УДК 511

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ДЛЯ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИИ В МЕТОДЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 03.09.2022 г.

Аннотация. В работе исследованы веса Бухштаба, анонсированные им в 1985 г. Получена оценка сверху для весовой функции с этими весами. Веса Бухштаба (1985 г.) позволяют получить преимущества в выборе параметров в методе весового решета, активно разрабатываемого в современной теории чисел.

Ключевые слова: число, веса, последовательность, оценка сверху.

ABOUT AN UPPER ESTIMATION FOR THE WEIGHT FUNCTION IN THE METHOD OF WEIGHTS SIEVE

E. V. Vakhitova, S. R. Vakhitova

Abstract. In this paper, the weights of the Buchstab, announced by him in 1985, are investigated. An upper estimate is obtained for the weight function with these weights. The weights of the Buchstab (1985) make it possible to obtain advantages in the choice of parameters in the weight sieve method, which is actively being developed in modern number theory.

Keywords: number, sieve, sequence, upper estimation.

ВВЕДЕНИЕ

Многие теоретико-числовые задачи успешно можно решать с помощью метода весового решета. При этом в методе весового решета можно выбрать веса по-разному. Веса Бухштаба, анонсированные в 1985 г., позволяют получить преимущества в выборе параметров в методе весового решета в сравнении с весами Бухштаба (1967 г.), их непрерывной формой, полученной Лабордэ (1979 г.), частным случаем которых являются веса Рихерта (1969 г.).

В настоящей работе получена оценка сверху для весовой функции с весами Бухштаба, анонсированными в 1985 г. При этом приведено подробное доказательство полученного неравенства.

Введем обозначения. A — конечная последовательность целых чисел a_n, $n \in \mathbf{N}$, $P(z)$ – произведение положительных простых чисел $p < z$, $z \in \mathbf{R}$, $z > 1$,

$$a,b,c,g' \in \mathbf{R},\ 1 \leqslant b \leqslant c \leqslant a,\ 2c - b - 1 > 0,\ 1 \leqslant g' \leqslant a - 1,\ d \in \mathbf{N},\ d > 1,$$

$$S(A_d; z) := |\{a_n \in A | a_n \equiv 0 \pmod d, (a_n, P(z)) = 1\}|.$$

В методе весового решета выберем веса Бухштаба, анонсированные в 1985 г. [1]. Приведем весовую функцию в общем виде, обозначив ее через $T(X)$, где $X \in \mathbf{R}$, $X > 1$.

$$T(X) := \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) + \frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b) \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) +$$

$$+ \sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right) S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) + a \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1+a(g'-1)}{ag'^2}} \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{1-g'z}} S(A_p; X^z)\right) dz +$$

$$+ \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} \left(\frac{b+1}{2} - a\frac{\ln p}{\ln X}\right) S\left(A_p; \left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{g'} \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leqslant p < X^{\frac{a-g'}{a}}} \left(bg' - a + g' - a(g'-1)\frac{\ln p}{\ln X}\right) \times S\left(A_p; \left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}\right)\Bigg\}. \qquad (1)$$

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Теорема. *Пусть $T(X)$ определено равенством (1), $a,b,c,g' \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant b \leqslant c \leqslant a$, $2c-b-1 > 0$, $g'+1 \leqslant a \leqslant 2g'+2$, $a - c \leqslant g'$. Тогда имеет место следующая оценка сверху для $T(X)$:*

$$T(X) \leqslant \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p | a_n \\ p < X^{\frac{c}{a}}}} W(p), \qquad (2)$$

где

$$W(p) := \frac{1}{2c-b-1}\left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right). \qquad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Преобразуем отдельно слагаемые суммы $T(X)$, определенной равенством (1). При этом будем применять определение функции $S(A_d; z)$.

$$1)\ Y_1(X) := \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}} \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod p \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} 1 = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p | a_n \\ X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}}} \frac{1}{2} =$$

$$= \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p | a_n} W_1(p),$$

где

$$W_1(p) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \text{ *если* } X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}, \\ 0, \text{ *в противном случае.*} \end{cases}$$

$$2)\ Y_2(X) := \frac{c-b}{2c-b-1} \sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) =$$

$$= \frac{c-b}{2c-b-1} \sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}} \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod p \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p \mid a_n \\ X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}}} \frac{c-b}{2c-b-1} = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p \mid a_n} W_2(p),$$

