечание 2. Согласно формуле (6), $c_{-p}(\sigma) = c_p(\sigma)$, поэтому коэффициенты $c_p^\perp(\sigma)$ несимметричны. Это побочный эффект от того, что мы фактически извлекли квадратный корень из $\theta_3(\xi/2, q_\sigma)$ по лемме Рисса.

Замечание 3. Кроме (11) уравнение (4) имеет еще одно очевидное решение:

$$c_p^\perp(\sigma) = \Omega(\sigma) c_p(\sigma) q_\sigma^{-p}. \quad (14)$$

Поскольку $c_{-p}(\sigma) = c_p(\sigma)$ (см. (6)), это соответствует переходу от функции $\varphi^\perp(x)$ к $\varphi^\perp(-x)$.

Подставив найденные коэффициенты $c_p^\perp(\sigma)$ в формулу (1), мы имеем возможность провести ортонормализацию системы целочисленных сдвигов функции Гаусса.

2. КАРДИНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Требуется построить функцию вида

$$\tilde{\varphi}(x, \sigma, \beta) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma, \beta) q_\sigma^{2(x-\beta-p)^2}, \beta \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

где $c_p(\sigma, \beta)$ – некоторые коэффициенты, которая в целочисленных точках будет удовлетворять условию (5). Это можно записать в виде системы уравнений

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma, \beta) q_\sigma^{2(m-\beta-p)^2} = \delta_{0,m}, m \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Такая функция, если она существует, будет являться кардинальной функцией на целочисленной сетке точек, а значит может быть использована для построения квазиинтерполяционных схем.

Теорема 2. Решение системы (16) при заданных σ и β имеет вид

$$c_p(\sigma, \beta) = q_\sigma^{-4p\beta-2\beta^2} c_p(\sigma), m \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

Доказательство. Проверим утверждение теоремы непосредственной подстановкой

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{\infty} q_\sigma^{-4p\beta-2\beta^2} c_p(\sigma) q_\sigma^{2(m-\beta-p)^2} = \\ \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma) q_\sigma^{-4p\beta-2\beta^2+2m^2-4(\beta+p)m+2\beta^2+4\beta p+2p^2} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma) q_{\sigma}^{2(m-p)^2 - 4\beta m}.$$

Осталось вынести множитель $q_{\sigma}^{-4\beta m}$ за знак суммы и применить (5)

$$q_{\sigma}^{-4\beta m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(\sigma) q_{\sigma}^{2(m-p)^2} = q_{\sigma}^{-4\beta m} \delta_{0m} = \delta_{0m}.$$

Теорема доказана.

Замечание 4. Отметим, что $c_p(\sigma, 0) = c_p(\sigma)$.

Наиболее интересным оказывается частный случа $\beta = \pm 1/4$.

Теорема 3. Система целочисленных сдвигов $\tilde{\varphi}(x - k, \sigma, \beta)$, $k \in \mathbb{Z}$ при $\beta = \pm 1/4$ является ортогональной.

Доказательство. Запишем формулу (17) для коэффициентов $c_p(\sigma, \beta)$ при $\beta = \pm 1/4$:

$$c_p(\sigma, \pm 1/4) = q^{-\frac{1}{8}} q_{\sigma}^{\mp p} c_p(\sigma), m \in \mathbb{Z}.$$

Это выражение при $\beta = -1/4$ отличаются лишь постоянным множителем $\Omega(\sigma) q_{\sigma}^{1/8}$ от $c_p^{\perp}(\sigma)$ (см. (11)). Аналогичная ситуация и при $\beta = 1/4$, только сравнивать нужно с формулой (14). Остается заметить, что сдвиг аргумента x одновременно у всех функций $\tilde{\varphi}(x - k, \sigma, \beta)$ на $\pm 1/4$ не нарушает их попарных скалярных произведений. Теорема доказана.

