

# РОБАСТНЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ СИГНАЛОВ НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ НА ФОНЕ СТАЦИОНАРНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ\*

О. В. Черноярков, С. М. Пергаменщиков, А. В. Терехов

*Национальный исследовательский университет "МЭИ";  
Национальный исследовательский Томский государственный университет*

Поступила в редакцию 01.02.2022 г.

**Аннотация.** Представлена методика выбора модели для адаптивной робастной эффективной непараметрической оценки сигнала неизвестной формы, наблюдаемого на фоне белого шума и импульсных помех, описываемых общим негауссовским процессом Леви. На основе предложенного подхода найдена структура и характеристики процедур восстановления сигнала в двух постановках: неасимптотической и асимптотической. Установлены точные неасимптотические оракульные неравенства для квадратичных и робастных рисков, показывающие, что синтезированные процедуры оценки являются оптимальными. Показано, что использование полученных оракульных неравенств позволяет обеспечить асимптотическое (при неограниченном возрастании отношения сигнал/шум) свойство эффективности синтезированных алгоритмов оценки в адаптивной постановке. Проиллюстрировано применение разработанных процедур выбора модели для решения задачи определения числа сигналов в реализации наблюдаемых данных.

**Ключевые слова:** выбор модели, сигнал неизвестной формы, импульсная помеха, неасимптотическое оценивание, квадратичный и робастный риски, оракульное неравенство, эффективная оценка, статистическое моделирование.

## ROBUST AND EFFICIENT ALGORITHMS FOR ESTIMATING SIGNALS OF UNKNOWN SHAPE AGAINST THE BACKGROUND OF STATIONARY AND PULSE RANDOM DISTORTIONS

O. V. Chernoyarov, S. M. Pergamenshchikov, A. V. Terekhov

**Abstract.** An approach for selecting a model for an adaptive, robust and efficient non-parametric estimation of a signal of unknown shape observed against the background of white noise and pulse interference described by the general non-Gaussian Levy process is presented. Based on that, the structure and characteristics of signal recovery procedures are introduced for the cases of non-asymptotic and asymptotic estimates. First, exact non-asymptotic oracle inequalities for quadratic and robust risks are established, proving that the synthesized estimation procedures are optimal. It is then demonstrated that the application of the obtained oracle inequalities makes it possible to also provide an asymptotic (arising with an unlimited increase in the signal-to-noise ratio) quality to the efficiency of the synthesized estimation algorithms when represented in an adaptive form. The efficiency of the developed procedures as the tools for selecting the model for determining the number of signals in the realization of the observed data is finally illustrated.

**Keywords:** model selection, unknown signal, pulse noise, non-asymptotic estimation, quadratic and robust risks, oracle inequality, efficient estimate, statistical simulation.

\* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект FSWF-2020-0022)

© Черноярков О. В., Пергаменщиков С. М., Терехов А. В., 2022

## ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что на интервале времени  $\hat{t} \in [0, T]$  на вход приемного устройства поступает аддитивная смесь полезного сигнала и шума, описываемая математической моделью вида

$$dy_t = s_t dt + \varepsilon d\xi_t, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Здесь  $s_t$  — детерминированный сигнал неизвестной формы,  $\xi_t$  — фоновый шум с интенсивностью  $\varepsilon > 0$ , а  $t = \tilde{t}/T$  — нормированное время ( $t \in [0, 1]$ ). По наблюдаемой реализации (1) необходимо оценить функцию  $s_t$  (восстановить форму полезного сигнала). При этом следует предложить такую процедуру оценивания, которая является оптимальной или хотя бы асимптотически (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) оптимальной в том или ином смысле.

В простейшем случае, когда флуктуации  $\xi_t$  представляют собой винеровский случайный процесс, выражение (1) описывает прием сигнала  $s_t$  на фоне гауссовского белого шума, аппроксимирующего собственные шумы радиоэлектронной системы. При такой модели наблюдений для восстановления формы сигнала можно использовать способы, описанные в [1–3 и др.]. Однако достаточно часто помимо собственных шумов приемного устройства полезный сигнал достаточно часто искажается импульсными помехами, причиной которых могут быть внешние непреднамеренные (атмосферные) шумы, преднамеренные импульсные шумы, ошибки демодуляции и декодирования двоичных информационных символов и т. д. [4]. Адекватной моделью импульсных помех в ряде практических приложений может служить случайный поток.

Одной из первых моделей случайных потоков являются пуассоновские процессы. Так, в [5] рассмотрена задача обнаружения детерминированных сигналов на фоне белого шума и составного пуассоновского случайного процесса. В [6, 7] результаты [5] обобщены на случай параметрических регрессионных моделей, а в [8, 9] — на случай непараметрического оценивания сигналов неизвестной формы. Однако составной пуассоновский процесс является приемлемой моделью лишь импульсных помех со скважностью, существенно меньшей 1 [10]. В то же время во многих практических приложениях ограничения на частоту следования флуктуационных импульсов отсутствуют, что не позволяет аппроксимировать реальную помеховую обстановку аддитивной смесью белого шума и составного пуассоновского процесса. Для преодоления указанной трудности в качестве модели импульсных помех можно использовать общие негауссовские процессы Леви, адекватно описывающие широкий класс нестационарных случайных искажений [11].

В данной работе рассмотрена задача непараметрического оценивания (восстановления формы) сигнала  $s_t$ , наблюдаемого на фоне белого шума и процесса Леви, когда регулярность функции, описывающей его форму, априори неизвестна. При этом предполагается, что распределение  $Q$  аддитивных искажений  $\xi_t$  также неизвестно и принадлежит к некоторому семейству распределений  $Q_\varepsilon^*$ , определенному ниже.

При синтезе алгоритма оценивания воспользуемся робастным подходом, предложенным в [8, 9, 12]. С этой целью определим робастный риск как

$$\mathfrak{R}_\varepsilon^*(\hat{s}_\varepsilon, s_t) = \sup_{Q \in Q_\varepsilon^*} \mathfrak{R}_Q(\hat{s}_\varepsilon, s_t), \quad (2)$$

где  $\hat{s}_\varepsilon$  — некоторая оценка (измеримая функция, получаемая на основе реализации  $y_t$  (1)) сигнала  $s_t$ ,

$$\mathfrak{R}_Q(\hat{s}_\varepsilon, s) = E_{Q,s} \|\hat{s}_\varepsilon - s\|^2 \quad (3)$$

— квадратичный риск,  $\|f_t\|^2 = \int_0^1 f_t^2 dt$  — норма функции  $f_t$  на интервале  $[0, 1]$ ,  $E_{Q,s}$  — операция усреднения по всем возможным реализациям (1).

При построении адаптивных решений для непараметрической оценки сигнала неизвестной формы  $s_t$  (выбора модели) необходимо найти неасимптотические или линейные неравенства, которые дают неасимптотическую верхнюю границу квадратичных рисков (3), включая минимальный риск для выбранного семейства оценок. Подобные неравенства получены, например, в [13] для негауссовских регрессионных моделей в дискретном времени и в [14] для общих регрессионных семимартинговых моделей в непрерывном времени.

В первых работах [15, 16], посвященных синтезу процедур выбора модели, рассмотрены задачи оценивания сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности. Впоследствии, используя метод оракульных неравенств, предложены процедуры выбора модели в задачах непараметрического оценивания для гауссовских [17] и ряда негауссовских [18] регрессионных моделей. Показано, что оракульное неравенство дает верхнюю границу для рисков через минимальный риск, соответствующий выбранному семейству оценок. Альтернативный подход к получению алгоритмов выделения и интерполяции сигналов различных типов на основе непараметрических ядерных оценок при слабо зависимых и коррелированных стационарных наблюдениях подробно описан в [19].

Следует, однако, отметить, что полученные в работах [17, 18] оракульные неравенства не могут быть использованы для получения эффективной оценки в адаптивной постановке, поскольку верхние границы этих неравенств содержат в основных членах некоторые фиксированные коэффициенты, большие единицы. В то же время, для того чтобы обеспечить свойство эффективности процедуры выбора модели, необходимо найти точные оракульные неравенства, в которых коэффициент в главном члене выражения, определяющего верхнюю границу риска, был близок к единице. Такие неравенства для общих негауссовских наблюдений можно записать, применяя метод выбора модели, основанный на взвешенных оценках наименьших квадратов, предложенных в [13, 20] для гетероскедастических регрессионных моделей в дискретном времени и развитых затем в работах [8, 9, 14, 21] для полумартингалов в непрерывном времени, когда процесс наблюдения задается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dx_t = s_t dt + d\eta_t, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (4)$$

где  $s_t$  — неизвестный 1-периодический сигнал,  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  — аддитивный шум, моделируемый семимартингалом, интегрируемым с квадратом. Заметим, что для любого  $0 \leq t \leq 1$ , определяя наблюдаемый процесс как  $\tilde{x}_t = n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{t+j} - x_j)$ , модель (4) можно представить как модель с малым параметром  $\varepsilon = n^{-1/2}$ :

$$d\tilde{x}_t = s_t dt + \varepsilon d\tilde{\eta}_t, \quad (5)$$

где  $\tilde{\eta}_t = n^{-1/2} \sum_{j=0}^{n-1} (\eta_{t+j} - \eta_j)$ . При этом, если  $\eta_t$  представляет собой процесс Леви, то  $\tilde{\eta}_t$  также является процессом Леви.