где

$$W_2(p) := \begin{cases} \dfrac{c-b}{2c-b-1}, \textit{ если } X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}, \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$3)\ Y_3(X) := \frac{1}{2c-b-1} \sum_{X^{1-\frac{g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X} \right) S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) =$$

$$= \frac{1}{2c-b-1} \sum_{X^{1-\frac{g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X} \right) \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod p \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p \mid a_n \\ X^{1-\frac{g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}}} \frac{1}{2c-b-1} \left(c - a\frac{\ln p}{\ln X} \right) = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p \mid a_n} W_3(p),$$

где

$$W_3(p) := \begin{cases} \dfrac{1}{2c-b-1} \left(c - a\dfrac{\ln p}{\ln X} \right), \textit{ если } X^{1-\frac{g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}, \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

$$4)\ Y_4(X) := \frac{a}{2c-b-1} \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} \left(\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-g'z}} S(A_p; X^z) \right) dz =$$

$$= \frac{a}{2c-b-1} \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} \left(\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-g'z}} \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod p \\ p_n \geqslant X^z}} 1 \right) dz =$$

$$= \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} \frac{a}{2c-b-1} \left(\sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-g'z}} 1 \right) dz,$$

так как $X^z \geqslant X^{\frac{1}{a}}$.

Представим теперь сумму, содержащуюся под знаком интеграла, в виде разности двух сумм и продолжим далее преобразования.

$$Y_4(X) = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} \left(\sum_{\substack{p|a_n \\ p_n \geqslant X^z \\ p<X^{1-g'z}}} \frac{a}{2c-b-1} - \sum_{\substack{p|a_n \\ p_n \ geX^z \\ p<X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}}} \frac{a}{2c-b-1} \right) dz =$$

$$= \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \left(\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} \left(\sum_{\substack{p|a_n \\ p_n \geqslant X^z \\ p<X^{1-g'z}}} \frac{a}{2c-b-1} \right) dz - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}} \left(\sum_{\substack{p|a_n \\ p_n \geqslant X^z \\ p<X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}}} \frac{a}{2c-b-1} \right) dz \right).$$

Для первого интеграла имеем: $p_n \geqslant X^z$, $p < X^{1-g'z}$, отсюда
$z \leqslant \dfrac{\ln p_n}{\ln X}$ и $1 - g'z > \dfrac{\ln p}{\ln X}$, поэтому получим:

$$z \leqslant \min\left(\frac{\ln p_n}{\ln X};\ \frac{1}{g'}\left(1 - \frac{\ln p}{\ln X}\right)\right).$$

Кроме того, если $z \geqslant \dfrac{1}{a}$, то из неравенства $p < X^{1-g'z}$ следует, что $p \leqslant X^{1-\frac{g'}{a}}$.

Покажем, что из условия

$$z \leqslant \min\left(\frac{\ln p_n}{\ln X};\ \frac{1}{g'}\left(1 - \frac{\ln p}{\ln X}\right)\right)$$

следует, что $z \leqslant \dfrac{(g'-1)a+2}{ag'^2}$ при $a \leqslant 2g'+2$. Действительно,

а) если $\min\left(\dfrac{\ln p_n}{\ln X};\ \dfrac{1}{g'}\left(1 - \dfrac{\ln p}{\ln X}\right)\right) = \dfrac{\ln p_n}{\ln X}$, то

$$\frac{\ln p_n}{\ln X} \leqslant \frac{1}{g'}\left(1 - \frac{\ln p}{\ln X}\right), \qquad \frac{\ln p_n}{\ln X} + \frac{1}{g'}\frac{\ln p}{\ln X} \leqslant \frac{1}{g'},$$

но $\dfrac{\ln p}{\ln X} \geqslant \dfrac{\ln p_n}{\ln X}$, а, следовательно, $\dfrac{g'+1}{g'}\dfrac{\ln p_n}{\ln X} \leqslant \dfrac{1}{g'}\dfrac{\ln p}{\ln X} + \dfrac{\ln p_n}{\ln X} \leqslant \dfrac{1}{g'}$, тогда при $a \leqslant 2g'+2$:

$$z \leqslant \frac{\ln p_n}{\ln X} \leqslant \frac{1}{g'+1} \leqslant \frac{(g'-1)a+2}{ag'^2};$$