Замечание 5. Система функций $\tilde{\varphi}(x - k, \sigma, \beta)$, $k \in \mathbb{Z}$ при $\beta = \pm 1/4$ является ортогональной, но не ортонормированной.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 изображен график функции $\varphi^{\perp}(x)$ при разных значениях параметра σ (пунктиром показана прямая $x = 1/4$). Как видим, она является несимметричной. Этот эффект является следствием того, что коэффициенты $c_p^{\perp}(\sigma)$ (см. (11)) убывают с разной скоростью при $p > 0$ и $p < 0$. Можно отметить, что постепенно при увеличении σ график приобретает некую симметрию относительно прямой $x = 1/4$, а функция $\varphi^{\perp}(x)$ становится менее локальной по переменной x . Это обусловлено взаимосвязью $\varphi^{\perp}(x)$ с кардинальными функциями (см. теорему 3).

На рис. 2 для примера изображены несколько графиков кардинальной функции $\tilde{\varphi}(x, \sigma, \beta)$ при $\beta = 0.4$ и различных значениях параметра σ . Пунктиром показана функция $\text{sinc}(\pi x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Как видим, с увеличением σ графики становятся все более симметричными и стремятся к функции отсчетов $\text{sinc}(\pi x)$. Этому факту можно дать строгое обоснование, практически дословно повторив доказательство теоремы 1 из статьи [12], отказавшись от требования $\hat{\varphi}(\xi) > 0$. Также его можно рассматривать как следствие результатов статьи [11], касающихся особенностей сходимости процедуры квазиинтерполяции к функциям с ограниченным спектром при $\sigma \rightarrow \infty$.

Кардинальная функция (15) с коэффициентами $c_p(\sigma, \beta)$, определяемыми формулой (16), существует и при $|\beta| \geq 1/2$. На рис. 3 изображены два примера таких функций. Они выходят за рамки пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Согласно теореме 4, при $\beta = \pm 1/4$ система целочисленных сдвигов кардинальной функции $\tilde{\varphi}(x, \sigma, \beta)$ будет являться ортогональной, однако не ортонормированной (см. замечание 5). На рис. 4 изображен график зависимости нормировочного множителя $\Omega(\sigma) q_{\sigma}^{1/8}$ от параметра σ . Отметим два обстоятельства. При $\sigma \rightarrow 0$ этот множитель стремится к нулю. При $\sigma < 0.1$ он достаточно быстро становится очень малым по величине, однако в нуль не обращается ни при каком значении $\sigma > 0$. Если $\sigma \rightarrow \infty$, то нормировочный множитель стремится к единице.