Принципиальное отличие рассмотренной в [8,9,14,21] модели (5) от обобщенной модели (1) состоит в том, что скачки фонового шума в (5) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  будут представлять собой величины порядка  $\varepsilon$  с вероятностью, стремящейся к 1, т. е.

$$P \left[ \tilde{\eta}_t - \tilde{\eta}_{t-} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} O(\varepsilon) \right] \approx 1. \quad (6)$$

В то же время для модели (1) условие (6) может не выполняться. В результате, методы непараметрического оценивания, разработанные для модели (4), не могут быть использованы при анализе реализации наблюдаемых данных (1). Более того, предложенные в [8, 9, 14, 21] подходы обеспечивает адаптивную эффективную оценку сигнала  $s_t$  только для случая, когда мера Леви конечна, что существенно ограничивает их применение в ряде практически важных приложений.

Таким образом, целью данной работы является разработка метода выбора модели для адаптивной задачи эффективной оценки сигнала по реализации наблюдаемых данных (1) с аддитивной помехой в виде смеси гауссовского белого шума и общего процесса Леви без ограничений на величину скачков, включающая следующие этапы:

1) построение ряда процедур выбора модели и нахождение точных несимптотических оракульных неравенств для рисков (2) и (3), установление неасимптотического поведения скачков в модели (1) с бесконечной (или конечной) мерой Леви;

2) исследование эффективности получаемых непараметрических оценок сигнала  $s_t$ , используя неравенство Ван Триса [21,22] для общих процессов Леви, с целью получения нижней границы квадратичных рисков;

3) определение на основе найденной нижней границы константы Пинскера [23, 24];

4) следуя [21], установление верхней границы для квадратичных рисков на основе полученного точного оракульного неравенства для весовых оценок наименьших квадратов, содержащих эффективную процедуру Пинскера, определение структуры процедуры выбора модели;

5) оценивание сверху риска для принятой процедуры выбора модели по эффективному риску с точностью до некоторого коэффициента, стремящегося к единице.

В результате выполнения этапов 1)–5) обеспечивается свойство эффективности процедуры выбора модели в адаптивной постановке. В качестве иллюстрации предлагаемого подхода к синтезу процедуры выбора модели рассматривается задача определения числа сигналов по реализации наблюдаемых данных (1).

При изложении материала доказательства некоторых утверждений и теорем опущены в силу их громоздкости.

## 1. ОСНОВНЫЕ УСЛОВИЯ

Предположим, что аддитивная (фоновая) помеха  $\xi_t$  в (1) описывается случайным процессом вида

$$\xi_t = \rho_1 \omega_t + \rho_2 z_t. \quad (7)$$

В (7)  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – некоторые неизвестные константы,  $\omega_t$  – стандартный винеровский процесс [25],

$$z_t = x * (\mu - \tilde{\mu})_t, \quad (8)$$

“\*” обозначает стохастический интеграл по скомпенсированной мере скачка [26, 27],  $\mu(ds, dx)$  – мера скачка с детерминированным компенсатором,  $\tilde{\mu}(ds, dx) = ds \Pi(dx)$ ,  $\Pi(\cdot)$  – неизвестная мера Леви, т. е. некоторая неотрицательная мера на  $R_* = R \setminus \{0\}$ , для которой

$$\int_{R_*} (z^2 \wedge 1) \Pi(dz) < \infty,$$

и, кроме того, выполняется условие

$$\Pi(x^2) = 1, \quad \Pi(x^4) < \infty, \quad (9)$$

где  $a \wedge b = \min(a, b)$ ,  $\Pi(|x|^m) = \int_{R_*} |z|^m \Pi(dz)$ . При этом мера  $\Pi(R_*)$  может быть равна  $+\infty$ .

Пусть  $Q_\varepsilon^*$  (2) – семейство таких распределений в пространстве Скорохода  $\mathbf{D}[0, 1]$  [28, 29], для которого

$$0 < \zeta_* \leq \rho_1^2, \quad \chi_Q = \rho_1^2 + \rho_2^2 \leq \zeta^*. \quad (10)$$

Здесь  $0 < \zeta_* \leq \zeta^*$  – неизвестные величины, которые можно представить в виде функций, удовлетворяющих следующему дополнительному условию: границы  $\zeta_*$  и  $\zeta^*$  являются функциями от  $\varepsilon$ , такими что для любого  $b > 0$  выполняются соотношения

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-b} \zeta_*(\varepsilon) > 0, \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^b \zeta^*(\varepsilon) = 0. \quad (11)$$

Как следует из (11), границы области определения параметров  $\zeta_* \leq \zeta^*$  могут быть любыми положительными константами.

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМЫХ ДАННЫХ

При синтезе процедуры выбора модели на первом этапе необходимо устранить в (1) возможные большие скачки флуктуационной составляющей, для чего преобразуем модель наблюдений следующим образом:

$$\tilde{y}_t = y_t - \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta y_s \mathbf{1}_{\{|\Delta y_s| > \bar{a}\}}, \quad (12)$$

где  $\Delta y_s = y_s - y_{s-}$ ,  $\mathbf{1}_{\{\cdot\}} = 1$ , если выражение, стоящее в фигурных скобках, истинно, и  $\mathbf{1}_{\{\cdot\}} = 0$  в противном случае. Параметр  $\bar{a} = \bar{a}_\varepsilon > 0$  будет выбран позднее. Тогда имеем

$$d\tilde{y} = s_t dt + \varepsilon d\tilde{\xi}_t - \varepsilon \rho_2 \Pi(\bar{h}_\varepsilon) dt. \quad (13)$$

В (13)  $\tilde{\xi}_t = \rho_1 \omega t + \rho_2 \tilde{z}_t$ ,  $\tilde{z}_t = h_\varepsilon * (\mu - \tilde{\mu})_t$ , функции  $h_\varepsilon(x) = x \mathbf{1}_{\{|x| \leq \tilde{v}_\varepsilon\}}$ ,  $\bar{h}_\varepsilon(x) = x \mathbf{1}_{\{|x| > \tilde{v}_\varepsilon\}}$ , а  $\tilde{v}_\varepsilon = \bar{a}/|\rho_2| \varepsilon$  — порог усечения. Заметим, что сумма в преобразовании (12) конечна, поскольку процесс кадлага [29] имеет только конечное число скачков, превышающих некоторый положительный порог по абсолютной величине.

Пусть  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  — ортонормированный базис в пространстве  $\mathbf{L}_2[0, 1]$ , причем  $\varphi_1 \equiv 1$ . Будем считать, что базис  $\{\varphi_j\}$  равномерно ограничен, т. е. существует некоторая константа  $\varphi^*$ , в общем случае зависящая от  $\varepsilon > 0$ , для которой выполняется соотношение

$$\sup_{0 \leq j \leq n} \sup_{0 \leq t \leq 1} |\varphi_j(t)| \leq \varphi^* < \infty, \quad (14)$$

где  $n = n_\varepsilon = [1/\varepsilon^2]$ , а  $[\cdot]$  — целая часть числа. Примером такого базиса может служить тригонометрический базис  $\{Tr_j\}$ , определяемый как  $Tr_1 \equiv 1$  и

$$Tr_j(x) = \sqrt{2} \begin{cases} \cos(2\pi [j/2] x), & j = 2k, \\ \sin(2\pi [j/2] x), & j = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Кроме того, заметим, что для любой определенной на интервале  $[0, 1] \rightarrow R$  функции  $f$  из  $\mathbf{L}_2[0, 1]$  и для любого  $0 \leq t \leq 1$  стохастические интегралы

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) d\xi_s, \quad \tilde{I}_t(f) = \int_0^t f(s) d\tilde{\xi}_s$$

являются строго определенными с математическими ожиданиями  $\mathbf{E}I_t(f) = 0$ ,  $\mathbf{E}\tilde{I}_t(f) = 0$  и вторыми моментами

$$\mathbf{E}I_t^2(f) = \chi_Q \|f\|_t^2, \quad \mathbf{E}\tilde{I}_t^2(f) = \tilde{\chi}_Q \|f\|_t^2. \quad (16)$$

Здесь  $\|f\|_t^2 = \int_0^t f^2(s) ds$ ,  $\tilde{\chi}_Q = \rho_1^2 + \rho_2^2 \Pi(h_\varepsilon^2)$ .

Обозначим

$$(f, g)_t = \int_0^t f(s) g(s) ds, \quad (f, g) = \int_0^1 f(s) g(s) ds$$

и используем для оценки функции  $s_t$  ее представление в виде обобщенного ряда Фурье:

$$s_t = \sum_{j \geq 1} \theta_j \varphi_j(t), \quad \theta_j = (s_t, \varphi_j). \quad (17)$$

Коэффициенты разложения  $\theta_j$  в (17) можно найти путем их непосредственного оценивания по реализации наблюдаемых данных (1):

$$\hat{\theta}_{j,\varepsilon} = \begin{cases} \int_0^1 \varphi_j(t) dy_t = \theta_j + \varepsilon \xi_j, & j = 1, \\ \int_0^1 \varphi_j(t) d\tilde{y}_t, & j \geq 2. \end{cases} \quad (18)$$

Учтем, что при  $j \geq 2$  интеграл  $\int_0^1 \varphi_1(t) dt = 0$ . Тогда согласно (13) оценки (18) допускают представление

$$\hat{\theta}_{j,\varepsilon} = \theta_j + \varepsilon \bar{\xi}_j, \quad \bar{\xi}_j = \tilde{I}_1(\varphi_j).$$

Отсюда, принимая  $\bar{\xi}_1 = \xi_1$ , для любого  $j \geq 1$  имеем

$$\hat{\theta}_{j,\varepsilon} = \theta_j + \varepsilon \bar{\xi}_j. \quad (19)$$

Далее, следуя методике синтеза процедуры выбора модели, предложенной в [14, 15], введем в рассмотрение функции вида

$$B_{1,\varepsilon}(u) = \sum_{j=1}^n u_j (\mathbf{E}_Q \bar{\xi}_j^2 - \tilde{\chi}_Q), \quad B_{2,\varepsilon}(u) = \sum_{j=1}^n u_j \tilde{\xi}_j, \quad (20)$$

где  $\tilde{\xi}_j = \bar{\xi}_j^2 - \mathbf{E}_Q \bar{\xi}_j^2$ , и проанализируем их поведение при  $u \in R^n$ .

