

КРАЕВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

О. Ю. Данилова

Воронежский институт МВД России

Поступила в редакцию 21.01.2022 г.

Аннотация. Рассмотрено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, решения которого определяют некоторые состояния упругих систем и фазовые состояния в теории кристаллов. От решений данного уравнения переходят к рассмотрению экстремалей функционала. Задача нахождения экстремалей функционала сводится к поиску критических точек главной части ключевой функции, полученной по схеме конечномерной редукции. Наложение дополнительных ограничений на искомую функцию в виде интегральных неравенств приводит к появлению краевых особенностей. Описаны все возникающие для ключевой функции бифуркационные расклады. При этом выявлены новые бифуркационные эффекты, которые появляются только при наличии края.

Ключевые слова: схема конечномерной редукции Ляпунова–Шмидта; функционал, экстремаль, ключевая функция; краевые особенности, критические точки, *bif*-расклад.

BOUNDARY FEATURES FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER

O. Yu. Danilova

Abstract. A nonlinear ordinary differential equation of the fourth order is considered, the solutions of which determine some states of elastic systems and phase states in the theory of crystals. From the solutions of this equation, we proceed to the consideration of the extremals of the functional. The problem of finding the extremals of the functional is reduced to finding the critical points of the main part of the key function obtained by the finite-dimensional reduction scheme. The imposition of additional restrictions on the considered function in the form of integral inequalities leads to the appearance of boundary features. All bif-decompositions arising for the key function are described. New bifurcation effects are found, which occur only in the presence of an edge.

Keywords: scheme of finite-dimensional Lyapunov – Schmidt reduction; functional, extremal, key function; boundary features, critical points, *bif*-decomposition.

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, решения которого описывают некоторые упругие системы и фазовые состояния в теории кристаллов [1, 2]. Большое количество фазовых переходов в сегнетоэлектрических кристаллах происходят вследствие охлаждения кристалла и при разрушении или понижении первоначальных симметрий [3, 4]. Рассматривается случай двухмодового вырождения и наложение интегрального ограничения на решение дифференциального уравнения. В данной

работе применяется метод, в соответствии с которым фазовые состояния кристаллов соответствуют точкам локального минимума функционала полной энергии V . Применяя конечномерную схему редукции Ляпунова—Шмидта [5, 6], от изучения экстремалей функционала V переходят к исследованию особых точек ключевой функции W , зависящей от двух переменных. При этом главная часть исследуемой ключевой функции W имеет вид двумерной сборки, четной по каждой переменной. Наложение ограничения приводит к появлению краевых особых точек [7] и к исследованию функционала, а следовательно, и ключевой функции в окрестности особой точки, лежащей на крае.

БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОТСУТСТВИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Пусть дано нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} + \alpha p + p^3 = 0, \quad (1)$$

в котором p — функция, определенная на отрезке $[0, \pi]$, и наложены краевые условия

$$p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(\pi) = \frac{d^2 p}{dx^2}(\pi) = 0. \quad (2)$$

Решения уравнения моделируют некоторые упругие системы и фазовые состояния кристаллов [8].

От задачи нахождения решений для дифференциального уравнения переходят к исследованию экстремалей функционала $V(p, \kappa, \alpha) \rightarrow \text{extr}$, где

$$V(p, \kappa, \alpha) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \alpha p^2 \right) + \frac{p^4}{4} \right) dx. \quad (3)$$

Функционал V рассматривается на пространстве E функций класса C^4 , заданных на отрезке $[0, \pi]$ и для которых выполняются краевые условия (2). Для функционала (3) уравнение (1) является уравнением Эйлера—Пуассона нахождения экстремалей, предполагается $\alpha > 0$. Действительно

$$F(x, p, p', p'') = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \alpha p^2 \right) + \frac{p^4}{4},$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \alpha p + p^3, \quad \frac{\partial F}{\partial p'} = \kappa p', \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p'} = p'', \quad \frac{\partial F}{\partial p''} = p'', \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p''} = p''', \quad \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial p''} = p^{(IV)}.$$

Подставляя в уравнение Эйлера—Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial p''} = 0,$$

получаем

$$\alpha p + p^3 - \left(-\kappa \frac{d^2}{dx^2} \right) + \frac{d^4}{dx^4} = 0$$

или исходное уравнение (1).