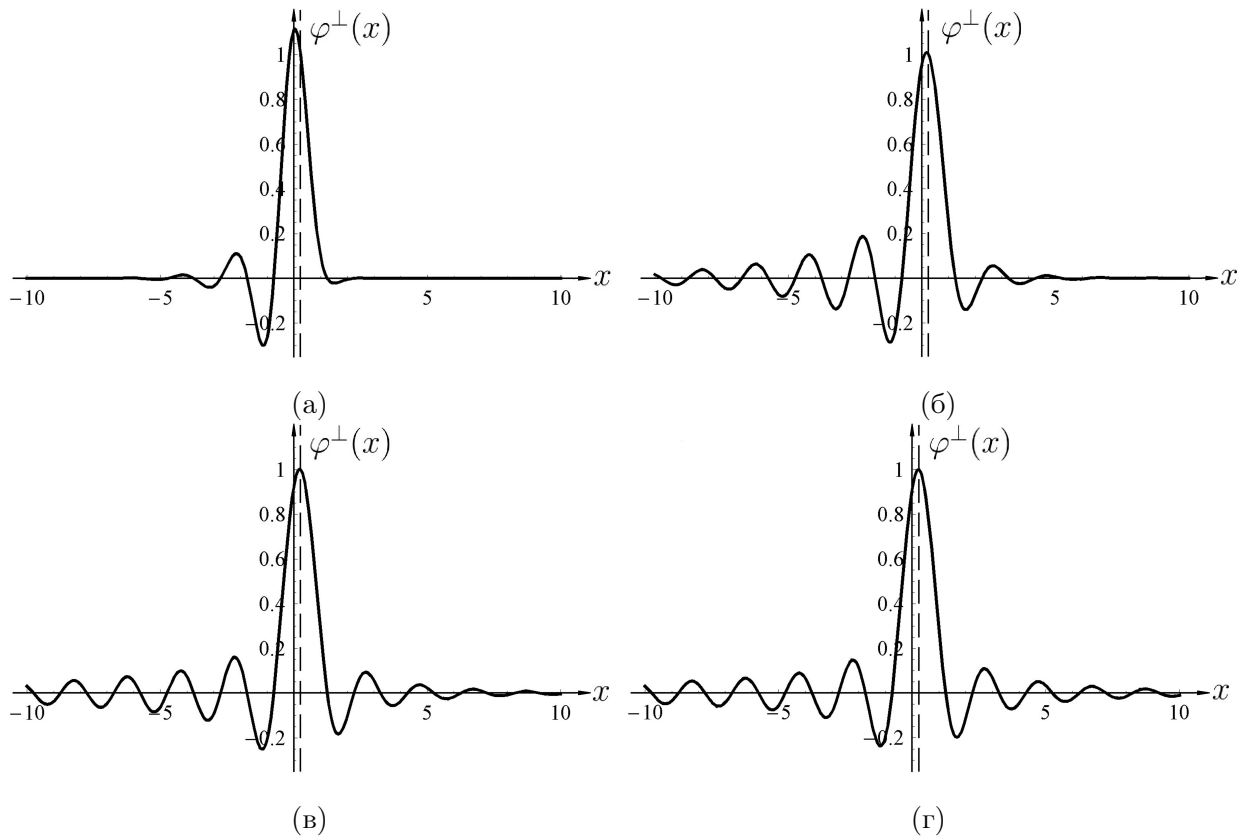


Рис. 1. График $\varphi^\perp(x)$ при $\sigma = 0.5$ (а), $\sigma = 1$ (б), $\sigma = 1.5$ (в), $\sigma = 2$ (г)