**Утверждение 1.** Предположим, что выполняется условие (9). Тогда

$$\sup_{u \in [0,1]^n} |B_{1,\varepsilon}(u)| \leq \chi_Q. \quad (21)$$

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что  $|\mathbf{E}_Q \bar{\xi}_1^2 - \tilde{\chi}_Q| = |\mathbf{E}_Q \xi_1^2 - \tilde{\chi}_Q| = \chi_Q - \tilde{\chi}_Q \leq \chi_Q$  и  $\mathbf{E}_Q \bar{\xi}_j^2 = \tilde{\chi}_Q$  при  $j \geq 2$ . Отсюда непосредственно следует неравенство (21).

Определим далее для любого  $u \in R^n$

$$|u|^2 = \sum_{j=1}^n u_j^2 \text{ и } \mathfrak{S}(u) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{u_j \neq 0\}}$$

и исследуем поведение концентрационного члена  $B_{2,\varepsilon}(u)$  (20).

**Утверждение 2.** Будем считать, что условие (9) выполняется. Тогда для любых фиксированного параметра усечения  $\bar{a} > 0$  и вектора  $u \in R^n$  справедливо соотношение

$$\mathbf{E}_Q B_{2,\varepsilon}^2(u) \leq U_Q + 4\chi_Q (\bar{a}/\varepsilon)^2 (\varphi^*)^4 \mathfrak{S}(u), \quad (22)$$

где  $U_Q = 2(25 + 16\mathbf{E}z_1^4) \chi_Q^2$ ,  $z_1 = z_t|_{t=1}$  (8). Последний член в правой части (22) обусловлен влиянием скачков в наблюдениях (1).

Используем верхние границы (21) и (22) для получения неасимптотических точных оркульных неравенств.

### 3. ВЫБОР МОДЕЛИ

Следуя [8, 9, 14, 21], оценку функции  $s_t$ ,  $t \in [0, 1]$  будем строить на основе взвешенной оценки наименьших квадратов вида

$$\hat{s}_t^\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda(j) \hat{\theta}_{j,\varepsilon} \varphi_j(t), \quad (23)$$

где  $n = \lfloor 1/\varepsilon^2 \rfloor$ , весовые коэффициенты  $\{\lambda(j)\}_{1 \leq j \leq n}$  принадлежат некоторому конечному множеству  $\Lambda$  из  $[0, 1]^n$ , а  $\varphi_j(t)$  и  $\hat{\theta}_{j,\varepsilon}$  определяются из (15) и (18), соответственно.

Обозначим

$$\iota = \text{card}(\Lambda) \text{ и } |\Lambda|_* = \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_j > 0\}}, \quad (24)$$

где  $\text{card}(\Lambda)$  — число векторов в множестве  $\Lambda$ . Будем считать, что  $\iota$  (24) является функцией  $\varepsilon > 0$ , такой что для любого  $b > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^b \iota(\varepsilon) = 0. \quad (25)$$

Выберем параметр усечения  $\bar{a}$  в (12) следующим образом:

$$\bar{a} = \bar{a}_\varepsilon = \varepsilon / \sqrt{|\Lambda|_*}. \quad (26)$$

В качестве весовых коэффициентов  $\lambda(j)$  примем такие  $\hat{\lambda}(j) \in \Lambda$ , которые минимизируют эмпирический квадратичный риск, определяемый как [14, 21]

$$\text{Err}_\varepsilon(\lambda) = \left\| \hat{s}_t^\lambda - s_t \right\|^2. \quad (27)$$

Подставляя в (27) представления (17), (23), имеем

$$\begin{aligned} \text{Err}_\varepsilon(\lambda) &= \sum_{j=1}^n \lambda^2(j) \hat{\theta}_{j,\varepsilon}^2 - 2 \sum_{j=1}^n \lambda(j) \hat{\theta}_{j,\varepsilon} \theta_j + \sum_{j=1}^\infty \theta_j^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{j=1}^n \lambda^2(j) \hat{\theta}_{j,\varepsilon}^2 - 2 \sum_{j=1}^n \lambda(j) \hat{\theta}_{j,\varepsilon} \theta_j. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь учтено, что член  $\sum_{j=1}^\infty \theta_j^2$ , не зависящий от  $\lambda(j)$  и, соответственно, не влияющий на искомую процедуру минимизации, может быть опущен.

Непосредственное определить весовую последовательность  $\lambda(j)$  из выражения (28) не представляется возможным, поскольку входящие в него коэффициенты Фурье  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  неизвестны. Одним из возможных способов преодоления указанной трудности является использование вместо неизвестных величин  $\theta_j$  их оценок (18). Однако, такая замена приводит к появлению смещения у второго члена в правой части (28). Действительно, как следует из (19), если

$$\mathbf{E}_Q \hat{\theta}_{j,\varepsilon} \theta_j = \theta_j^2, \quad (29)$$

то при подстановке  $\hat{\theta}_{j,\varepsilon} \rightarrow \theta_j$  в (29) при  $j \geq 2$  находим  $\mathbf{E}_Q \hat{\theta}_{j,\varepsilon}^2 = \theta_j^2 + \varepsilon^2 \mathbf{E}_Q \xi_j^2 = \theta_j^2 + \varepsilon^2 \tilde{\chi}_Q$ .

Получить несмещенную оценку случайной величины  $\hat{\theta}_{j,\varepsilon} \theta_j$  можно, вводя в  $\hat{\theta}_{j,\varepsilon}^2$  дополнительное слагаемое  $-\varepsilon^2 \hat{\chi}_\varepsilon$ , математическое ожидание которого равно по модулю и противоположно по знаку смещению  $\varepsilon^2 \tilde{\chi}_Q$ :

$$\tilde{\theta}_{j,\varepsilon} = \hat{\theta}_{j,\varepsilon}^2 - \varepsilon^2 \hat{\chi}_\varepsilon, \quad j \geq 2. \quad (30)$$

Здесь  $\hat{\chi}_\varepsilon = \tilde{\chi}_Q$ , если величина  $\tilde{\chi}_Q$  известна, или  $\hat{\chi}_\varepsilon$  представляет собой несмещенную оценку (возможный способ построения которой будет описан ниже) величины  $\tilde{\chi}_Q$ , если значение  $\tilde{\chi}_Q$  априори неизвестно.

Отметим, что выражение (30), полученное для  $j \geq 2$ , можно без заметной потери в точности можно распространить на все возможные значения  $j$  (т. е., учесть слагаемое, соответствующее  $j = 1$ ) Действительно, нетрудно показать, что при характерных значениях  $n$  ( $n \gg 1$ ) вклад отдельного слагаемого в сумму  $\sum_{j=1}^n \lambda(j) \hat{\theta}_{j,\varepsilon} \theta_j$  пренебрежимо мал, так что вносимая

при формировании первого члена данной суммы погрешность не повлияет существенно на итоговое значение эмпирического квадратичного риска (28).

Таким образом, процедура расчета весовых коэффициентов  $\lambda(j)$  сводится к процедуре минимизации следующей функции стоимости:

$$J_\varepsilon(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda^2(j) \hat{\theta}_{j,\varepsilon}^2 - 2 \sum_{j=1}^n \lambda(j) \tilde{\theta}_{j,\varepsilon} + \delta \hat{P}_\varepsilon(\lambda), \quad (31)$$

где  $\delta > 0$  — некоторый множитель, который будет определен ниже,

$$\hat{P}_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon^2 \hat{\chi}_\varepsilon |\lambda|^2 \quad (32)$$

— введенный пенализационный член, обусловленный штрафом, связанным с заменой в (28) исходной величины  $\hat{\theta}_{j,\varepsilon} \theta_j$  на ее оценку  $\tilde{\theta}_{j,\varepsilon}$  (30), а  $|\lambda|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda^2(j)$ .

Заметим, что если значение  $\tilde{\chi}_Q$  (16) известно, то выражение (32) для штрафного члена преобразуется к виду

$$\hat{P}_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon^2 \tilde{\chi}_Q |\lambda|^2.$$

В общем случае для  $\hat{P}_\varepsilon(\lambda)$  можно указать следующую верхнюю границу.

**Лемма 1.** Предположим, что условие (9) выполняется. Тогда для любых  $0 < \varepsilon < 1$  и  $\lambda \in \Lambda$  справедливо соотношение

$$\hat{P}_\varepsilon(\lambda) \leq \Re(\hat{s}_\lambda, s) + \varepsilon^2 \chi_Q.$$

Определим процедуру выбора модели следующим образом

$$\hat{s}_t^* = \hat{s}_t^{\hat{\lambda}}, \quad \hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} J_\varepsilon(\lambda). \quad (33)$$

Поскольку множество  $\Lambda$  конечно, оценка  $\hat{\lambda}$  (33) всегда существует. При этом, если функция стоимости (31) имеет несколько одинаковых минимумов, в качестве оценки  $\hat{\lambda}$  может быть выбрано положение любого из них.