Локализуем управляющие параметры $\alpha = \alpha_1 + \delta_1, \kappa = \kappa_1 + \delta_2$ и при помощи редукции Ляпунова—Шмидта [5, 6] перейдем от функционала V к ключевой функции W , зависящей от двух переменных

$$W(\xi, \delta) = \inf_{p: \langle p, e_1 \rangle = \xi_1, \langle p, e_2 \rangle = \xi_2} V(p, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (4)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \delta = (\delta_1, \delta_2).$$

Здесь $\langle p, e \rangle = \int_0^\pi p(x)e(x) dx$, $e_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$, $e_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x)$ — моды бифуркации. Они образуют ортогональную систему функций, то есть

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \int_0^\pi e_1^2 dx = \int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \right)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{\pi} \left(x \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \sin(2x) \Big|_0^\pi \right) = 1,$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle = \int_0^\pi e_2^2 dx = \int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \right)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos(4x)}{2} dx = 1,$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \int_0^\pi e_1 e_2 dx = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(-x) - \cos(3x)}{2} dx = 0.$$

Функционал (3) четен относительно p и инвариантен относительно двух инволюций J_1, J_2 :

$$J_1(p)(x) = p(\pi - x), J_2(p)(x) = -p(\pi - x), J_1 = -J_2,$$

$$V(J_1(p)(x)) \equiv V(J_2(p)(x)) \equiv V(p).$$

Для инволюций J_1, J_2 выполняются равенства

$$J_1(e_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\pi - x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x = e_1, J_2(e_1) = -e_1,$$

$$J_1(e_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2(\pi - x)) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) = e_2, J_2(e_2) = e_2.$$

Следовательно, ключевая функция W обладает симметрией прямоугольника

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2).$$

По свойствам ключевой функции W можно судить о свойствах функционала V , так как ключевая функция наследует все свойства исходного функционала.

Ключевая функция W может быть записана в следующем виде

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(|\delta|),$$

$U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — аппроксимация Ритца для функционала V , построенная по модам бифуркации e_1, e_2 .

Имеем

$$p = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, p' = \xi_1 e_1' + \xi_2 e_2' = \xi_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x + \xi_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2 \cos(2x),$$

$$p'' = \xi_1 e_1'' + \xi_2 e_2'' = -\xi_1 e_1 - 4\xi_2 e_2, p^2 = (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2)^2 = \xi_1^2 e_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 e_1 e_2 + \xi_2^2 e_2^2,$$

$$p^4 = (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2)^4 = \xi_1^4 e_1^4 + 6\xi_1^2 \xi_2^2 e_1^2 e_2^2 + \xi_2^4 e_2^4 + 4\xi_1^3 \xi_2 e_1^3 e_2 + 4\xi_1 \xi_2^3 e_1 e_2^3,$$

$$(p')^2 = (\xi_1 e'_1 + \xi_2 e'_2)^2 = \frac{2}{\pi} (\xi_1^2 \cos^2 x + 4\xi_1 \xi_2 \cos x \cos(2x) + 4\xi_2^2 \cos^2(2x)),$$

$$(p'')^2 = (\xi_1 e''_1 + \xi_2 e''_2)^2 = (-\xi_1 e_1 - 4\xi_2 e_2)^2 = \xi_1^2 e_1^2 + 8\xi_1 \xi_2 e_1 e_2 + 16\xi_2^2 e_2^2.$$

Для ключевой функции (4) получаем следующее асимптотическое представление

$$W(\xi, \delta) = \frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (A\xi_1^4 + 2B\xi_1^2 \xi_2^2 + C\xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(|\delta|), \quad (5)$$

в котором

$$\lambda_1 = \delta_1 - \delta_2, \lambda_2 = \delta_1 - 4\delta_2$$

$$A = \int_0^\pi e_1^4 dx = \int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \right)^4 dx = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 dx = \frac{3}{2\pi},$$

$$B = 3 \int_0^\pi e_1^2 e_2^2 dx = 3 \int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \right)^2 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \right)^2 dx = \frac{3}{\pi},$$

$$C = \int_0^\pi e_2^4 dx = \int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \right)^4 dx = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos(4x)}{2} \right)^2 dx = \frac{3}{2\pi}.$$

Разделив функцию (5) на множитель $\frac{3}{2\pi}$, получим функцию

$$\tilde{W}(\xi, \delta) = \tilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(|\delta|),$$

главная часть которой имеет вид

$$\tilde{U}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{2} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4). \quad (6)$$

Таким образом, главная часть $\tilde{U}(\xi, \delta)$ ключевой функции является четной функцией по каждой переменной и имеет вид возмущенной двумерной сборкой, в которой коэффициент двойного отношения больше двух. Функция $\tilde{U}$ полностью описывает все бифуркационные эффекты, возникающие для ключевой функции $\tilde{W}$.