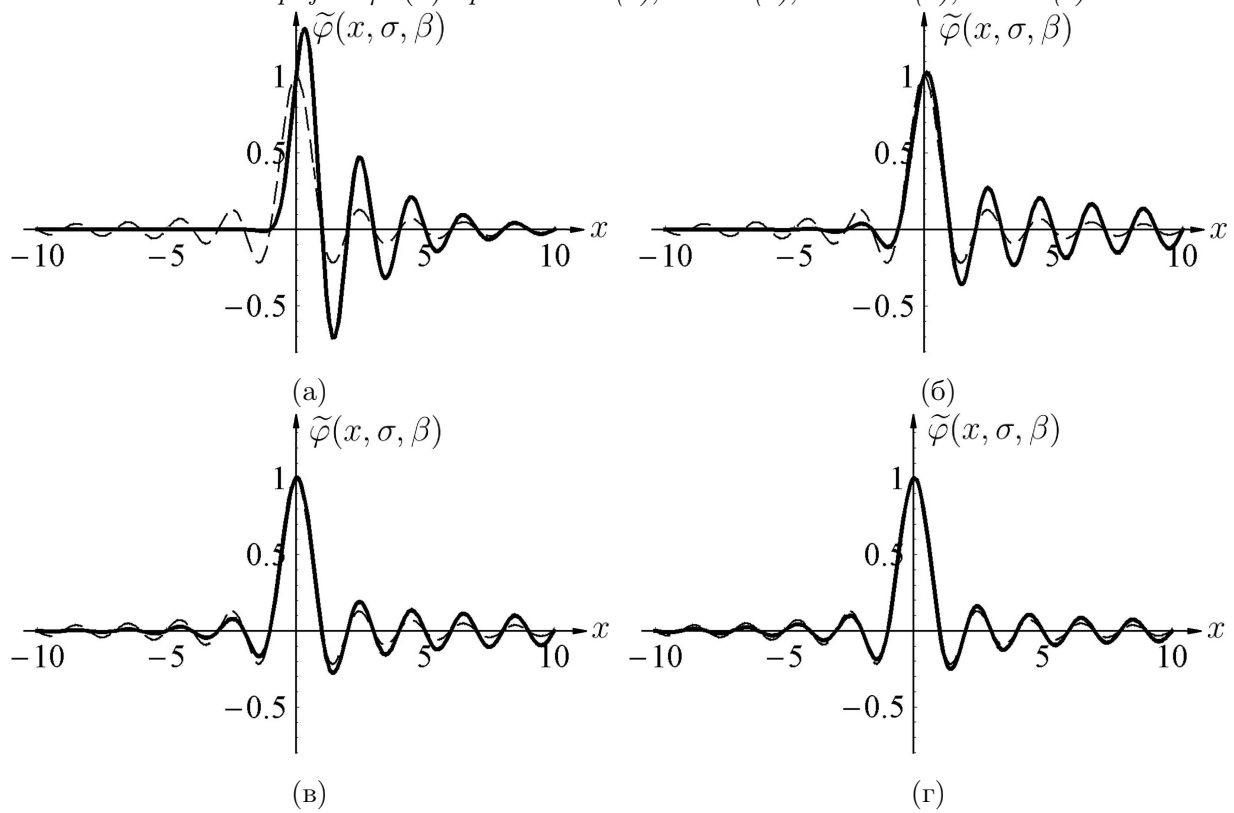


Рис. 2. График $\tilde{\varphi}(x, \sigma, \beta)$ при $\beta = 0.4$ и $\sigma = 0.5$ (а), $\sigma = 1$ (б), $\sigma = 1.5$ (в), $\sigma = 2$ (г)

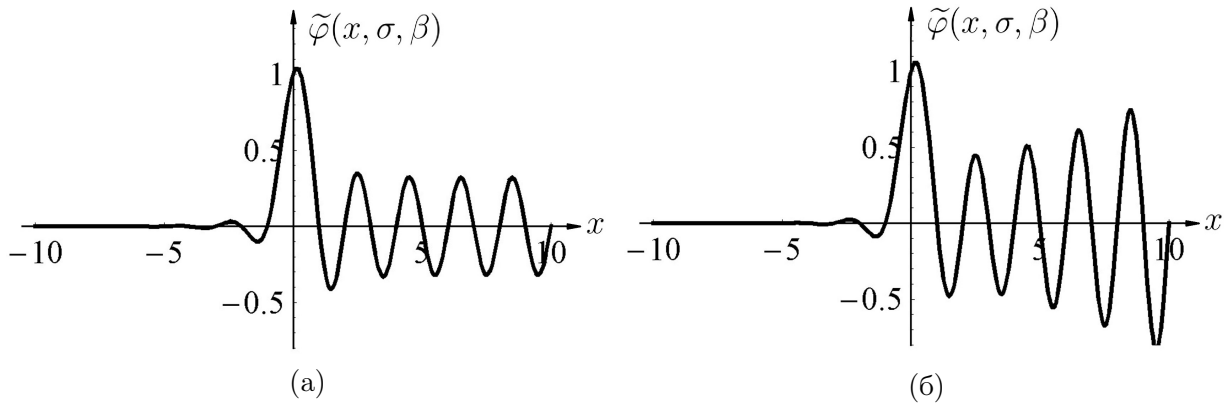


Рис. 3. График $\tilde{\varphi}(x, \sigma, \beta)$ при $\sigma = 1$ и $\beta = 0.5$ (а), $\beta = 0.6$ (б)