Как следует из (30), (31), для практической реализации процедуры (33) при неизвестной дисперсии  $\tilde{\chi}_Q$  необходимо также иметь оценку  $\hat{\chi}_\varepsilon$  параметра  $\tilde{\chi}_Q$  (16). В качестве такой оценки при использовании тригонометрического базиса (15) и произвольном  $0 < \varepsilon \leq 1/\sqrt{3}$  может быть выбрана оценка вида

$$\hat{\chi}_\varepsilon = \sum_{j=[1/\varepsilon]+1}^n \hat{\tau}_{j,\varepsilon}^2, \quad n = [1/\varepsilon^2],$$

где  $\hat{\tau}_{j,\varepsilon} = \int_0^1 Tr_j(t) d\hat{y}_t$  — оценки коэффициентов Фурье  $\tau_j = \int_0^1 s(t) Tr_j(t) dt$ .

**Утверждение 3.** Предположим, что в модели (1) неизвестная функция  $s_t$  непрерывно дифференцируема. Тогда для любого  $0 < \varepsilon \leq 1/\sqrt{3}$  выполняется соотношение

$$\mathbf{E}_Q |\hat{\chi}_\varepsilon - \tilde{\chi}_Q| \leq \varepsilon \gamma_Q(s), \quad (34)$$

где  $\gamma_Q(s) = 4(\|\dot{s}_t\| + 1)^2(1 + 2\sqrt{\chi_Q} + \chi_Q + \sqrt{U_Q})$ , а  $\dot{s}_t$  — производная функции  $s_t$ .

При доказательстве (34) для оценки дисперсии  $\tilde{\chi}_Q$  используется представление (19) для коэффициентов Фурье  $(\tau_j)_{j \geq 1}$  в тригонометрическом базисе (15). Кроме того, как было показано в [14, Лемма А.6], для любых непрерывно дифференцируемой функции  $s_t$  и  $m \geq 1$  может быть получена в явном виде оценка сверху суммы  $\sum_{j \geq m} \tau_j^2$ . Тогда, с учетом (22) получаем верхнюю границу в (34).



Зададим теперь весовые коэффициенты  $\{\lambda(j)\}_{1 \leq j \leq n}$ . С этой целью рассмотрим числовую сетку вида

$$A = \{1, \dots, k^*\} \times \{r_1, \dots, r_m\}, \tag{35}$$

где  $r_i = i\varpi$ ,  $m = \lceil 1/\varpi^2 \rceil$ . Полагается, что параметры  $k^* \geq 1$  и  $0 < \varpi < 1$  являются функциями от  $\varepsilon$ , т. е.  $k^* = k_\varepsilon^*$  и  $\varpi = \varpi_\varepsilon$ , такими что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{k_\varepsilon^*} + \frac{k_\varepsilon^*}{|\ln \varepsilon|} \right) = 0 \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \varpi_\varepsilon + \frac{\varepsilon^b}{\varpi_\varepsilon} \right) = 0, \tag{36}$$

для любого  $b > 0$ . Например, для  $0 < \varepsilon < 1$  можно принять

$$\varpi_\varepsilon = |\ln \varepsilon|^{-1} \text{ и } k_\varepsilon^* = k_0^* + \sqrt{|\ln \varepsilon|},$$

где  $k_0^*$  — некоторая фиксированная константа.

Введем для каждого  $\alpha = (\beta, r) \in A$  веса  $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(j)$ ,  $j = \overline{1, n}$  из  $R^n$  следующим образом:

$$\lambda_\alpha(j) = \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq n\}} + \left( 1 - (j/\omega_\alpha)^\beta \right) \mathbf{1}_{\{j_* \leq j \leq \omega_\alpha\}}. \tag{37}$$

В (37) обозначено:  $j_* = j_*(\alpha) = \lceil \omega_\alpha / |\ln \varepsilon| \rceil$ ,  $\omega_\alpha = d_\beta (r v_\varepsilon)^{1/(2\beta+1)}$ ,

$$d_\beta = \left[ \frac{(\beta+1)(2\beta+1)}{\pi^{2\beta}\beta} \right]^{1/(2\beta+1)}, \quad v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2 \zeta^*}, \tag{38}$$

а порог  $\zeta^*$  такой же, как в (10).

Определим множество  $\Lambda$  как

$$\Lambda = \{ \lambda_\alpha, \alpha \in A \}. \tag{39}$$

Тогда  $\iota = k * m$ , и из (36) непосредственно следует свойство (25). Кроме того, из (37) находим, что для любого  $\alpha \in A$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_\alpha(j) \leq \omega_\alpha \leq d_* r_m^{1/3} v_\varepsilon^{1/3}, \quad d_* = \sup_{\beta \geq 1} d_\beta,$$

где параметры  $\beta$  и  $r_m$  определяются регулярностью неизвестных функций. Таким образом, соотношения (36) означают, что для любого  $b > 0$  справедлив предельный переход вида

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/3+b} |\Lambda|_* = 0. \tag{40}$$

Отметим, что весовые коэффициенты, задаваемые множеством (39), используются в [8, 9] для установления асимптотической эффективности процедур выбора модели при наблюдениях регрессионных случайных процессов в непрерывном времени.

## 4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 4.1. Оракульные неравенства

Для получения точных оракульных неравенств сформулируем следующие теоремы.

**Теорема 1.** Предположим, что условие (9) выполняется. Тогда существует константа  $l_* > 0$  такая, что для любых  $\varepsilon > 0$  и  $0 < \delta \leq 1/6$  квадратичный риск процедуры выбора модели (33) с параметром усечения (26) удовлетворяет оракульному неравенству вида

$$\mathfrak{R}_Q(\hat{s}_t^*, s_t) \leq \frac{1+3\delta}{1-3\delta} \min_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_Q(\hat{s}_t^\lambda, s_t) + \varepsilon^2 l_* \frac{\psi_{Q,\varepsilon} + |\Lambda|_* \mathbf{E}_s |\hat{\chi}_\varepsilon - \check{\chi}_Q|}{\delta}, \tag{41}$$

где

$$\psi_{Q,\varepsilon} = \left(1 + (\varphi^*)^4\right) \left(1 + \chi_Q^2 + 1/\tilde{\chi}_Q\right) \nu,$$

Отметим, что, если параметр  $\tilde{\chi}_Q$  известен, неравенство (41) упрощается.

**Следствие 1.** Если дисперсия  $\tilde{\chi}_Q$  известна и выполняется условие (9), то существует константа  $l_* > 0$ , такая что для любого  $\varepsilon > 0$  и любого  $0 < \delta \leq 1/6$  процедура выбора модели (33) с параметром усечения (26) удовлетворяет следующему оракульному неравенству:

$$\mathfrak{R}_Q(\hat{s}_t^*, s_t) \leq [(1 + \delta)/(1 - 3\delta)] \min_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}(\hat{s}_t^\lambda, s_t) + \varepsilon^2 l_* \psi_{Q,\varepsilon} / \delta. \quad (42)$$

Отметим, что соотношение (42) остается справедливым и для классической модели наблюдений сигнала на фоне белого шума, когда аддитивная помеха  $\xi_t$  в (1) описывается случайным процессом (7) при  $\rho_1 = 1$  и мере Леви  $\Pi = 0$  ( $\tilde{\chi}_Q = 1$ ).

Используя Утверждение 3, можно получить еще одно граничное соотношение для квадратичного риска в процедуре выбора модели (33).

**Теорема 2.** Предположим, что условие (9) выполняется и неизвестный сигнал  $s_t$  описывается непрерывно дифференцируемой на интервале  $[0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$  функцией. Тогда существует константа  $l_* > 0$  такая, что для любого  $0 < \delta \leq 1/6$  и любого  $0 < \varepsilon \leq 1/\sqrt{3}$ , удовлетворяющего соотношению  $|\Lambda|_* \leq 1/\varepsilon$ , процедура выбора модели (33) с параметром усечения (26) характеризуется оракульным неравенством вида

$$\mathfrak{R}_Q(\hat{s}_t^*, s_t) \leq [(1 + \delta)/(1 - 3\delta)] \min_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}(\hat{s}_t^\lambda, s_t) + \varepsilon^2 l_* \psi_{Q,\varepsilon} (\|\dot{s}_t\| + 1)^2 / \delta. \quad (43)$$

Рассмотрим теперь робастные риски (2) для процедуры (33). Будем считать, что верхняя граница  $\varphi^*$  (14) для базисных функций  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  является функцией от  $\varepsilon > 0$ :  $\varphi^* = \varphi^*(\varepsilon)$ , такой что для любого  $b > 0$  имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^b \varphi^*(\varepsilon) = 0. \quad (44)$$

**Теорема 3.** Предположим, что условия (9), (11), (44) выполняются и неизвестная функция  $s_t$  является непрерывно дифференцируемой. Тогда для любого  $0 < \delta \leq 1/6$  и любого  $0 < \varepsilon \leq 1/\sqrt{3}$ , удовлетворяющего соотношению  $|\Lambda|_* \leq 1/\varepsilon$ , робастные риски для процедуры выбора модели (33) с параметром усечения (26) удовлетворяют следующему оракульному неравенству:

$$\mathfrak{R}_Q(\hat{s}_t^*, s_t) \leq [(1 + \delta)/(1 - 3\delta)] \min_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}(\hat{s}_t^\lambda, s_t) + \varepsilon^2 U_\varepsilon^*(s_t) / \delta, \quad (45)$$

где функционал  $U_\varepsilon^*(s_t) > 0$  такой, что при выполнении условий (25) и (44) для любых  $r > 0$  и  $b > 0$  существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^b \sup_{\|\dot{s}_t\| \leq r} U_\varepsilon^*(s) = 0. \quad (46)$$

Теперь, учитывая соотношение (40), можно сформулировать следующую теорему для процедуры выбора модели (33) с весовыми коэффициентами (39).