Вся плоскость может быть разбита с помощью бифуркационного множества Σ функции $\tilde{U}$ на участки (компоненты связности), в каждом из которых различный набор бифурцирующих критических точек. Такие наборы будем описывать при помощи тройки целых чисел (p, q, r) , здесь соответственно p — количество минимумов, q — седел, r — максимумов. Указанную тройку целых чисел назовем *bif*-раскладом.

Для ключевой функции описаны все критические точки, появляющиеся в данном случае. Могут иметь место только четыре варианта *bif*-раскладов [10]: 1) один минимум; 2) два минимума и одно седло; 3) два минимума, два седла и один максимум; 4) четыре минимума, четыре седла и один максимум. Таким образом, появляются только следующие *bif*-расклады: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$.

БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЯ

Пусть на функцию p наложено следующее интегральное ограничение

$$\langle p, \omega \rangle = \int_0^\pi p(x) \omega(x) dx \geq 0. \quad (7)$$

От задачи $V(p, \kappa, \alpha) \longrightarrow extr, p \in E$, нахождения экстремалей функционала V при наличии условия (7) перейдем по конечномерной схеме редукции Ляпунова — Шмидта к поиску критических точек ключевой функции $\widetilde{W}(\xi, \delta) \longrightarrow extr, \xi = (\xi_1, \xi_2), \xi_1 \geq 0$. Анализ ключевой функции сводится к анализу ее главной части. Она будет иметь вид [9], эквивалентный функции (6), и на нее будет наложено ограничение $\xi_1 \geq 0$. Условие $\xi_1 \geq 0$ показывает, что в данном случае появляются критические токи, лежащие на крае области, то есть краевые особенности.

При наличии края критические точки удобно описывать при помощи матрицы *bif*-раскладов

$$Bif = \begin{pmatrix} p & q & r \\ P & Q & R \end{pmatrix}.$$

Здесь p, q, r — число краевых минимумов, седел, максимумов; P, Q, R — количество минимумов, седел, максимумов, лежащих внутри рассматриваемой области.

В этом случае появляются только шесть *bif*-раскладов [10], описываемых следующими матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство базируется на рассмотрении компонент связности и изучении характеристик критических точек для каждой компоненты связности рассматриваемой области.

Таким образом, видим, что максимально возможное количество критических точек — шесть, при этом на крае возможно появление максимально только трех особенностей. На крае может существовать либо минимум, либо седло, максимума на крае нет; невозможно сосуществование на крае трех разнотипных критических точек, возможно только появление двух типов краевых особенностей.

Наложим на функцию p интегральное ограничение следующего вида

$$\langle p, \omega \rangle = \int_0^\pi p(x) \omega(x) dx \geq c. \quad (8)$$

Тогда переходя от задачи $V(p, \kappa, \alpha) \longrightarrow extr, p \in E$ с условием (8), к задаче $\widetilde{W}(\xi, \delta) \longrightarrow extr, \xi = (\xi_1, \xi_2)$ при помощи схемы конечномерной редукции Ляпунова — Шмидта, получаем задачу отыскания критических точек для ключевой функции $\widetilde{W}(\xi, \delta)$, при условии $\xi_1 \geq c$. При помощи эквивалентных преобразований главная часть ключевой функции приводится к виду (6), вследствие чего будет иметь вид возмущенной двумерной сборки, которая является четной по каждой переменной.

При вычислении критических точек и определении их типа используются следующие правила: если линия уровня ключевой функции W касается в критической точке границы области снаружи, а $grad W$ направлен внутрь рассматриваемой области, то критическая точка является краевой точкой минимума; если $grad W$ направлен наружу, и линия уровня ключевой функции W касается в критической точке границы области снаружи, то критическая точка — точка краевого максимума, в краевой седловой точке линия уровня касается области изнутри. Определение типов критических точек, лежащих внутри области, происходит по обычным правилам.