б) если $\min\left(\dfrac{\ln p_n}{\ln X};\ \dfrac{1}{g'}\left(1 - \dfrac{\ln p}{\ln X}\right)\right) = \dfrac{1}{g'}\left(1 - \dfrac{\ln p}{\ln X}\right)$, то получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{g'}\left(1 - \frac{\ln p}{\ln X}\right) \leqslant \frac{\ln p_n}{\ln X},$$

отсюда $\dfrac{1}{g'} \leqslant \dfrac{\ln p_n}{\ln X} + \dfrac{1}{g'}\dfrac{\ln p}{\ln X}$, следовательно, $\dfrac{1}{g'} \leqslant \dfrac{g'+1}{g'}\dfrac{\ln p}{\ln X}$,
то есть $\dfrac{\ln p}{\ln X} \geqslant \dfrac{1}{g'+1}$, тогда при $a \leqslant 2g'+2$

$$z \leqslant \frac{1}{g'}\left(1 - \frac{\ln p}{\ln X}\right) \leqslant \frac{1}{g'} - \frac{1}{g}\cdot\frac{1}{g+1} = \frac{1}{g'+1} \leqslant \frac{(g'-1)a+2}{ag'^2}.$$

Таким образом, для $Y_4(X)$ получим:

$$Y_4(X) \leqslant \sum_{\substack{a_n\in A\\ p_n\geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \left(\sum_{\substack{p<X^{1-\frac{g'}{a}}\\ p|a_n}} \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\min(\frac{\ln p_n}{\ln X};\, \frac{1}{g'}(1-\frac{\ln p}{\ln X}))} \frac{a}{2c-b-1}dz - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{p<X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}\\ p|a_n}} \int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{\ln p_n}{\ln X}} \frac{a}{2c-b-1}dz \right) =$$

$$= \sum_{\substack{a_n\in A\\ p_n\geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \left(\sum_{\substack{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{1-\frac{g'}{a}}\\ p|a_n}} \frac{a}{2c-b-1}\left(\min\left(\frac{\ln p_n}{\ln X};\ \frac{1}{g'}\left(1-\frac{\ln p}{\ln X}\right)\right) - \frac{1}{a}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}\\ p|a_n}} \frac{a}{2c-b-1}\left(\frac{\ln p_n}{\ln X} - \frac{1}{a}\right)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{a_n\in A\\ p_n\geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \left(\sum_{\substack{p|a_n\\ X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{1-\frac{g'}{a}}}} 1 \times \right.$$

$$\times \min\left(\frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{a\ln p_n}{\ln X} - 1\right); \frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{a}{g'} - 1 - \frac{a}{g'}\frac{\ln p}{\ln X}\right)\right) -$$

$$\left. - \sum_{\substack{p|a_n\\ X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}}} \frac{1}{2c-b-1}\left(a\frac{\ln p_n}{\ln X} - 1\right)\right) = \sum_{\substack{a_n\in A\\ p_n\geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p|a_n} W_4(p),$$

где

$$W_4(p) :=$$

$$= \min\left(\frac{1}{2c-b-1}\left(a\frac{\ln p_n}{\ln X} - 1\right); \frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{a}{g'} - 1 - \frac{a}{g'}\frac{\ln p}{\ln X}\right)\right),$$

если $X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}$, $\quad W_4(p) = 0$ *в противном случае.*

5) $$Y_5(X) := \sum_{X^{\frac{1}{a}}\leqslant p<X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}} \frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{b+1}{2} - a\frac{\ln p}{\ln X}\right) S_p\left(A_p; \left(\frac{X}{p}\right)^{1/g'}\right) =$$

$$= \sum_{X^{\frac{1}{g'}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}} \frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{b+1}{2} - a\frac{\ln p}{\ln X}\right) \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod p \\ p_n \geqslant (\frac{X}{p})^{\frac{1}{g'}}}} 1.$$