**Теорема 4.** Предположим, что выполнены условия (9), (11), (44) и неизвестная функция  $s_t$  непрерывно дифференцируема. Тогда процедура выбора модели (33), построенная с использованием весовых коэффициентов (39), удовлетворяет оракульному неравенству (45) с соотношением (46).

Отметим, что аналогичные точные оракульные неравенства были получены в [8, 13] для частного случая процедуры выбора модели в тригонометрическом базисе (15). Неравенства же (41), (42), (43), (45) справедливы для процедур выбора моделей на основе произвольной

ортогональной системы базисных функции в  $L_2 [0, 1]$ . Тригонометрические функции здесь используются только для оценки дисперсии шума  $\tilde{\chi}_Q$ .

### 4.2. Адаптивная робастная эффективность

Исследуем теперь асимптотически эффективные свойства процедуры (33), (37) относительно робастных рисков (2), определяемых семейством распределений (10), (11). Для этого, не нарушая общности рассуждений, предположим, что неизвестная функция (17) принадлежит некоторому эллипсоиду в пространстве  $l_2$ :

$$W_{\mathbf{r}}^k = \left\{ s \in L_2 [0, 1] : \sum_{j=1}^{\infty} a_j \theta_j^2 \leq \mathbf{r} \right\}, \tag{47}$$

где  $a_j = \sum_{i=0}^k (2\pi [j/2])^{2i}$ .

Нетрудно видеть, что в случае тригонометрических функций  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  (15), множество (47) совпадает с шаром Соболева:

$$W_{\mathbf{r}}^k = \left\{ s \in C_{per}^k [0, 1] : \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|^2 \leq \mathbf{r} \right\}, \tag{48}$$

где  $\mathbf{r} > 0$  и  $k \geq 1$  — некоторые параметры,  $C_{per}^k [0, 1]$  — множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых на интервале  $[0, 1] \rightarrow R$  функций  $f$ , таких что  $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1)$  для всех  $0 \leq i \leq k$ .

Следуя [8, 9], покажем, что асимптотическая точная нижняя граница робастного риска (2) задается формулой

$$I_*(\mathbf{r}) = ((2k + 1) \mathbf{r})^{1/(2k+1)} (k/\pi (k + 1))^{2k/(2k+1)}.$$

Здесь выражение в правой части представляет собой хорошо известную константу Пинскера [23, 24], которая впервые была получена при решении задачи неадаптивной фильтрации для модели реализации наблюдаемых данных в виде аддитивной смеси сигнала неизвестной формы и гауссовского шума [23].

Пусть  $S_\varepsilon$  — множество всех оценок  $\hat{s}_t^\varepsilon$ , выносимых на основе реализации наблюдаемых данных (1) и измеримых в рамках  $\sigma$ -алгебры  $\sigma \{y_t, 0 \leq t \leq 1\}$ . Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.** Если выполняются условия (9), (11), то нижняя граница робастного риска (2) определяется как

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon^{2k/(2k+1)} \inf_{\hat{s}_\varepsilon \in S_\varepsilon} \sup_{s \in W_{\mathbf{r}}^k} R_\varepsilon^*(\hat{s}_t^\varepsilon, s_t) \geq l_*(\mathbf{r}), \tag{49}$$

где скорость  $v_\varepsilon$  определяется из (38).

Для анализа верхней границы робастного риска (2) в процедуре выбора модели (33) необходимо постулировать следующее условие на пенализационный параметр  $\delta$  (31): параметр  $\delta = \delta_\varepsilon$  является функцией  $\varepsilon$ , такой что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon = 0 \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-b} \delta_\varepsilon = 0 \tag{50}$$

для любого  $b > 0$ . Например, можно выбрать  $\delta_\varepsilon = (6 + |\ln \varepsilon|)^{-1}$ .

**Теорема 6.** Предположим, что условия (9), (11), (44), (50) выполняются. Тогда робастный риск (2) в процедуре выбора модели (33), построенной с использованием весовых коэффициентов (39), допускает асимптотическую оценку сверху вида

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon^{2k/(2k+1)} \sup_{s \in W_{\mathbf{r}}^k} R_\varepsilon^*(\hat{s}_t^*, s_t) \leq l_*(\mathbf{r}), \tag{51}$$

**Следствие 2.** Из неравенств (49), (51) следует, что при выполнении условий (9), (11), (44), (50) для робастного риска (2) справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon^{2k/(2k+1)} \inf_{\hat{s}_\varepsilon \in S_\varepsilon} \sup_{s \in W_\mathbf{r}^k} R_\varepsilon^*(\hat{s}_\varepsilon, s) = l_*(\mathbf{r}),$$

Следуя [23], заметим, что если параметры  $k$  и  $\mathbf{r}$  шара Соболева (48) известны, то для получения эффективной оценки достаточно выбрать взвешенную оценку по методу наименьших квадратов (23) с весами (37) и  $\alpha = (k, r)$ . В случае адаптивного оценивания, т. е. когда указанные параметры неизвестны, предлагается использовать процедуру модели выбора для семейства  $(\hat{s}_t^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , содержащего эффективную оценку. Тогда свойство эффективности обеспечивается с помощью точных оракульных неравенств. При этом оптимальная (минимаксная) скорость сходимости риска для соболевского шара  $W_\mathbf{r}^k$  определится как  $\varepsilon^{-4k/(2k+1)}$ , что соответствует эффективной робастной скорости сходимости  $v_\varepsilon^{2k/(2k+1)}$ . Таким образом, если верхняя граница распределения (10)  $\zeta^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , то скорость сходимости относительно  $\varepsilon^{-4k/(2k+1)}$  становится более быстрой, в то время как при  $\zeta^* \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \infty$  — более медленной. В случае, когда  $\zeta^*$  является постоянной, робастная скорость совпадает с классической неробастной скоростью сходимости.

## 5. НЕРАВЕНСТВО ВАН ТРИСА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

Рассмотрим параметрическую модель наблюдений в непрерывном времени вида

$$dy_t = s_t(\theta) dt + d\xi_t, \quad t \in [0, 1], \quad (52)$$

где  $s_t(\theta) = \sum_{i=1}^d \theta_i \varphi_i(t)$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$  — набор неизвестных параметров, а процесс  $\xi_t$  определяется согласно (7).

Можно показать, что распределение  $\mathbf{P}_\theta$  процесса (52) абсолютно непрерывно относительно  $\mathbf{P}_\xi$  в пространстве  $\mathbf{D}[0, 1]$ , а соответствующая производная Радона-Никодима определится как

$$f(x, \theta) = \frac{d\mathbf{P}_\theta(x)}{d\mathbf{P}_\xi(x)} = \exp \left[ \int_0^1 \frac{s_t(\theta)}{\rho_1^2} dx_t^c - \int_0^1 \frac{s_t^2(\theta)}{2\rho_1^2} dt \right],$$

где

$$x_t^c = x_t - \int_0^t \int_{R_*} v (\mu_x(ds, dv) - \Pi(dv)) ds$$

— непрерывная часть процесса  $(x_t)_{0 \leq t \leq 1}$  в пространстве  $\mathbf{D}[0, 1]$ , а

$$\mu_x([0, t], \Gamma) = \sum_{0 \leq x \leq t} \mathbf{1}_{\{\Delta x_s \in \rho_2 \Gamma\}}$$

для любого  $t > 0$  и измеряемой области  $\Gamma$  из  $R_*$ .

Пусть  $\Phi$  — априорная плотность вероятности в пространстве  $R^d$ , допускающая представление

$$\Phi(\theta) = \Phi(\theta_1, \dots, \theta_d) = \prod_{j=1}^d \varphi_j(\theta_j),$$

где  $\varphi_j$  — некоторая непрерывно дифференцируемая плотность вероятности в пространстве  $R$ . Кроме того, положим, что  $g(\theta)$  — непрерывно дифференцируемая функция в области  $R^d \rightarrow R$ , такая что для каждого  $1 \leq j \leq d$  выполняются соотношения

$$\lim_{|\theta_j| \rightarrow \infty} g(\theta) \varphi_j(\theta_j) = 0, \quad \int_{R^d} |g'_j(\theta)| \Phi(\theta) d\theta < \infty,$$

где  $g'_j(\theta) = \partial g(\theta) / \partial \theta_j$ .

Введем в рассмотрение величину

$$\mathbf{E} = \int_{R^d} \int_{\aleph} H(x, \theta) \Phi(\theta) d\mathbf{P}_\theta d\theta = \int_{R^d} \int_{\aleph} H(x, \theta) f(x, \theta) \Phi(\theta) d\mathbf{P}_\xi(x) d\theta,$$

где  $H = H(x, \theta)$  — некоторая измеримая интегрируемая функция в области  $B(\aleph) \times B(R^d)$ ,  $\aleph = \mathbf{D}[0, 1]$ . Тогда можно сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение 4.** Для любой измеримой квадратично интегрируемой функции  $\hat{g}$  из семейства  $F^y = \sigma\{y_t, 0 \leq t \leq 1\}$  и любого  $1 \leq j \leq d$  выполняется неравенство

$$\mathbf{E} (g - g(\theta))^2 \geq \Lambda_j^2 / (\|\varphi_j\|^2 \rho_1^{-2} + I_j), \quad (53)$$

где

$$\lambda_j = \int_{R^d} g'_j(\theta) \Phi(\theta) d\theta, \quad I_j = \int_R [\dot{\varphi}_j^2(z) / \varphi_j(z)] dz.$$

Отметим, что нижняя граница (53) является обобщением неравенства Ван Триса, полученного для модели наблюдений в виде аддитивной смеси сигнала и белого шума (см., например, неравенство (A.5) в [21]).