Для рассматриваемого случая возможно появление только следующих восемнадцати *bif*-раскладов [10], описываемых следующими матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для данного случая имеем один *bif*-расклад с одной критической точкой, один — с двумя критическими точками, два расклада с тремя критическими точками, три — с четырьмя критическими точками, один — с пятью, три — с шестью, два — с семью, один расклад имеет восемь критических точек, два расклада с девятью критическими точками, один — с десятью, один *bif*-расклад — с максимально возможным количеством критических точек одиннадцатью, из которых три лежат на крае. При этом максимальное число краевых особенностей равно трем, и возникает возможность существования на крае трех седел одновременно.

Пусть имеется следующее интегральное ограничение

$$\langle p, \omega \rangle = \int_0^\pi p(x)\omega(x)dx \geq 0, \quad (9)$$

в котором $\omega = ae_1 + ae_2$.

Тогда от задачи $V(p, \kappa, \alpha) \rightarrow \text{extr}, p \in E$ с условием (9) при помощи схемы конечномерной редукции Ляпунова – Шмидта переходим к задаче $\widetilde{W}(\xi, \delta) \rightarrow \text{extr}, \xi = (\xi_1, \xi_2)$, а интегральное ограничение приводит к возникновению условия $a\xi_1 + b\xi_2 \geq 0$. Главную часть ключевой функции можно привести к виду, эквивалентному (6), и при наличии условия $a\xi_1 + b\xi_2 \geq 0$.

Тогда все возможные *bif*-расклады описываются следующими шестью матрицами [10]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае имеется один *bif*-расклад с одной критической точкой, один — с двумя критическими точками, один — с четырьмя критическими точками, один — с пятью критическими точками, один — с шестью критическими точками, один *bif*-расклад имеет семь критических точек, из которых три лежат на крае (один минимум, одно седло и один максимум).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, наложение различных интегральных ограничений приводит к появлению краевых особенностей. Для ключевой функции описаны в виде матриц все возникающие *bif*-расклады. При этом наличие края приводят к возникновению новых бифуркационных эффектов, а именно: появление на крае трех седел одновременно; сосуществование одного краевого минимума, одного краевого седла и одного краевого максимума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бардин, Б. С. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании / Б. С. Бардин, С. Д. Фурта // Актуальные проблемы классической и небесной механики. — М. : Эльф, 1998. — С. 13–22.
2. Сидоркин, А. С. Доменная структура в сегнетоэлектриках и родственных материалах / А. С. Сидоркин. — М. : Физматлит, 2000. — 240 с.
3. Изюмов, Ю. А. Фазовые переходы и симметрии кристаллов / Ю. А. Изюмов, В. И. Сыромятников. — М. : Наука, 1984. — 247 с.
4. Струков, Б. А. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах / Б. А. Струков, А. П. Леванюк. — М. : Физматлит, 1995. — 301 с.

5. Сапронов, Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах / Ю. И. Сапронов // Успехи матем. наук, 1996. — Т. 51, вып. 1. — С. 101–132.
6. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — Т. 12(2004). — М., 2004. — С. 3–140.
7. Арнольд, В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют / В. И. Арнольд // Успехи матем. наук. — 1978. — Т. 33, вып. 5(203). — С. 91–105.
8. Даринский, Б. М. Топологический подход к классификациям фаз кристаллических сегнетоэлектриков / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов. — В кн. : Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж : ВГУ, 2000. — С. 41–57.
9. Царев, С. Л. Глобальное сравнение эквивариантных конечномерных редукций для гладкого G -инвариантного функционала / С. Л. Царев // Тр. матем. фак-та (новая серия). — 1998. — Вып. 3. — С. 73–76.
10. Данилова, О. Ю. Бифуркации экстремалей симметричных фредгольмовых функционалов в краевых особых точках / О. Ю. Данилова // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Воронеж, 2002. — 125 с.
11. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Е. А. Шайна // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 207–215.
12. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 3. — С. 93–100.
13. Шабров, С. А. Об одной спектральной задаче четвертого порядка с производными Радона–Никодима и со спектральным параметром / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 163–167.