Если $p|a_n$, $X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}$ и $p_n \geqslant \left(\dfrac{X}{p}\right)^{1/g'}$,
то получим

$$X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \geqslant \left(\frac{X}{p}\right)^{1/g'} > X^{(1-\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a}))\frac{1}{g'}},$$

отсюда $p_n \geqslant X^{\frac{(g'-1)a+1}{ag'^2}}$, а, следовательно, $p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}$ при $g' \leqslant a-1$.

$$Y_5(X) = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p|a_n \\ X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}}} \frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{b+1}{2} - a\frac{\ln p}{\ln X}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p|a_n} W_5(p),$$

где

$$W_5(p) := \begin{cases} \dfrac{1}{2c-b-1}\left(\dfrac{b+1}{2} - a\dfrac{\ln p}{\ln X}\right), \; X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}, \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

6) $Y_6(X) :=$

$$:= \frac{1}{g} \sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}} \frac{g'b - a + g' - (g'-1)a\ln p/(\ln X)}{2c-b-1} \, S(A_p; (\frac{X}{p})^{1/g'}) =$$

$$= \sum_{X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}} \frac{1}{g'(2c-b-1)}\left(g'b - a + g' - (g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X}\right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod p \\ p_n \geqslant (\frac{X}{p})^{\frac{1}{g'}}}} 1.$$

Если $p|a_n$, $X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}$ и $p_n \geqslant \left(\dfrac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}}$,
то получим

$$X^{(1-\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a}))\frac{1}{g'}} \geqslant \left(\frac{X}{p}\right)^{\frac{1}{g'}} > X^{(1-(1-\frac{1}{a}))\frac{1}{g'}},$$

отсюда $p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}$.

$$Y_6(X) = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p|a_n \\ X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}}} \frac{1}{g'(2c-b-1)} \times$$

$$\times \left(g'b - a + g' - (g'-1)a\frac{\ln p}{\ln X}\right) = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p|a_n} W_6(p),$$

где при $s = 1/(2c-b-1)$

$$W_6(p) := s\left(b+1-\frac{a}{g'}\left(1+(g'-1)\frac{\ln p}{\ln X}\right)\right), \textit{если}$$

$$X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}},$$

$W_6(p) := 0$, *в противном случае.*

Таким образом,

$$T(X) = \sum_{i=1}^{6} Y_i(X) \leqslant \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p|a_n} W(p),$$

где

$$W(p) = \sum_{i=1}^{6} W_i(p),\ i \in \mathbf{N}.$$

Так как при $p \geqslant X^{\frac{c}{a}}$ будет $W_i(p) = 0$, $i = 1,...,6$, то тогда $W(p) = 0$, следовательно,

$$T(X) \leqslant \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geqslant X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p|a_n \\ p < X^{\frac{c}{a}}}} W(p).$$

Преобразуем теперь $W(p)$, учитывая, что из условия
$1 \leqslant b \leqslant c \leqslant a$ следует, что при $a-c \leqslant g'$

$$\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{g'}\left(1-\frac{1}{a}\right) \leqslant 1-\frac{g'}{a} \leqslant \frac{c}{a}.$$

1) если $X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})}$, то $W_1(p) = 1/2$, $W_2(p) = W_3(p) = W_4(p) = 0$,

$W_5(p) = \dfrac{1}{2c-b-1}\left(\dfrac{b+1}{2} - a\dfrac{\ln p}{\ln X}\right)$, $\quad W_6(p) = 0$,

следовательно,

$$W(p) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{b+1}{2} - a\frac{\ln p}{\ln X}\right) = \frac{1}{2c-b-1}\left(c - a\frac{\ln p}{\ln X}\right);$$

2) если $X^{\frac{1}{g'}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{g'}{a}}$, то $W_1(p) = 0$, $W_3(p) = 0$, $W_5(p) = 0$,

$$W_2(p) = \frac{1}{2c-b-1}(c-b),\ W_4(p) =$$

$$= \min\left(\frac{1}{2c-b-1}\left(a\frac{\ln p_n}{\ln X} - 1\right); \frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{a}{g'} - 1 - \frac{a}{g'}\frac{\ln p}{\ln X}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{a}{g'} - 1 - \frac{a}{g'}\frac{\ln p}{\ln X}\right),$$

$$W_6(p) = \frac{1}{2c-b-1}\left(b+1-\frac{a}{g'}\left(1+(g'-1)\frac{\ln p}{\ln X}\right)\right),$$