### 5.1. ОЦЕНКА ЧИСЛА СИГНАЛОВ

Рассмотрим применение полученных результатов применительно к задаче оценки числа сигналов с неизвестными энергетическими параметрами. Пусть на интервале времени  $t \in [0, 1]$  (1) наблюдается аддитивная смесь суперпозиции  $q_0$  информационных сигналов  $\varphi_j(t)$  с амплитудами  $(\theta_{0j})_{1 \leq j \leq q_0}$

$$s_t(q_0, \theta_0) = \sum_{j=1}^{q_0} \theta_{0j} \varphi_j(t), \quad \theta_0 = (\theta_{01}, \dots, \theta_{0q_0}) \quad (54)$$

и гауссовского белого шума  $\nu_t$  с двусторонней спектральной плотностью  $\varepsilon^2$ :

$$y_t = s_t(q_0, \theta_0) + \nu_t. \quad (55)$$

Моделью (54), например, может описываться сигнал в канале связи с многолучевым распространением или радиолокационный сигнал, отраженный от нескольких объектов.

Полагаем, что энергетические параметры (амплитуды)  $\theta_0$  и число сигналов  $q_0$  неизвестны и принимают значения из априорных областей  $1 \leq q_0 \leq q^*$ ,  $\theta_0 \in \Theta_0$ , а функции  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq q_0}$ , описывающие форму сигналов, являются известными ортонормированными функциями, так что  $\int_0^1 \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \mathbf{1}_{\{i=j\}}$ . По наблюдаемой реализации (55) и имеющейся априорной информации необходимо оценить величину  $q_0$ .

При синтезе алгоритма оценки перейдем от линейного уравнения (55) к стохастическому дифференциальному уравнению типа (1):

$$dy_t = s_t(q_0, \theta_0) dt + \varepsilon d\omega_t,$$

где  $\omega_t$  — стандартный винеровский процесс [25], и представим решающую статистику (логарифм функционала отношения правдоподобия) следующим образом:

$$\ln L_\varepsilon(q, \theta) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^q \theta_j \int_0^1 \varphi_j(t) dy_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{j=1}^q \theta_j^2. \quad (56)$$

Здесь  $q$  и  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$  – текущие значения неизвестных параметров  $q_0$  и  $(\theta_{0j})_{1 \leq j \leq q_0}$ .

Из (56) следует, что применение классических подходов для построения оценки числа сигналов может приводить к неработоспособным алгоритмам оценивания. Действительно, например, оценка максимального правдоподобия (ОМП)  $\hat{q}$  числа сигналов в реализации наблюдаемых данных (55), определяемая как положение наибольшего максимума решающей статистики, согласно (56) имеет вид

$$\hat{q} = \arg \max_{1 \leq q \leq q^*} \left[ \max_{\theta \in \Theta_0} \ln L_\varepsilon(q, \theta) \right] = \arg \max_{1 \leq q \leq q^*} \frac{1}{2\varepsilon^2} \sum_{j=1}^q \left[ \int_0^1 \varphi_j(t) dt \right]^2, \quad (57)$$

Таким образом, ОМП (57) не зависит от реализации наблюдаемых данных и всегда совпадает с максимально возможным числом сигналов ( $\hat{q} = q^*$ ), что делает ее непригодной для использования в практических приложениях.

Преодолеть указанные трудности можно при решении задачи оценивания числа сигналов  $q_0$  в непараметрической постановке с применением процедуры выбора модели (33). С этой целью рассмотрим модель наблюдений (1), где в качестве возможных оценок неизвестной функции  $s_t(q_0, \theta_0)$  (54) используем семейство  $(\hat{s}_t(d))_{1 \leq d \leq m}$  вида

$$\hat{s}_t(d) = \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_{j,\varepsilon} \varphi_j(t). \quad (58)$$

Здесь  $\hat{\theta}_{j,\varepsilon}$  – оценка параметра  $\theta_{0j}$ , найденная по методу наименьших квадратов.

В качестве риска при оценивании числа сигналов в суперпозиции  $s_t$  (54) используем робастный риск (2):

$$\mathbf{D}_\varepsilon(d, q_0) = \mathfrak{R}_\varepsilon^*(\hat{s}_t, s_t),$$

где  $d$  – целое число (возможно, случайное) из множества  $\{1, \dots, \iota\}$ ,  $\iota$  – общее число оценок, удовлетворяющее условию (25), а оценка  $\hat{s}_t$  (58) при фиксированном  $d$  может быть получена из (13) с весовыми коэффициентами  $\lambda(j) = \chi\{j \leq d\}$ . Тогда функция стоимости (31) определится как

$$J_\varepsilon(\lambda) = \sum_{j=1}^n \hat{\theta}_{j,\varepsilon}^2 - 2 \sum_{j=1}^n \tilde{\theta}_{j,\varepsilon} + \delta \hat{P}_\varepsilon(\lambda),$$

так что в качестве оценки  $\hat{q}_\varepsilon$  числа сигналов  $q_0$  в (54) согласно (33) выбираем величину

$$\hat{q}_\varepsilon = \arg \min_{1 \leq d \leq \iota} J_\varepsilon(d). \quad (59)$$

Заметим, что из Теоремы 3 следует, что робастные риски для процедуры (33) в случае  $|\Lambda|_* \leq 1/\varepsilon$  удовлетворяют для любого  $0 < \delta \leq 1/6$  следующему оракульному неравенству:

$$\mathbf{D}_\varepsilon(\hat{q}_\varepsilon, q_0) \leq \frac{1 + 3\delta}{1 - 3\delta} \min_{1 \leq d \leq \iota} \mathbf{D}_\varepsilon(d, q_0) + \varepsilon^2 \frac{U_\varepsilon^*(s_t)}{\delta}, \quad (60)$$

где для последнего члена в правой части (60) выполняется соотношение (46).

## 5.2. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью проверки работоспособности и эффективности предложенного подхода к непараметрическому оцениванию сигналов было выполнено статистическое моделирование процедуры выбора модели (33) на ЭВМ. При моделировании полагалось, что модель наблюдений описывается выражением (55), где в (54)

$$q_0 = 10, \quad \theta_{0j} = j/(j + 1), \quad \varphi_j(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi l_j t), \quad l_j = j \left[ \sqrt{j} \right]. \quad (61)$$

а в качестве помехи  $\nu_t$  выступает полосовой гауссовский случайный процесс, обладающий спектральной плотностью  $G_\nu(f) = [-l_{q_0}, l_{q_0}]$ . Здесь учтено, что на практике любое приемное устройство имеет конечную полосу пропускания, согласованную с полосой полезного сигнала.

Число сформированных отсчетов реализации (55) на интервале наблюдения  $[0, 1]$  (совпадающем с периодом сигнала (54), (61)) в каждом испытании составляло  $p = 100000$ . В результате среднеквадратическая погрешность построенной на их основе ступенчатой аппроксимации непрерывной реализации (55) была пренебрежимо мала.

В качестве весовых коэффициентов использовалась весовая последовательность, предложенная в [13] для модели с дискретным временем с параметрами  $k^* = 100 + \sqrt{|\ln \varepsilon|}$  и  $m = \lceil |\ln \varepsilon|^2 \rceil$  (35). Для расчета эмпирических квадратичного риска  $\bar{\mathbf{R}}$  и относительного квадратичного риска  $\bar{\mathbf{R}}_*$  использовались выражения вида

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \mathbf{E} (\tilde{s}_{\varepsilon u_j} - s_{u_j})^2, \quad \bar{\mathbf{R}}_* = \bar{\mathbf{R}} / \|s\|_p^2, \quad (62)$$

где  $u_j = j/p$ ,  $\|s\|_p^2 = \sum_{i=1}^p s_{u_j}^2 / p$ . При численных расчетах операция усреднения (математического ожидания) в (62) заменялась на вычисление соответствующего выборочного среднего по  $N = 10000$  обработанным реализациям (55):

$$\mathbf{E} (\tilde{s}_\varepsilon - s_t)^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \|\tilde{s}_\varepsilon^l - s_t\|^2.$$

При этом использовалась функция стоимости (31) со значением  $\delta = (3 + |\ln \varepsilon|)^{-2}$ .

Некоторые результаты статистического моделирования при значениях  $\varepsilon = 1/\sqrt{20}$ ,  $1/\sqrt{100}$ ,  $1/\sqrt{200}$ ,  $1/\sqrt{1000}$  нанесены на рис. 1а–1г. Здесь пунктирной линией изображен сигнал  $\hat{s}_\varepsilon$ , восстановленный с использованием процедуры выбора модели (33), сплошной тонкой линией нанесена функция  $s_t$  (54), (61), а сплошной толстой линией – реализация наблюдаемых данных  $y_t$  на выходе входного фильтра (преселектора) приемного устройства (55).

В таблице 1 приведены соответствующие значения эмпирических рисков (62). Из приведенных данных следует, что процедура выбора модели (33) является работоспособной и обеспечивает приемлемую точность восстановления полезного сигнала при  $\varepsilon < 0,07$ .

Таблица 1. Эмпирические риски при восстановлении сигнала на основе предложенной процедуры выбора модели.