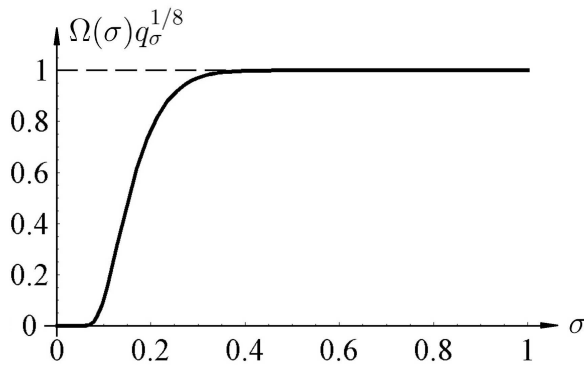


Рис. 4. График зависимости величины $\Omega(\sigma)q_\sigma^{1/8}$ от параметра σ

Как видно из рис. 4, уже при $\sigma = 0.5$ исследуемая система сдвигов $\tilde{\varphi}(x - k, \sigma, \pm 1/4)$, $k \in \mathbb{Z}$ становится практически ортонормированной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время имеется большое разнообразие методов аппроксимации функций, начиная от рядов Фурье, заканчивая довольно нетривиальными достижениями теории фреймов. Общей проблемой большинства алгоритмов разложения в ряд, является необходимость вычисления интегралов. Это сильно затрудняет их практическое применение в задачах цифровой обработки сигналов. В некоторых случаях данную сложность удастся обойти либо путем получения аналитических формул, либо путем упрощения алгоритма за счет соответствующего согласования параметров. Так, например, дискретное преобразование Фурье (ДПФ) удачно сочетает в себе идеи рядов Фурье и интерполяционного подхода. По аналогичным причинам в теории всплесков на масштабирующую функцию накладываются дополнительные условия – уравнения моментов. Все это тесно взаимосвязано со знаменитой теоремой Шеннона–Котельникова, являясь ее естественным развитием [13].

В данной работе построено семейство целочисленных сдвигов, которое, как ДПФ и всплески, сочетает в себе преимущества ортогональных рядов и интерполяции. На практике это позволит работать с цифровыми сигналами, не прибегая к приближенному расчету интегралов. При этом наличие явных аналитических соотношений в перспективе существенно облегчит разработку и оптимизацию алгоритмов разложения. Еще одним преимуществом полученной системы сдвигов является то, что она строится на основе функции Гаусса. Это отличает ее от многих разновидностей всплесков, физическая интерпретация которых довольно затруд-

нительна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maz'ya, V. Approximate approximations / V. Maz'ya, G. Schmidt. — New York : AMS, Mathematical Surveys and Monographs, 2007. — V. 141. — 350 p.
2. Schlumprecht, Th. On the sampling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian / Th. Schlumprecht, N. Sivakumar // Journal of Approximation Theory. — 2009. — V. 151, № 1. — P. 128–153.
3. Christensen, O. An introduction to frames and Riesz bases / O. Christensen. — Basel : Birkhäuser/Springer, 2016. — 704 p.
4. Уиттекер, Э. Т. Курс современного анализа: Ч. 2. Трансцендентные функции / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. — М. : Физматлит, 1963. — 515 с.
5. NIST handbook of mathematical functions / F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark (Eds.). — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 951 p.
6. Новиков, И. Я. Теория всплесков / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. — М. : Физматлит, 2005. — 616 с.
7. Чуи, Ч. Введение в вейвлеты / Ч. Чуи. — М. : Мир, 2001. — 412 с.
8. Минин, Л. А. О разложении по фреймам Габора, порожденным функцией Гаусса / Л. А. Минин, И. Я. Новиков, С. Н. Ушаков // Математические заметки. — 2016. — Т. 100, № 6. — С. 951–953.
9. Strömberg, J. A modified Franklin system and higher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces / J. Strömberg // Harmonic analysis, Conf. in Honor A. Zygmund (Chicago 1981). — 1983. — V. 2. — P. 475–494.
10. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов / Е. А. Киселев [и др.] // Математические заметки. — 2014. — Т. 96, № 2. — С. 239–250.
11. Baxter, B. J. C. On shifted cardinal interpolation by Gaussians and multiquadrics / B. J. C. Baxter, N. Sivakumar // Journal of Approximation Theory. — 1996. — V. 87, № 1. — P. 36–59.
12. Киселев, Е. А. Предельные свойства систем целочисленных сдвигов и функций, порождающих жесткие фреймы Габора / Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков // Математические заметки. — 2019. — Т. 106, № 1. — P. 62–73.
13. Unser, M. Sampling-50 Years After Shannon / M. Unser // Proceedings of the IEEE. — 2000. — V. 88, № 4. — P. 569–587.