то тогда получим что

$$W(p) = \frac{c-b}{2c-b-1} + \frac{1}{2c-b-1}\left(b+1-\frac{a}{g'}\left(1+(g'-1)\frac{\ln p}{\ln X}\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{2c-b-1}\left(\frac{a}{g'}-1-\frac{a}{g'}\frac{\ln p}{\ln X}\right)=\frac{1}{2c-b-1}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln X}\right);$$

3) если $X^{1-\frac{g'}{a}} \leqslant p < X^{\frac{c}{a}}$, то $W_1(p)=W_2(p)=0$,

$$W_3(p)=\frac{1}{2c-b-1}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln X}\right),$$

$W_4(p)=W_5(p)=W_6(p)=0$, следовательно,

$$W(p)=\frac{1}{2c-b-1}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln X}\right).$$

Таким образом, для $W(p)$ получим равенство (3), а для $T(X)$– неравенство (2).
Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. О методах весового решета можно узнать из работ [2] — [5].

В них исследованы веса Бухштаба, анонсированные в 1985 г. и разработаны 2 метода весового решета: метод весового решета, содержащий решето Сельберга в сочетании с весами Бухштаба (1985 г.) и метод весового решета, содержащий решето Бруна в сочетании с весами Бухштаба (1985 г.) и рассмотрены их приложения.

2. Приложение метода весового решета, содержащего решето Бруна, в сочетании с весами Бухштаба (1985 г.) является технически сложным, так как даже без весов сам метод решета Бруна имеет комбинаторную природу и является технически сложным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб, А. А. Новый тип весового решета / А. А. Бухштаб // Теория чисел и её приложения : тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 22–24.

2. Вахитова, Е. В. О новом типе весового решета Бухштаба / Е. В. Вахитова. — М. : Деп. в ВИНИТИ 26.08.93, N. 2342–В93, 1993. — 34 с. (РЖ Матем. — 1994. — 1А97 Деп).

3. Вахитова, Е. В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа / Е. В. Вахитова // Математические заметки. — 1999. — Т. 66, № 1. — С. 38–49.

4. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения / Е. В. Вахитова. — М. : Изд–во МПГУ "Прометей", 2002. — 268 с.

5. Вахитова, Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения / Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 332 с.

REFERENCES

1. Bukhstab A.A. A new type of weight sieve. [Buhshtab A.A. Novyj tip vesovogo resheta]. Number theory and its applications : tez. dokl. All-Union. conf., Tbilisi, 1985, pp. 22–24.

2. Vakhitova E.V. On a new type of weight sieve of the Buchstab. [Vahitova E.V. O novom tipe vesovogo resheta Buhshtaba]. *Dep. v VINITI 26.08.93, N. 2342-V93, 1993, 34 s (RZH Matem., 1994. — 1A97 Dep) — Dep. in VINITI 26.08.93, No. 2342-B93, 1993, 34 p. (RJ Math., 1994. — 1A97 Dep).*

3. Vakhitova E.V. On a One–Dimensional Selberg Sieve with Bukhstab weights of a new type. [Vahitova E.V. Ob odnomernom reshete Sel'berga s vesami Buhshtaba novogo tipa]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, no. 1.38–49.

4. Vakhitova E.V. Methods of a sieve with weights of the Buchstab and their applications. [Vahitova E.V. Metody resheta s vesami Buhshtaba i ih prilozheniya]. Moscow, 2002, 268 p.

5. Vakhitova E.V., Vakhitova S.R. Methods of a sieve with Buchstab weights and their applications. [Vahitova E.V., Vahitova S.R. Metody resheta s vesami Buhshtaba i ih prilozheniya]. Voronezh: VSU Publishing House, 2014, 332 p.

Вахитова Екатерина Васильевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Ekaterina Vasilevna, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Departament digital technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: algebraist@yandex.ru

Вахитова Светлана Рифовна,
E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Svetlana Rifovna,
E-mail: algebraist@yandex.ru