	$\bar{R}$	$\bar{R}_*$
$1/\sqrt{20}$	0,0158	0,307
$1/\sqrt{100}$	0,0113	0,059
$1/\sqrt{200}$	0,0076	0,04
$1/\sqrt{1000}$	0,0035	0,0185

При оценивании числа сигналов  $q_0$  использовались две процедуры принятия решений. Первая оценка  $\hat{q}_1$  параметра  $q_0$  формировалась согласно (59) при  $\iota = \lceil \ln \varepsilon^{-2} \rceil$ . Вторая оценка  $\hat{q}_2$  определялась с помощью одного из наиболее распространенных известных аналогов – метода сокращения [30] – по правилу

$$\hat{q}_2 = \inf \left\{ j \geq 1 : \left| \hat{\theta}_j \right| \leq c_\varepsilon^* \right\}, \quad c_\varepsilon^* = \varepsilon \sqrt{|\log \varepsilon|}.$$

Найденные в процессе моделирования при обработке  $N = 10000$  реализаций (55), (54) (61) средние значения  $\hat{q}_1$ ,  $\hat{q}_2$  выносимых решений  $\hat{q}_1$ ,  $\hat{q}_2$  приведены в таблице 2.

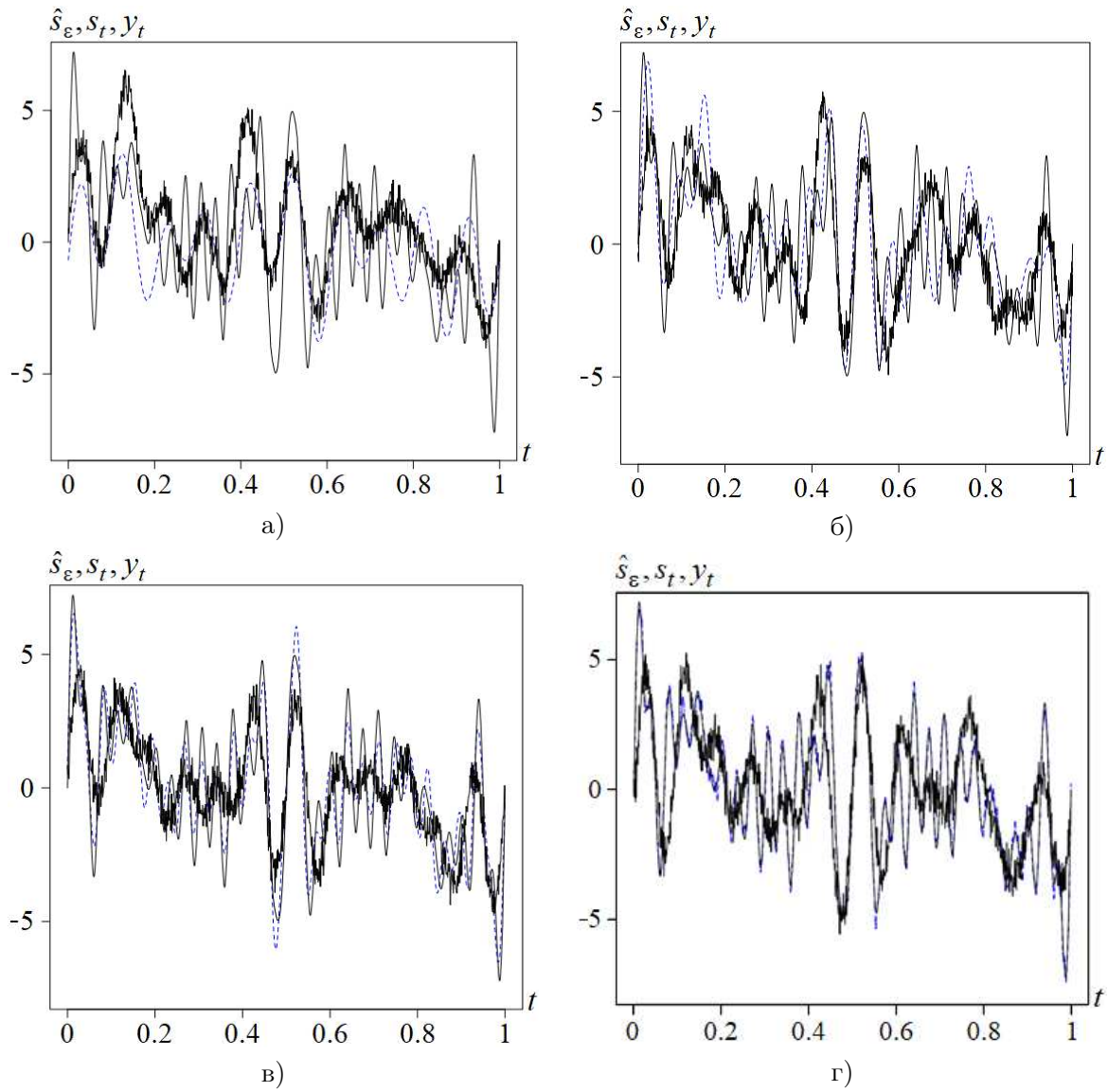


Рис. 1. Восстановленный сигнал, исходный сигнал реализации наблюдаемых данных: а)  $\varepsilon = 1/\sqrt{20}$ , б)  $\varepsilon = 1/\sqrt{100}$ , в)  $\varepsilon = 1/\sqrt{200}$ , г)  $\varepsilon = 1/\sqrt{1000}$ .

Таблица 2. Средние оценки числа сигналов при использовании предложенной процедуры выбора модели и метода усечения.

	$\hat{q}_1$	$\hat{q}_2$
$1/\sqrt{20}$	6	5
$1/\sqrt{100}$	8	7
$1/\sqrt{200}$	9	7
$1/\sqrt{1000}$	10	9



Из таблицы 2 и дополнительного анализа следует, что оценка числа сигналов на основе алгоритма (59) обладает удовлетворительным качеством при  $\varepsilon < 0,07$  и несколько превосходит по своим точностным характеристикам оценку по методу сокращения. Таким образом, процедура (33) может быть рекомендована для использования в практических приложениях для восстановления формы неизвестного сигнала и оценки числа сигналов в реализации наблюдаемых данных.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При приеме сигнала неизвестной формы на фоне стационарных и импульсных помех эффективной оказывается процедура его восстановления (процедура выбора модели), основанная на точных неасимптотических оракульных неравенствах для квадратичных и робастных рисков. Применение указанной процедуры требует минимального объема априорной информации и позволяет получить асимптотически оптимальные (обеспечивающие с ростом отношения сигнал/шум совпадение асимптотического квадратичного риска процедуры с постоянной Пинскера, представляющей собой точную нижнюю границу квадратичного риска по всем возможным оценкам) алгоритмы оценки формы сигнала в адаптивной постановке. При этом точность восстановления формы сигнала достаточно быстро возрастает с увеличением отношения сигнал/шум и может считаться удовлетворительной при отношениях сигнал/шум (по мощности) более 11-12 дБ.

Предложенная процедура выбора модели может также быть использована при решении задачи оценки числа сигналов в канале связи в условиях сложной помеховой обстановки. При этом обеспечиваемые ей точностные характеристики превосходят соответствующие характеристики известных аналогов. Сделанные на основе теоретических расчетов заключения и выводы подтверждены экспериментально, с помощью имитационного статистического моделирования.

Полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор в пользу предложенной или других процедур выбора модели в зависимости от имеющейся априорной информации и требований, предъявляемых к точности и степени простоты технической реализации алгоритма оценивания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнштейн, Л. А. Выделение сигналов на фоне случайных помех / Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков. — М. : Сов. радио, 1960.
2. Богданович, В. А. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов / В. А. Богданович, А. Г. Вострецов. — М. : Физматлит, 2004.
3. Kay, S. Fundamentals of statistical signal processing. V. I: Estimation theory / S. Kay. — London : Pearson, 1993.
4. Филиппов, Б. И. Теория электрической связи : учебное пособие / Б. И. Филиппов. — М. : Веди, 2011.
5. Kassam, S. A. Signal detection in non-Gaussian noise / S. A. Kassam. — New York : Springer, 1988.
6. Pchelintsev, E. Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression / E. Pchelintsev // Statistical Inference for Stochastic Processes. — 2013. — V. 16, № 1. — P. 15–28.
7. Конев, В. В. Оценивание регрессии с шумами импульсного типа по дискретным наблюдениям / В. В. Конев, С. М. Пергаменщиков, Е. А. Пчелинцев // Теория вероятностей и ее применения. — 2013. — Т. 58, № 3. — С. 454–471.
8. Konev, V. Efficient robust nonparametric estimation in a semimartingale regression model / V. Konev, S. Pergamenshchikov // Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2012. — V. 48, № 4. — P. 1217–1244.