REFERENCES

1. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations, New York: AMS, Mathematical Surveys and Monographs, 2007, vol. 141, 350 p.
2. Schlumprecht Th., Sivakumar N. On the sampling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian. Journal of Approximation Theory, 2009, vol. 151, no. 1, pp. 128–153.
3. Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases. Basel: Birkhäuser/Springer, 2016, 704 p.
4. Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis. Part 2: The Transcendental Functions. [Uittekер E.T., Vatson Dzh.N. Kurs sovremennogo Analiza: CH. 2. Transcendentnye funkci]. Moscow, 1963, 515 p.
5. Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. (Eds.) NIST handbook of mathematical functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 951 p.
6. Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.A. Wavelet Theory. [Novikov I.YA., Protasov V.YU., Skopina M.A. Teoriya vspleskov]. Moscow, 2005, 616 p.

7. Chui C.K. An Introduction to Wavelets. [CHui CH. Vvedenie v vejvlety]. Moscow, 2001, 412 p.
8. Minin L.A., Novikov I.Ya., Ushakov S.N. On expansion with respect to Gabor frames generated by the Gaussian function. [Minin L.A., Novikov I.YA., Ushakov S.N. O razlozhenii po frejmam Gabora, porozhdennym funkciej Gaussa]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, no. 6, pp. 951–953.
9. Strömberg J. A modified Franklin system and higher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces. Harmonic analysis, Conf. in Honor A. Zygmund (Chicago 1981), 1983, vol. 2, pp. 475–494.
10. Kiselev E.A. et al. On the Riesz constants for systems of integer translates. [Kiselev E.A. i dr. O konstantah Rissa dlya nekotoryh sistem celochislennyh sdvigo]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2014, vol. 96, no. 2, pp. 239–250.
11. Baxter B.J.C., Sivakumar N. On shifted cardinal interpolation by Gaussians and multiquadrics. *Journal of Approximation Theory*, 1996, vol. 87, no. 1, pp. 36–59.
12. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya. Limit properties of systems of integer translates and functions generating tight Gabor frames. [Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.YA. Predel'nye svoystva sistem celochislennyh sdvigo i funkciy, porozhdayushchih zhestkie frejmy Gabora]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2019, vol. 106, no. 1, pp. 62–73.
13. Unser M. Sampling-50 Years After Shannon. *Proceedings of the IEEE*, 2000, vol. 88, no. 4, pp. 569–587.

Киселев Евгений Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: evg-kisel2006@yandex.ru

Kiselev Evgenii Aleksandrovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Department of Digital Technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: evg-kisel2006@yandex.ru

Минин Леонид Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и информационных технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mininla@mail.ru

Minin Leonid Arcadieievich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Department of Mathematical Physics and Information Technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mininla@mail.ru

Ушаков Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ushakowww@yandex.ru

Ushakov Sergei Nikolaevich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Department of Functional Analysis and Operator Equations, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: ushakowww@yandex.ru