REFERENCES

1. Bardin B.S., Furta S.D. Local theory of the existence of periodic wave motions of an infinite beam on a nonlinearly elastic base. [Bardin B.S., Furta S.D. Lokal'naya teoriya sushchestvovaniya periodicheskikh volnovykh dvizhenij beskonechnoj balki na nelinejno uprugom osnovanii]. Actual problems of classical and celestial mechanics, Moscow, 1998, pp. 13–22.
2. Sidorkin A.S. Domain structure in ferroelectrics and related materials. [Sidorkin A.S. Domennaya struktura v segnetoelektrikah i rodstvennykh materialah]. Moscow: Fizmatlit, 2000, 240 p.
3. Izyumov Yu.A., Syromyatnikov V.I. Phase transitions and crystal symmetries. [Izyumov YU.A., Syromyatnikov V.I. Fazovye perekhody i simmetrii kristallov]. Moscow: Nauka, 1984, 247 p.
4. Strukov B.A., Levanyuk A.P. Physical bases of ferroelectric phenomena in crystals. [Strukov B.A., Levanyuk A.P. Fizicheskie osnovy segnetoelektricheskikh yavlenij v kristallah]. Moscow: Fizmatlit, 1995, 301 p.
5. Saponov Yu.I. Finite-dimensional reductions in smooth extremal problems. [Saponov YU.I. Konechnomernye redukcii v gladkih ekstremal'nyh zadachah]. *Uspehi matematicheskix nauk* — *Russian Mathematical Surveys*, 1996, vol. 51, iss. 1, pp. 101–132.
6. Darinsky B.M., Saponov Yu.I., Tsarev S.L. Bifurcations of extremals of Fredholm functionals. [Darinskij B.M., Saponov YU.I., Carev S.L. Bifurkacii ekstremalej fredgol'movykh funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* — *Modern Mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.

7. Arnold V.I. Critical points of functions on a manifold with an edge, simple Lie groups B_k, C_k, F_4 and singularities of evolute. [Arnol'd V.I. Kriticheskie točki funkciy na mnogoobrazii s kraem, prostye gruppy Li B_k, C_k, F_4 i osobennosti evolyut]. *Uspehi matematicheskix nauk* — *Russian Mathematical Surveys*, 1978, vol. 33, iss. 5(203), pp. 91–105.

8. Darinsky B.M., Sapronov Yu.I. Topological approach to phase classifications of crystalline ferroelectrics. [Darinskij B.M., Sapronov YU.I. Topologicheskij podhod k klassifikaciyam faz kristallicheskih segnetoelektrikov]. In: *Topological methods of nonlinear analysis*. Voronezh, VSU, 2000, pp. 41–57.

9. Tsarev S.L. Global comparison of equivariant finite-dimensional reductions for a smooth G -invariant functional. [Carev S.L. Global'noe sravnenie ekvivariantnyh konechnomernyh redukcij dlya gladkogo G -invariantnogo funkcionala]. *Tr. matem. fak-ta (novaya seriya)* — *Tr. math. fact-ta (new series)*, 1998, iss. 3, pp. 73–76.

10. Danilova O.Yu. Bifurcations of extremals of symmetric Fredholm functionals at edge singular points. [Danilova O.YU. Bifurkacii ekstremalej simmetrichnyh fredgol'movyh funkcionalov v kraevykh osobyykh tochkakh]. Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences. Voronezh, 2002, 125 p.

11. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Shayna E.A. About the velocity of increase of eigenvalue of the fourth order spectral problem with derivative on the measure. [SHabrov S.A., Bugakova N.I., SHajna E.A. O skorosti rosta sobstvennykh znachenij odnoj spektral'noj zadachi chetvertogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* — *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 207–215.

12. Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davidova M.B. On the number of solutions of the nonlinear boundary problem of the fourth order with derivatives by measure. [Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davydova M.B. O chisle reshenij nelinejnoj granichnoj zadachi chetvertogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* — *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 93–100.

13. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilin O.M. On one spectral problem of the fourth order with Radon–Nikodim derivatives and with spectral parameter at the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M. Ob odnoy spektral'noj zadache chetvertogo poryadka s proizvodnymi Radona–Nikodima i so spektral'nyim parametrom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* — *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 163–167.

Данилова Ольга Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России, Воронеж, Россия
E-mail: danilova_olga@hotmail.com

Danilova Olga Yur'evna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant professor of chair of Mathematics and Systems Modeling, Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia, Voronezh, Russia
E-mail: danilova_olga@hotmail.com