9. Konev, V. Robust model selection for a semimartingale continuous time regression from discrete data / V. Konev, S. Pergamenschikov // *Stochastic Processes and Their Applications*. — 2015. — V. 125, № 1. — P. 294–326.
10. Сикарев, А. А. Оптимальный прием дискретных сообщений / А. А. Сикарев, А. И. Фалько. — М. : Связь, 1978.
11. Kyprianou, A. E. Fluctuations of Lévy processes with applications / A. E. Kyprianou. — Heidelberg : Springer-Verlag, 2014.
12. Galtchouk, L. Asymptotically efficient estimates for non parametric regression models / L. Galtchouk, S. Pergamenschikov // *Statistics and Probability Letters*. — 2006. — V. 76, № 8. — P. 852–860.
13. Galtchouk, L. Sharp non-asymptotic oracle inequalities for nonparametric heteroscedastic regression models / L. Galtchouk, S. Pergamenschikov // *Journal of Nonparametric Statistics*. — 2009. — V. 21, № 1. — P. 1–18.
14. Конев, В. В. Non-parametric estimation in a semimartingale regression model. Part 1. Oracle inequalities / В. В. Конев, С. М. Пергаменщиков // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. — 2009. — № 3 (7). — С. 23–41.
15. Akaike, H. A new look at the statistical model identification / H. Akaike // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1974. — V. 19, № 6. — P. 716–723.
16. Mallows, C. Some comments on  $C_p$  / C. Mallows // *Technometrics*. — 1973. — V. 15, № 4. — P. 661–675.
17. Barron, A. Risk bounds for model selection via penalization / A. Barron, L. Birgé, P. Massart // *Probability Theory and Related Fields*. — 1999. — V. 113, № 3. — P. 301–413.
18. Fourdrinier, D. Improved selection model method for the regression with dependent noise / D. Fourdrinier, S. Pergamenschikov // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. — 2007. — V. 59, № 3. — P. 435–464.
19. Добровидов, А. В. Непараметрическое оценивание сигналов / А. В. Добровидов, Г. М. Кошкин. — М. : Физматлит, 1997.
20. Galtchouk, L. Adaptive asymptotically efficient estimation in heteroscedastic nonparametric regression / L. Galtchouk, S. Pergamenschikov // *Journal of Korean Statistical Society*. — 2009. — V. 38, № 4. — P. 305–322.
21. Конев, В. В. Nonparametric estimation in a semimartingale regression model. Part 2. Robust asymptotic efficiency / В. В. Конев, С. М. Пергаменщиков // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. — 2009. — № 4 (9). — С. 31–45.
22. Van Trees, H. L. Detection estimation and modulation theory, Part I. Detection, estimation, and filtering theory / H. L. van Trees, K. L. Bell, Z. Tian. — New York : Wiley, 2013.
23. Пинскер, М. С. Оптимальная фильтрация квадратично-интегрируемых сигналов на фоне гауссовского шума / М. С. Пинскер // *Проблемы передачи информации*. — 1980. — Т. 16, № 2. — С. 52–68.
24. Ибрагимов, И. А. Асимптотическая теория оценивания / И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1979.
25. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — М. : Сов. радио, 1977.
26. Жакод, Ж. Предельные теоремы для случайных процессов. Том 1 / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматлит, 1994.
27. Cont, R. Financial modelling with jump processes (Financial mathematics series) / R. Cont, P. Tankov. — London : CRC Press, 2004.
28. Скороход, А. В. О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями / А. В. Скороход // *Доклады Академии наук СССР*. — 1955. — Т. 104, вып. 3. — С. 364–368.

29. Billingsley, P. Convergence of probability measures / P. Billingsley. — New York : Wiley, 1999.
30. Rank-based methods for shrinkage and selection: with application to machine learning / A. K. Md. E. Saleh, M. Arashi, R. A. Saleh, M. Norouzirad. — New York : Wiley, 2022.

## REFERENCES

1. Vainshtein L.A., Zubakov V.D. Extraction of signals against the background of random interferences. [Vainshtein L.A., Zubakov V.D. Vydelenie signalov na fone sluchainyh pomeh]. Moscow: Sovetskoe Radio, 1960.
2. Bogdanovich V.A., Vostretsov A.G. Theory of stable signal detection, discrimination and estimation. [Bogdanovich V.A., Vostretsov A.G. Teoriya ustoychivogo obnaruzheniya, razlicheniya i otsenivaniya signalov]. Moscow: Fizmatlit, 2004.
3. Kay S. Fundamentals of statistical signal processing, Volume I: Estimation theory. London: Pearson, 1993.
4. Filippov B.I. Theory of electric communication: Textbook. [Filippov B.I. Teoriya elektricheskoi svyazi]. Moscow: Vedy, 2011.
5. Kassam S.A. Signal detection in non-Gaussian noise. New York: Springer, 1988.
6. Pchelintsev E. Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression. Statistical Inference for Stochastic Processes, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 15–28.
7. Konev V., Pergamenshchikov S., Pchelintsev E. Estimation of a regression with the pulse type noise from discrete data. [Konev V., Pergamenshchikov S., Pchelintsev E. Ocenivanie regressii s shumami impul'snogo tipa po diskretnym nablyudeniya]. *Teoriya veroyatnostej i ee primeneniya — Theory of Probability and Its Applications*, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 442–457.
8. Konev V., Pergamenshchikov, S. Efficient robust nonparametric estimation in a semimartingale regression model. *Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 1217–1244.
9. Konev V., Pergamenshchikov S. Robust model selection for a semimartingale continuous time regression from discrete data. *Stochastic Processes and their Applications*, 2015, vol. 125, no. 1, pp. 294–326.
10. Sikarev A.A., Fal'ko A.I. Optimal reception of discrete messages. [Sikarev A.A., Fal'ko A.I. Optimal'nyi priem diskretnyh soobschenii]. Moscow: Svyaz', 1978.
11. Kyprianou A.E. Fluctuations of Lévy processes with applications. Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.
12. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. Asymptotically efficient estimates for non parametric regression models. *Statistics and Probability Letters*, 2006, vol. 76, no. 8, pp. 852–860.
13. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. Sharp non-asymptotic oracle inequalities for nonparametric heteroscedastic regression models. *Journal of Nonparametric Statistics*, 2009, vol. 21, no. 1, pp. 1–18.
14. Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Nonparametric estimation in a semimartingale regression model. Part 1. Oracle inequalities. [Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Non-parametric estimation in a semimartingale regression model. Part 1. Oracle inequalities]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo univrsiteta. Matematika i Mehanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2009, no. 3 (7), pp. 23–41.
15. Akaike H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, no. 6, pp. 716–723.
16. Mallows C. Some comments on  $C_p$ . *Technometrics*, 1973, vol. 15, no. 4, pp. 661–675.
17. Barron A., Birgé L., Massart P. Risk bounds for model selection via penalization. *Probability Theory and Related Fields*, 1999, vol. 113, no. 3, pp. 301–413.
18. Fourdrinier D., Pergamenshchikov S. Improved selection model method for the regression

with dependent noise. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2007, vol. 59, no. 3, pp. 435–464.

19. Dobrovidov A.V., Koshkin G.M. Nonparametric signal estimation. [Dobrovidov A.V., Koshkin G.M. *Непараметрическое оценивание сигналов*]. Moscow: Fizmatlit, 1997.

20. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. Adaptive asymptotically efficient estimation in heteroscedastic nonparametric regression. *Journal of Korean Statistical Society*, 2009, vol. 38, no. 4, pp. 305–322.

21. Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Nonparametric estimation in a semimartingale regression model. Part 2. Robust asymptotic efficiency. [Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Nonparametric estimation in a semimartingale regression model. Part 2. Robust asymptotic efficiency]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2009, no. 4 (9), pp. 31–45.

22. Van Trees H.L., Bell K.L., Tian Z. Detection estimation and modulation theory, Part I. Detection, estimation, and filtering theory. New York: Wiley, 2013.

23. Pinsker M.S. Optimal filtering of square-integrable signals in Gaussian noise. [Pinsker M.S. Оптимальная фильтрация квадратично-интегрируемых сигналов на фоне гауссовского шума]. *Problemy peredachi informacii – Problems of Information Transmission*, 1980, vol. 16, no. 2, pp. 120–133.

24. Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. Statistical estimation: Asymptotic theory. [Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. *Асимптотическая теория оценивания*]. Moscow: Nauka, 1979.

25. Tikhonov V.I., Mironov M.A. Markov processes. [Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Марковские процессы*]. Moscow: Sovetskoe Radio, 1977.

26. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. [Jacod J., Shiryaev A.N. *Пределы теоремы для случайных процессов*]. Moscow, 1994.

27. Cont R., Tankov P. Financial modelling with jump processes (Financial mathematics series). London: CRC Press, 2004.

28. Skorokhod A.V. On the limiting transition from a sequence of sums of independent random variables to a homogeneous random process with independent increments. [Skorokhod A.V. О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1955, vol. 104, no. 3, pp. 364–368.

29. Billingsley P. Convergence of probability measures. New York: Wiley, 1999.

30. Saleh A.K.Md.E., Arashi M., Saleh R.A., Norouzirad M. Rank-based methods for shrinkage and selection: with application to machine learning. New York: Wiley, 2022.

Чернояргов Олег Вячеславович, доктор  
физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры электроники и нано-  
электроники Национального исследова-  
тельского университета “МЭИ”, Москва,  
Российская Федерация  
E-mail: chernoyarovov@mpei.ru  
Тел.: +7(495) 362-71-68

Chernoyarov Oleg Vyacheslavovich, Doctor  
in Physics and Mathematics, Associate  
Professor, Professor at the Department  
of Electronics and Nanoelectronics of the  
National Research University “MPEI”,  
Moscow, Russian Federation  
E-mail: chernoyarovov@mpei.ru  
Tel.: +7(495) 362-71-68

*Пергаменщиков Сергей Маркович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и теории функций Национального исследовательского Томского государственного университета, Томск, Российская Федерация*  
*E-mail: s.pergamenshchikov@gmail.com*  
*Тел.: +7(3822) 529-705*

*Pergamenshchikov Serguei Markovich, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Professor at the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions of the National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*  
*E-mail: s.pergamenshchikov@gmail.com*  
*Tel.: +7(3822) 529-705*

*Терехов Александр Васильевич, инженер кафедры электроники и наноэлектроники Национального исследовательского университета "МЭИ", Москва, Российская Федерация*  
*E-mail: aleksandr-terekhov@yandex.ru*  
*Тел.: +7(495) 362-71-68*

*Terekhov Aleksandr Vasilievich, engineer of the Department of Electronics and Nanoelectronics of the National Research University "MPEI", Moscow, Russian Federation*  
*E-mail: aleksandr-terekhov@yandex.ru*  
*Tel.: +7(495) 362-71-68*